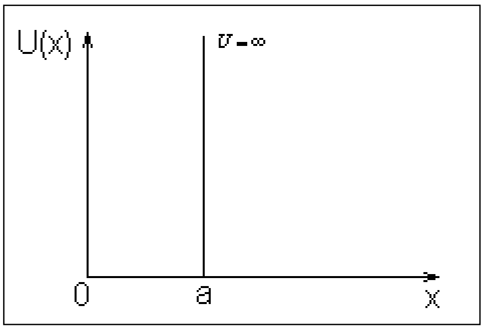
Задача № 30.

Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите отношение вероятностей нахождения частицы в средней трети ямы для первого и второго возбуждённых состояний.

Решение:

Пусть сторона ямы равна a.
Частица находится в потенциальной яме, имеющей вид (рисунок 1):



$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0, 0 < x < a \\ \infty, x > a \end{cases}$$

Рисунок 1

Составим уравнение Шредингера для области $0 < x < a$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha) \qquad (3)$$

Воспользуемся естественными условиями, накладываемыми на пси-функцию. В области, где потенциальная энергия равна бесконечности, частица находиться не может, поэтому плотность вероятности нахождения частицы, а значит и пси-функция в этих областях ($x < 0, x > a$) равны нулю. Имея в виду этот факт и условие непрерывности пси-функций, получим:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$
$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pm\pi n, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда пси-функция примет вид:

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (4)$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n^2 \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \qquad (5)$$

Мы получили энергетический спектр частицы, находящейся в потенциальной яме заданного вида. Определим коэффициент А в выражении (4), используя условие нормировки:

$$A^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}nx\right)dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \qquad (6)$$

Пси-функции собственных состояний частицы в потенциальной яме:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \qquad (7)$$

В первом возбуждённом состоянии $n = 2$ (так как $n = 1$ соответствует основному состоянию). Тогда пси-функция первого возбуждённого состояния равна:

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right) \qquad (8)$$

Плотность вероятности нахождения частицы в этом состоянии определяет квадрат модуля пси-функции:

$$\rho_2(x) = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right) \qquad (9)$$

Аналогично для второго возбуждённого состояния пси-функция и плотность вероятности равны:

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (10)$$

$$\rho_3(x) = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) \qquad (11)$$

Вероятности нахождения частицы в средней трети потенциальной ямы для первого и второго возбуждённых состояний найдём, интегрируя (9) и (11) по пределам $x_1 = \frac{a}{3}, x_2 = \frac{2a}{3}$:

$$P_2\left(\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}\right) = \frac{2}{a}\int\limits_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 2x\right) = 0.1955$$

$$P_3\left(\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}\right) = \frac{2}{a}\int\limits_{\frac{a}{3}}^{\frac{2a}{3}} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}\cdot 3x\right) = 0.3333$$

Тогда

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{0.1955}{0.3333} = 0.5866$$

Ответ:

$$\frac{P_2}{P_3} = 0.5866\,.$$