## Задача № 28.

Квантовый гармонический осциллятор находится в основном состоянии. Найдите вероятность $P$ обнаружения частицы в области $-a < x < a$, где $a$ - амплитуда классических колебаний.

*Решение:*

Квантовый гармонический осциллятор представляет собой частицу, находящуюся в потенциальном поле вида:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \qquad (1)$$

График потенциальной энергии изображён на рисунке 1:

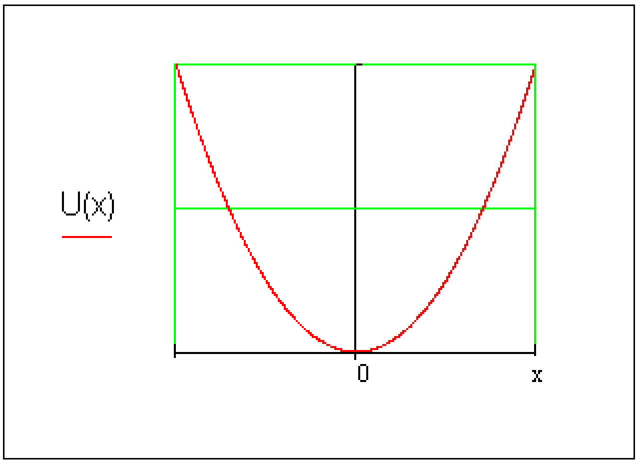


**Рисунок 1**

В этом случае составляют уравнение Шредингера:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0 \qquad (2)$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение только при дискретных значениях $E$. Таким образом, энергия квантового гармонического осциллятора квантуется и может принимать следующие значения:

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, v = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

В основном состоянии квантовое число $v = 0$, поэтому энергия квантового гармонического осциллятора в основном состоянии равна:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \qquad (4)$$

Определим амплитуду классических колебаний:

$$\frac{\hbar\omega_0}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \qquad (5)$$

Решения дифференциального уравнения (4) имеют вид:

$$\psi_v(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}} H_v(\xi) \qquad (6)$$

где $H_v(\xi)$ - полиномы Чебышева-Эрмита, которые определяются следующим образом:

$$H_v(\xi) = \frac{(-1)^v}{\sqrt{2^v v!\sqrt{\pi}}} e^{\xi^2} \frac{d^v e^{-\xi^2}}{d\xi^v} \qquad (7)$$

где $\xi = \frac{x}{a}, a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$. Для основного состояния $v = 0$, имеем пси-функцию:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \qquad (8)$$

Квадрат модуля пси-функции определяет плотность вероятности нахождения частицы:

$$\rho_0(x) = |\psi_0|^2 = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \qquad (9)$$

Чтобы найти вероятность нахождения частицы в области $-a < x < a$ нужно проинтегрировать (9) по пределам области:

$$P = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{a} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = 0.8427 = 84.27\% \qquad (10)$$

**Ответ:**

$P = 0.8427 = 84.27\%$.