Задача № 36.

Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x)=\begin{cases}0, x<-d\\ U_0\left(1-\dfrac{x^2}{d^2}\right), -d<x<0\\ 0, x>0\end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E<U_0$.

Решение:

Вид данного потенциального барьера представлен на рисунке 1:

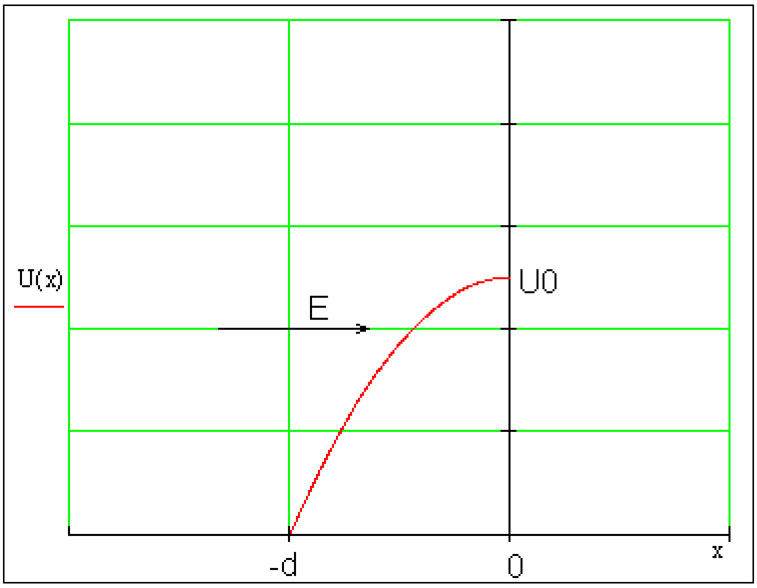

Рисунок 1

Коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер определяется выражением:

$$D\approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m_0(U(x)-E)}dx\right) \qquad (1)$$

где пределы интегрирования x_1 и x_2 являются решениями уравнения:

$$U(x)=E \qquad (2)$$

В нашем случае верхний предел интегрирования $x_2=0$, а нижний найдём из уравнения:

$$U_0\left(1-\frac{x_1^2}{d^2}\right)=E\Rightarrow x_1=\pm d\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}$$

Берём отрицательный корень, так как положительный не принадлежит интервалу $-d < x < 0$. Значит, $x_1 = -d\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}$. Подставим в выражение (1) вид потенциальной энергии в нашем случае и пределы интегрирования найдём коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер в зависимости от энергии частицы E:

$$D(E) \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{-d\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}}^{0}\sqrt{2m_0\left(U_0\left(1-\frac{x^2}{d^2}\right)-E\right)}dx\right) = \exp\left(-\frac{\pi d(U_0-E)}{\hbar}\sqrt{\frac{m_0}{2U_0}}\right) \qquad (3)$$

Ответ:

$$D(E) \approx \exp\left(-\frac{\pi d(U_0-E)}{\hbar}\sqrt{\frac{m_0}{2U_0}}\right).$$