Задача № 35.

Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x)=\begin{cases}0, x<0\\ U_0\left(1-\dfrac{x^2}{d^2}\right), 0<x<d\\ 0, x>d\end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E<U_0$.

Решение:

Вид данного потенциального барьера представлен на рисунке 1:

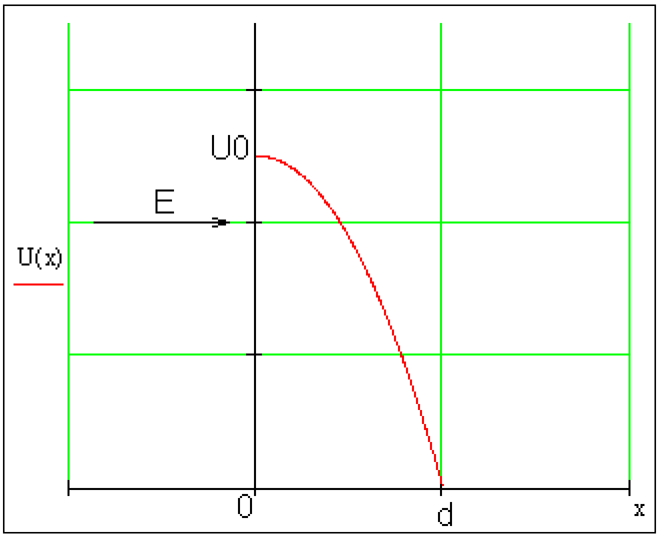

Рисунок 1

Коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер определяется выражением:

$$D\approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m_0(U(x)-E)}dx\right) \qquad (1)$$

где пределы интегрирования являются корнями уравнения:

$$U(x)=E \qquad (2)$$

Определим пределы интегрирования в нашем случае. Нижний предел равен $x_1=0$. Верхний предел определим, решая уравнение:

$$U_0\left(1-\frac{x_2^2}{d^2}\right)=E \Rightarrow x_2=\pm d\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}$$

Берём положительный корень, так как отрицательный не принадлежит интервалу $0 < x < d$. Значит, $x_2 = d\sqrt{1 - \frac{E}{U_0}}$. Подставим в выражение (1) вид потенциальной энергии и пределы интегрирования в нашем случае и найдём коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер в зависимости от энергии частицы:

$$D(E) \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int\limits_0^{d\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}}\sqrt{2m_0\left(U_0\left(1-\frac{x^2}{d^2}\right)-E\right)}dx\right) = \exp\left(-\frac{\pi d(U_0 - E)}{\hbar}\sqrt{\frac{m_0}{2U_0}}\right) \qquad (3)$$

Ответ:

$$D(E) \approx \exp\left(-\frac{\pi d(U_0 - E)}{\hbar}\sqrt{\frac{m_0}{2U_0}}\right).$$