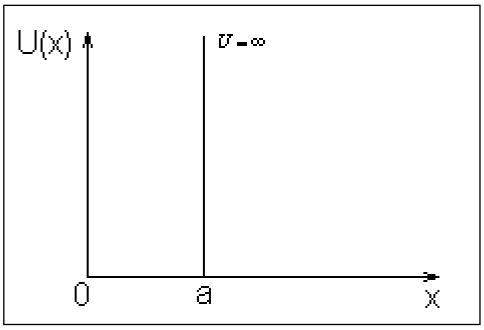
Задача № 27.

Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеющими ширину a. В каких точках интервала $0 < x < a$ плотность вероятности обнаружения частицы одинакова для основного и второго возбуждённого состояний?

Решение:

Частица находится в потенциальной яме, имеющей вид (рисунок 1):



$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0, 0 < x < a \\ \infty, x > a \end{cases}$$

Рисунок 1

Составим уравнение Шредингера для области $0 < x < a$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha) \qquad (3)$$

Воспользуемся естественными условиями, накладываемыми на пси-функцию. В области, где потенциальная энергия равна бесконечности, частица находиться не может, поэтому плотность вероятности нахождения частицы, а значит и пси-функция в этих областях ($x < 0, x > a$) равны нулю. Имея в виду этот факт и условие непрерывности пси-функций, получим:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$
$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pm\pi n, n = 1, 2, 3, ...$$

Тогда пси-функция примет вид:

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (4)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n^2 \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \qquad (5)$$

Мы получили энергетический спектр частицы, находящейся в потенциальной яме заданного вида. Определим коэффициент А в выражении (4), используя условие нормировки:

$$A^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}nx\right)dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \qquad (6)$$

Пси-функции собственных состояний частицы в потенциальной яме:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (7)$$

Пси-функция основного состояния $n = 1$:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (8)$$

Значит, плотность вероятности нахождения частицы в основном состоянии:

$$\rho_1(x) = |\psi_1|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (9)$$

Аналогично, для второго возбуждённого $n = 3$:

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (10)$$

$$\rho_3(x) = |\psi_3|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (11)$$

Для того, чтобы узнать, в каких точках интервала $0 < x < a$ плотность вероятности местонахождения одинакова для основного и второго возбуждённого состояний, приравняем выражения (9) и (11):

$$\rho_1(x) = \rho_3(x) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (12)$$

Решая это уравнения на интервале $0 < x < a$, находим решения: $0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{4}, a$.

Графики плотностей вероятностей приведены на рисунке 2:

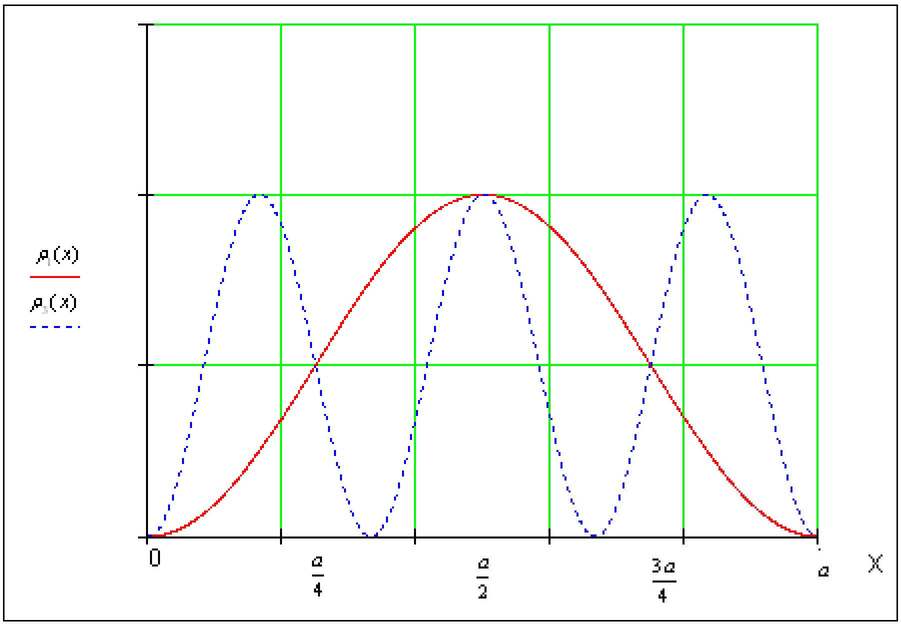


Рисунок 2

Ответ:

$0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3a}{4}, a$.