Задача № 29.

Частица массой m_0 находится в одномерном потенциальном поле $U(x)$ в стационарном состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(x) = A\exp(-\alpha x^2)$, где A и α - постоянные ($\alpha > 0$). Найдите энергию частицы и вид функции $U(x)$, если $U(0) = 0$.

Решение:

Стационарные состояния частицы описываются пси-функциями, которые являются решениями уравнения Шредингера:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0 \qquad (1)$$

Найдём вторую производную от данной волновой функции по x:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x} = A\exp(-\alpha x^2)(-2\alpha x) = -2A\alpha x\exp(-\alpha x^2) \\ &\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -2A\alpha\exp(-\alpha x^2) - 2A\alpha x\exp(-\alpha x^2)(-2\alpha x) = 4A\alpha^2x^2\exp(-\alpha x^2) - 2A\alpha\exp(-\alpha x^2) \end{aligned} \qquad (2)$$

Подставим в уравнение Шредингера (1):

$$4A\alpha^2x^2\exp(-\alpha x^2) - 2A\alpha\exp(-\alpha x^2) + \frac{2m_0}{\hbar^2}(E - U(x))A\exp(-\alpha x^2) = 0 \qquad (3)$$

Разделим обе части уравнения на $2A\exp(-\alpha x^2)$ и получим:

$$2\alpha^2x^2 - \alpha + \frac{m_0}{\hbar^2}(E - U(x)) = 0 \qquad (4)$$

Учитывая, что $U(0) = 0$, получим:

$$-\alpha + \frac{m_0}{\hbar^2}E = 0 \Rightarrow E = \frac{\alpha\hbar^2}{m_0} \qquad (5)$$

Подставим полученное значение энергии в уравнение (4) и определим вид потенциальной энергии:

$$2\alpha^2x^2 - \alpha + \frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{\alpha\hbar^2}{m_0} - U(x)\right) = 0 \Rightarrow U(x) = 2\alpha^2x^2 \qquad (6)$$

Ответ:

$$E = \frac{\alpha\hbar^2}{m_0}$$

$$U(x) = 2\alpha^2x^2$$