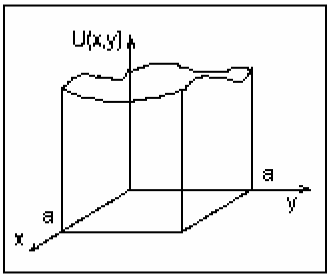
Задача № 25.

Частица массой m_0 находится в основном состоянии в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите энергию частицы, если максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно w_m.

Решение:

Частица находится в потенциальной яме, имеющей следующий вид:



$$U(x,y)=\begin{cases}\infty, M\notin\Omega\\ 0, M\in\Omega\end{cases}$$

$$\Omega=\begin{cases}0<x<a\\ 0<y<a\end{cases}$$

$$M(x,y)$$

Предположим, что сторона ямы равна a.
Составим уравнение Шредингера для области Ω:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k^2\psi=0 \qquad (2)$$

где $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x,y)=A\sin(k_1x+\alpha_1)\sin(k_2x+\alpha_2) \qquad (3)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Вне области Ω частица находиться не может, поэтому её пси-функция вне области Ω равна нулю. Используя условие непрерывности, получим:

$$\psi(0,y)=0\Rightarrow\sin\alpha_1=0\Rightarrow\alpha_1=0$$
$$\psi(x,0)=0\Rightarrow\sin\alpha_2=0\Rightarrow\alpha_2=0$$
$$\psi(a,y)=0\Rightarrow\sin k_1a=0\Rightarrow k_1a=\pm\pi n_1, n_1=1,2,3,...$$
$$\psi(x,a)=0\Rightarrow\sin k_2a=0\Rightarrow k_2a=\pm\pi n_2, n_2=1,2,3,...$$

Тогда пси-функция примет вид:

$$\psi(x,y)=A\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right) \qquad (4)$$

Найдём вторые производные от пси-функции по x и по y:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_1^2 A\sin(k_1x)\sin(k_2y) = -k_1^2\psi$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k_2^2 A\sin(k_1x)\sin(k_2y) = -k_2^2\psi \qquad (5)$$

Подставим эти производные в уравнение Шредингера (2):

$$-k_1^2\psi - k_2^2\psi + k^2\psi = 0 \Rightarrow k^2 = k_1^2 + k_2^2 \qquad (6)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n_1^2 + \frac{\pi^2}{a^2}n_2^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n_1^2 + n_2^2) \Rightarrow E_{n_1,n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2) \qquad (7)$$

Мы получили энергетический спектр частицы, находящейся в квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Из выражения (7) видно, что энергия частицы зависит от двух квантовых чисел n_1 и n_2. В таблице 1 приведены несколько возможных значений n_1 и n_2 и соответствующее им $n_1^2 + n_2^2$, которое определяет значение энергии.

Таблица 1.

№ уровня	n_1	n_2	$n_1^2 + n_2^2$
1	1	1	2
2	1	2	5
	2	1	
3	2	2	8

Основному состоянию соответствуют значения $n_1 = 1, n_2 = 1$.
Определим константу A в выражении для пси-функции (4), используя условие нормировки:

$$A^2\int_0^a\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right)dxdy = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a} \qquad (8)$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют вид:

$$\psi_{n_1,n_2}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}n_1x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}n_2y\right) \qquad (9)$$

В основном состоянии $n_1 = 1, n_2 = 1$, поэтому пси-функция имеет вид:

$$\psi_{1,1}(x,y) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \qquad (10)$$

Плотность вероятности – это квадрат модуля пси-функции:

$$w(x,y)=\left|\psi_{1,1}\right|^2=\frac{4}{a^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{a}y\right) \qquad (11)$$

Графический вид плотности вероятности местонахождения частицы в основном состоянии представлен на рисунке 1:

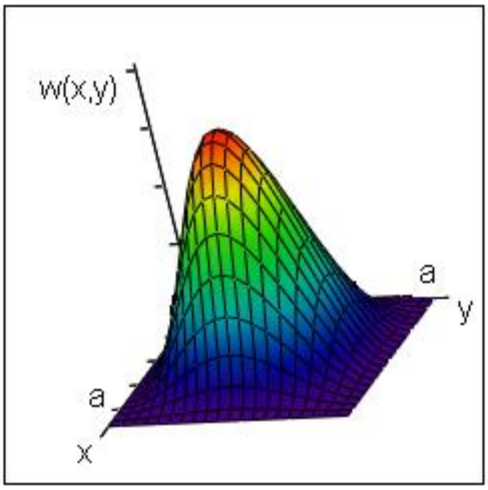


Рисунок 1

Максимальное значение, которое принимает функция синус, это единица (Как нетрудно убедиться, координаты максимума функции плотности вероятности равны $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$).

Поэтому максимальное значение плотности вероятности:

$$w_m=\frac{4}{a^2}\Rightarrow a^2=\frac{4}{w_m} \qquad (12)$$

Исходя из энергетического спектра частицы в квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками (7) и учитывая выражение (12), можем найти значение энергии частицы в основном состоянии $n_1=1, n_2=1$:

$$E_{1,1}=\frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}=\frac{\pi^2\hbar^2 w_m}{4m} \qquad (13)$$

Ответ:

$$E_{1,1}=\frac{\pi^2\hbar^2 w_m}{4m}$$