Задача № 42.

Определите возможные результаты измерений проекции момента импульса L_z на выделенное направление для частицы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(\theta,\varphi) = A\sin\theta\cos\varphi$, где θ - полярный угол, φ - азимутальный угол, A - некоторая нормировочная постоянная.

Решение:

Если некоторая физическая величина имеет точно определённые значения в некотором состоянии, то такое состояние называется собственным. Пси-функции собственных состояний являются решением операторного уравнения:

$$\hat{Q}\psi = Q\psi \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - оператор физической величины Q, в правой части Q - собственное значение этой физической величины. В нашей задаче необходимо определить собственные значения проекции момента импульса L_z, поэтому операторное уравнение (1) в нашем случае имеет вид:

$$\hat{L}_z\psi = L_z\psi \qquad (2)$$

где $\hat{L}_z$ - оператор проекции момента импульса на ось z, который в сферических координатах имеет вид:

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (3)$$

Найдём собственные пси-функции, соответствующие состояниям, в которых проекция момента импульса на ось имеет определённые значения. Для этого решим операторное уравнение:

$$\hat{L}_z\psi = L_z\psi \Rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = L_z\psi \qquad (4)$$

Решая дифференциальное уравнение (4), получим:

$$\psi_m = C\exp\left(im\varphi\right) \qquad (5)$$

где $m = \frac{L_z}{\hbar}, m = 0, \pm1, \pm2, ...$ C - постоянная, которую найдём из условия нормировки:

$$\int_0^{2\pi} \left|\psi_m\right|^2 d\varphi = 1 \Rightarrow C^2 \int_0^{2\pi} \left|\exp(im\varphi)\right|^2 d\varphi = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad (6)$$

В этом случае собственные пси-функции имеют вид:

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi) \qquad (7)$$

Определим постоянную A в выражении для пси-функции данного состояния, используя условие нормировки:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} |\psi|^2 d\theta d\varphi = 1 \Rightarrow A^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\varphi d\theta d\varphi = 1 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \qquad (8)$$

Тогда пси-функция данного состояния имеет вид:

$$\psi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin\theta \cos\varphi \qquad (9)$$

Разложим эту пси-функцию в ряд по собственным пси-функциям (7), учитывая, что $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$:

$$\psi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin\theta \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin\theta \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\theta \psi_{-1} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\theta \psi_1 \qquad (10)$$

Пси-функция (9) раскладывается по двум собственным пси-функциям, имеющим квантовые числа $m = \pm 1$. Соответственно, проекция момента импульса на произвольную ось z в состоянии, описываемом пси-функцией (9), принимает значения:

$$L_z = m\hbar = \pm\hbar \qquad (11)$$

Ответ:

$L_z = \pm\hbar$.