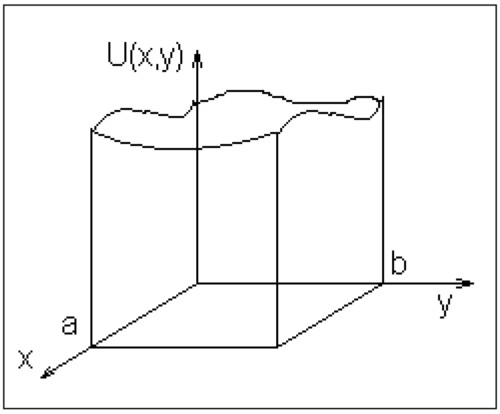
Задача № 23.

Частица находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Координаты x и y частицы лежат в пределах 0 < x < a, 0 < y < b, где a и b – стороны ямы. Определите вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области:

а) $0 < x < \frac{a}{4}$; б) $0 < y < \frac{b}{4}$; в) $0 < x < \frac{a}{4}, 0 < y < \frac{b}{4}$.

Решение:

Частица находится в потенциальной яме, имеющей следующий вид (рисунок 1):



$$U(x,y) = \begin{cases} \infty, M \notin \Omega \\ 0, M \in \Omega \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \end{cases}$$

$$M(x,y)$$

Рисунок 1

Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение дифференциального уравнения (2) имеет вид:

$$\psi(x,y) = A\sin(k_1x + \alpha_1)\sin(k_2y + \alpha_2) \qquad (3)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Так как вне области Ω частица находиться не может, то её пси-функция вне области Ω равна нулю. Тогда из условия непрерывности пси-функций:

$$\psi(0,y) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\psi(x,0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\psi(a,y)=0\Rightarrow \sin k_1 a=0\Rightarrow k_1 a=\pm\pi n_1, n_1=1,2,3...$$
$$\psi(x,b)=0\Rightarrow \sin k_2 b=0\Rightarrow k_2 b=\pm\pi n_2, n_2=1,2,3...$$

С учётом этих условий пси-функция примет вид:

$$\psi(x,y)=A\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right) \qquad (4)$$

Найдём вторые производные по x и по y от пси-функции:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}&=-k_1^2 A\sin\left(k_1 x\right)\sin\left(k_2 y\right)=-k_1^2\psi\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}&=-k_2^2 A\sin\left(k_1 x\right)\sin\left(k_2 y\right)=-k_2^2\psi\end{aligned} \qquad (5)$$

Подставим их в уравнение Шредингера (2):

$$-k_1^2\psi-k_2^2\psi+k^2\psi=0\Rightarrow k^2=k_1^2+k_2^2 \qquad (6)$$

Учитывая, что $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E=\frac{\pi^2}{a^2}n_1^2+\frac{\pi^2}{b^2}n_2^2=\pi^2\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right)\Rightarrow E_{n_1,n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right) \qquad (7)$$

Мы получили энергетический спектр частицы. Значит, в потенциальной яме энергия частицы имеет определённые дискретные значения, которые определяются выражением (7). В состоянии с наименьшей энергией оба квантовых числа равны единице $n_1=1, n_2=1$. Для того, чтобы определить постоянную А в выражении для пси-функции (4) воспользуемся условием нормировки:

$$A^2\int_0^a\int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right)dxdy=1\Rightarrow A=\sqrt{\frac{4}{ab}} \qquad (8)$$

Пси-функция имеет вид:

$$\psi_{n_1,n_2}(x,y)=\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}n_2 y\right) \qquad (9)$$

Пси-функция основного состояния $n_1=1, n_2=1$:

$$\psi_{1,1}(x,y)=\sqrt{\frac{4}{ab}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \qquad (10)$$

Плотность вероятности нахождения частицы в единице объёма равно квадрату модуля пси-функции:

$$\rho(x,y)=\frac{dP}{dxdy}=\left|\psi_{1,1}\right|^2=\frac{4}{ab}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right) \qquad (11)$$

Найдём вероятности нахождения частицы в областях:

а) $0<x<\frac{a}{4}$

$$P\left(0<x<\frac{a}{4}\right)=\frac{4}{ab}\int_0^{\frac{a}{4}}\int_0^{b}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)dxdy=0.091=9.1\%$$

б) $0<y<\frac{b}{4}$

$$P\left(0<y<\frac{b}{4}\right)=\frac{4}{ab}\int_0^{a}\int_0^{\frac{b}{4}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)dxdy=0.091=9.1\%$$

в) $0<x<\frac{a}{4},0<y<\frac{b}{4}$

$$P\left(0<x<\frac{a}{4},0<y<\frac{b}{4}\right)=\frac{4}{ab}\int_0^{\frac{a}{4}}\int_0^{\frac{b}{4}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)dxdy=0.008=0.8\%$$

Ответ:

а) 9.1%, б) 9.1%, в) 0.8%.