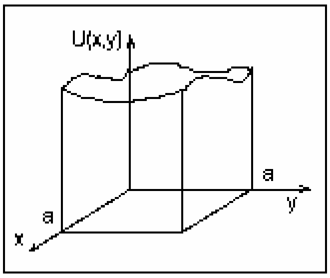
Задача № 24.

Частица находится в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками во втором возбуждённом состоянии. Сторона ямы равна а. Определите вероятность нахождения частицы в области:

а) $\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}$; б) $\frac{a}{3} < y < \frac{2a}{3}$; в) $\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}, \frac{a}{3} < y < \frac{2a}{3}$.

Решение:

Частица находится в потенциальной яме, имеющей следующий вид:



$$U(x, y) = \begin{cases} \infty, M \notin \Omega \\ 0, M \in \Omega \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \end{cases}$$

$$M(x, y)$$

Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x, y) = A\sin(k_1x + \alpha_1)\sin(k_2x + \alpha_2) \qquad (3)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Вне области Ω частица находиться не может, поэтому её пси-функция вне области Ω равна нулю. Используя условие непрерывности, получим:

$$\psi(0, y) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$
$$\psi(x, 0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$
$$\psi(a, y) = 0 \Rightarrow \sin k_1a = 0 \Rightarrow k_1a = \pm\pi n_1, n_1 = 1, 2, 3, ...$$
$$\psi(x, a) = 0 \Rightarrow \sin k_2a = 0 \Rightarrow k_2a = \pm\pi n_2, n_2 = 1, 2, 3, ...$$

Тогда пси-функция примет вид:

$$\psi(x, y) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right) \qquad (4)$$

Найдём вторые производные от пси-функции по x и по y:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_1^2 A\sin(k_1 x)\sin(k_2 y) = -k_1^2\psi \\
&\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k_2^2 A\sin(k_1 x)\sin(k_2 y) = -k_2^2\psi
\end{aligned} \qquad (5)$$

Подставим эти производные в уравнение Шредингера (2):

$$-k_1^2\psi - k_2^2\psi + k^2\psi = 0 \Rightarrow k^2 = k_1^2 + k_2^2 \qquad (6)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n_1^2 + \frac{\pi^2}{a^2}n_2^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n_1^2 + n_2^2) \Rightarrow E_{n_1,n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2) \qquad (7)$$

Мы получили энергетический спектр частицы, находящейся в квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Из выражения (7) видно, что энергия частицы зависит от двух квантовых чисел n_1 и n_2. В таблице 1 приведены несколько возможных значений n_1 и n_2 и соответствующее им $n_1^2 + n_2^2$, которое определяет значение энергии.

Таблица 1.

№ уровня	n_1	n_2	$n_1^2 + n_2^2$
1	1	1	2
2	1	2	5
	2	1	
3	2	2	8

Как видно из таблицы, некоторые энергетические уровни вырождены, то есть существует несколько состояний, описываемых различными пси-функциями, но имеющими одно и то же значение энергии. Второму возбуждённому состоянию соответствуют квантовые числа $n_1 = 2, n_2 = 2$ (так как $n_1 = 1, n_2 = 1$ соответствует основному состоянию, второй уровень – первое возбуждённое состояние, третий – второе возбуждённое состояние).
Определим константу A в выражении для пси-функции (4), используя условие нормировки:

$$A^2\int_0^a\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_2 y\right)dxdy = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a} \qquad (8)$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют вид:

$$\psi_{n_1,n_2}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1 x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2 y\right) \qquad (9)$$

Во втором возбуждённом состоянии:

$$\psi_{2,2}(x,y)=\frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right) \tag{10}$$

Найдём функцию плотности вероятности нахождения частицы в единице объёма:

$$\rho(x,y)=\left|\psi_{2,2}\right|^2=\frac{4}{a^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right) \tag{11}$$

Теперь определим искомые вероятности:

а) $\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3}$

$$P\left(\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{a^2}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\int_{0}^{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right)dxdy=0.1955=19.55\%$$

б) $\frac{a}{3}<y<\frac{2a}{3}$

$$P\left(\frac{a}{3}<y<\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{a^2}\int_{0}^{a}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right)dxdy=0.1955=19.55\%$$

в) $\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3},\frac{a}{3}<y<\frac{2a}{3}$

$$P\left(\frac{a}{3}<x<\frac{2a}{3},\frac{a}{3}<y<\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{a^2}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2y\right)dxdy=0.038=3.8\%$$

Ответ:

а) 19.55%; б) 19.55%; в) 3.8%.