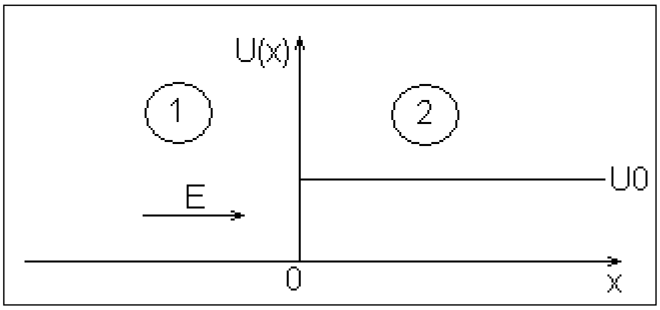
Задача № 38.

Частица массой m_0 падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы равна E, причём $E < U_0$. Найдите эффективную глубину проникновения частицы в область порога, то есть на расстоянии от границы порога до точки, в которой плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в e раз.

Решение:

На рисунке 1 показан вид потенциального порога:



$$U(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ U_0, x > 0 \end{cases}$$

Рисунок 1

Составим уравнение Шредингера для областей 1 и 2:

Для области 1: $$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} E \psi_1 = 0 \qquad (1)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - U_0) \psi_2 = 0 \qquad (2)$$

Или в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0 \qquad (4)$$

где $k_1^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E$ и $k_2^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2}(E - U_0)$. Заметим, что, так как мы рассматриваем случай, когда $E < U_0$, то k_2 будет чисто мнимым. Решения дифференциальных уравнений (3) и (4) имеют вид:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x) \qquad (5)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \qquad (6)$$

Первое слагаемое выражения (5) соответствует падающей волне де Бройля частицы, второе слагаемое – отражённой волне. Первое слагаемое выражения (6) соответствует прошедшей дебройлевской волне частицы, других волн во второй области нет, поэтому $B_2 = 0$. Тогда выражение (6) примет вид:

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) \qquad (7)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Из условия непрерывности пси-функций, имеем для точки $x = 0$:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 \qquad (8)$$

Используя условие гладкости пси-функций в точке $x = 0$, получим:

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 \qquad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) найдём:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \tag{10}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \tag{11}$$

Рассмотрим поток плотности вероятности. Он определяется также как и поток других физических величин: $\Phi \sim vA^2$, где v - скорость частицы, а A^2 - квадрат амплитуды пси-функции, который определяет плотность вероятности нахождения частицы. Учитывая, что $v \sim p \sim k$, получим:

$$\Phi \sim kA^2 \tag{12}$$

В нашем случае, для падающей, отражённой и прошедшей волн потоки плотности вероятности:

Для падающей волны: $\Phi \sim k_1 A_1^2$ (13)

Для отражённой волны: $\Phi' \sim k_1 B_1^2$ (14)

Для прошедшей волны: $\Phi'' \sim k_2 A_2^2$ (15)

Тогда мы можем найти коэффициенты отражения и пропускания:

Коэффициент отражения: $$R = \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{k_1 B_1^2}{k_1 A_1^2} = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2 \tag{16}$$

Учитывая, что при $E < U_0$ k_2 чисто мнимое, имеем $R = 1$. Тогда коэффициент пропускания равен нулю. Но это не значит, что частица не может находиться в области 2. Поведение частицы в области 2 описывается пси-функцией (7), тогда плотность вероятности нахождения частицы равна:

$$\rho(x) = |\psi_2|^2 = \rho(0)\exp(2ik_2 x) = \rho(0)\exp(-2\kappa x) \tag{17}$$

Мы сделали замену $\kappa = ik_2 = \dfrac{\sqrt{2m_0(U_0 - E)}}{\hbar}$. Пусть l - эффективная глубина проникновения частицы в область потенциального порога, то есть такое расстояние от границы порога, на котором плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в e раз. Тогда:

$$\rho(l) = \frac{\rho(0)}{e} = \rho(0)\exp(-2\kappa l) \Rightarrow -2\kappa l = -1 \Rightarrow l = \frac{1}{2\kappa} \tag{18}$$

Учитывая, что $\kappa = \dfrac{\sqrt{2m_0(U_0 - E)}}{\hbar}$, получим для эффективной глубины проникновения частицы в область потенциального порога выражение:

$$l = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m_0(U_0 - E)}} = \frac{\hbar}{\sqrt{8m_0(U_0 - E)}} \tag{19}$$

Ответ:

$$l = \frac{\hbar}{\sqrt{8m_0(U_0 - E)}}.$$