Задача № 40.

Частица массой m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольную потенциальную яму шириной a и глубиной U_0. Найдите коэффициент прохождения ямы для этой частицы, а также значения энергии E, при которых частица будет беспрепятственно проходить через яму.

Решение:

На рисунке 1 представлена потенциальная яма, глубиной U_0 и шириной a, на которую падает частица, обладающая энергией E:

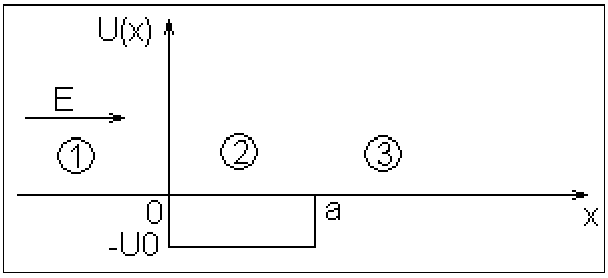

Рисунок 1

Составим уравнения Шредингера:

Для области 1: $$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1=0 \qquad (1)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E+U_0)\psi_2=0 \qquad (2)$$

Для области 3: $$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_3=0 \qquad (3)$$

или в виде:

Для области 1: $$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+k_1^2\psi_1=0 \qquad (4)$$

Для области 2: $$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+k_2^2\psi_2=0 \qquad (5)$$

Для области 3: $$\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2}+k_1^2\psi_3=0 \qquad (6)$$

где $k_1^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$, $k_2^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E+U_0)$. Решения дифференциальных уравнений (4), (5) и (6) имеют вид:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x) \qquad (7)$$

$$\psi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \qquad (8)$$

$$\psi_3(x) = A_3 \exp(ik_1 x) + B_3 \exp(-ik_1 x) \qquad (9)$$

В выражениях (7), (8) и (9) первое слагаемое – это дебройлевская волна, направление распространения которой слева направо, а второе слагаемое – дебройлевская волна, которая распространяется в обратном направлении. Учитывая тот факт, что за потенциальной ямой существует только прошедшая волна, получим, что коэффициент $B_3 = 0$, поэтому выражение (9) примет вид:

$$\psi_3(x) = A_3 \exp(ik_1 x) \qquad (10)$$

Используем естественные условия, накладываемые на пси-функцию. Из условия непрерывности пси-функции для точки $x = 0$ получим:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \qquad (11)$$

Из условия гладкости пси-функции для этой же точки:

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow k_1 A_1 - k_1 B_1 = k_2 A_2 - k_2 B_2 \qquad (12)$$

Аналогично, из условий непрерывности и гладкости для точки $x = a$, получим:

$$\psi_2(0) = \psi_3(0) \Rightarrow A_2 \exp(ik_2 a) + B_2 \exp(-ik_2 a) = A_3 \exp(ik_1 a) \qquad (13)$$

$$\psi_2'(0) = \psi_3'(0) \Rightarrow k_2 A_2 \exp(ik_2 a) - k_2 B_2 \exp(-ik_2 a) = k_1 A_3 \exp(ik_1 a) \qquad (14)$$

Из системы уравнений (11) (12), (13), (14) найдём:

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{4k_1 k_2 e^{-ik_1 a}}{(k_1 + k_2)^2 e^{ik_2 a} - (k_1 - k_2)^2 e^{-ik_2 a}} \qquad (15)$$

Вектор потока плотности вероятности $j \sim vA^2 \sim kA^2$, где квадрат амплитуды A^2 характеризует плотность вероятности. Значит, поток плотности вероятности падающей волны:

$$j_{пад} \sim k_1 A_1^2 \qquad (16)$$

Поток плотности вероятности прошедшей волны:

$$j_{прошед} \sim k_1 A_3^2 \qquad (17)$$

Тогда коэффициент прохождения потенциальной ямы:

$$D = \frac{j_{прошед}}{j_{пад}} = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \left|\frac{4k_1k_2e^{-ik_1a}}{(k_1+k_2)^2e^{ik_2a} - (k_1-k_2)^2e^{-ik_2a}}\right|^2 \qquad (18)$$