Задача № 41.

Определите возможные результаты измерений квадрата модуля момента импульса L^2 для частицы, находящейся в состоянии, описываемой волновой функцией $\psi(\theta,\varphi) = A\sin\theta\cos\varphi$, где θ - полярный угол, φ - азимутальный угол, A - некоторая нормировочная постоянная.

Решение:

Если в некотором состоянии некоторая физическая величина принимает точно определённые значения, то такие значения называются собственными значениями этой физической величины, а пси-функции, которые описывают такие собственные состояния, являются решениями операторного уравнения:

$$\hat{Q}\psi = Q\psi \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - оператор некоторой физической величины Q, а в правой части уравнения Q - собственное значение этой физической величины. В нашем случае необходимо найти собственные значения квадрата модуля момента импульса, поэтому уравнение (1) в данном случае имеет вид:

$$\hat{L}^2\psi = L^2\psi \qquad (2)$$

где $\hat{L}^2$ - оператор квадрата модуля момента импульса, который в сферических координатах имеет вид:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \qquad (3)$$

Подставим в операторное уравнение (2) вид оператора и пси-функцию и после преобразований получим:

$$2\hbar^2 A\sin\theta\cos\varphi = L^2 A\sin\cos\varphi \Rightarrow L^2 = 2\hbar^2 \qquad (4)$$

Таким образом, собственное значение квадрата момента импульса в данном состоянии равняется $L^2 = 2\hbar^2$.

Ответ:

$L^2 = 2\hbar^2$.