

Задача № 39.

Частица с энергией E падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0 .

Найдите приближённое выражение для коэффициента отражения R для случая $\frac{U_0}{E} \ll 1$.

Решение:

Вид потенциального порога представлен на рисунке 1:

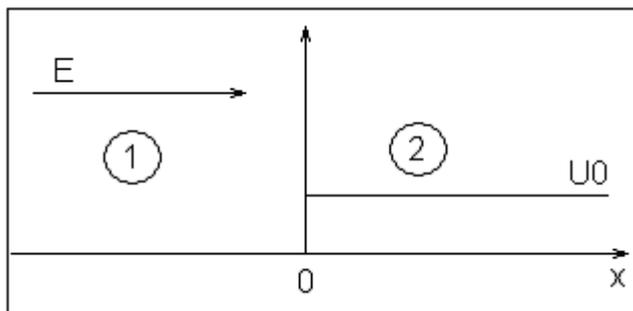


Рисунок 1

Составим уравнения Шредингера для областей 1 и 2:

$$\text{Для области 1: } \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Для области 2: } \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \psi_2 = 0 \quad (2)$$

Или в виде:

$$\text{Для области 1: } \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0, \text{ где } k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E \quad (3)$$

$$\text{Для области 2: } \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0, \text{ где } k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0) \quad (4)$$

Решения дифференциальных уравнений (3) и (4) имеют вид:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x) \quad (5)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \quad (6)$$

В выражении (5) первое слагаемое является уравнением падающей волны де Бройля электрона, а второе слагаемое – уравнение отражённой волны. В области 2 есть только прошедшая волна, которой соответствует первое слагаемое уравнения (6), поэтому коэффициент $B_2 = 0$. Уравнение (6) примет вид:

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) \quad (7)$$

Используя условие непрерывности пси-функций, для точки $x = 0$ запишем:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 \quad (8)$$

Используя условие гладкости пси-функций, для точки $x = 0$ можем записать:

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 \quad (9)$$

Используя уравнения (8) и (9), найдём:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad (10)$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \quad (11)$$

Рассмотрим поток плотности вероятности, который определяется также как и поток любой другой физической величины: $P \propto v A^2$, где v - скорость частицы, а A^2 - квадрат амплитуды волновой функции, характеризующий плотность вероятности местонахождения частицы. Так как скорость частицы $v \propto p \propto k$, то для падающей, отражённой и прошедшей волн де Бройля электрона в нашем случае можно записать:

$$\text{Для падающей волны: } P \propto k_1 A_1^2 \quad (12)$$

$$\text{Для отражённой волны: } P' \propto k_1 B_1^2 \quad (13)$$

$$\text{Для прошедшей волны: } P'' \propto k_2 A_2^2 \quad (14)$$

Теперь определим коэффициенты, учитывая также выражения (10) и (11):

$$\text{Коэффициент отражения: } R = \frac{P'}{P} = \frac{k_1 B_1^2}{k_1 A_1^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (15)$$

$$\text{Коэффициент пропускания: } D = \frac{P''}{P} = \frac{k_2 A_2^2}{k_1 A_1^2} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \quad (16)$$

Сумма коэффициентов отражения и пропускания (коэффициента прозрачности потенциального порога) равна 1:

$$R + D = 1 \quad (17)$$

Учитывая, что $k_1 = \frac{\sqrt{2m_0 E}}{\hbar}$ и $k_2 = \frac{\sqrt{2m_0(E - U_0)}}{\hbar}$ для коэффициента отражения получим:

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - U_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E - U_0}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}} \right)^2 \quad (18)$$

Учитывая условие $\frac{U_0}{E} \ll 1$, получим: $R \approx 0$, то есть при $\frac{U_0}{E} \ll 1$ отражённая дебройлевская волна практически отсутствует.

Ответ:

$$R = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}} \right)^2 \approx 0.$$