Задача № 43.

Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A\exp\left(-\dfrac{r}{a}\right)$, где r - расстояние электрона от ядра, a - радиус первой боровской орбиты. Определите среднее значение квадрата расстояния $< r^2 >$ электрона от ядра в этом состоянии.

Решение:

Из постулатов квантовой механики следует, что среднее значение некоторой физической величины Q в состоянии, описываемом пси-функцией ψ, определяется следующим образом:

$$< Q >= \int \psi^* \hat{Q} \psi dx \qquad (1)$$

В нашем случае необходимо определить среднее значение квадрата расстояния электрона от ядра в основном состоянии в атоме водорода. Пси-функция электрона в основном состоянии имеет следующий вид:

$$\psi(r) = A\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \qquad (2)$$

где ψ^* - функция, сопряжённая к пси-функции ψ.
Поэтому в нашем случае получим, что среднее значение квадрата расстояния определяет следующее выражение:

$$< r^2 >= \int \psi^* r^2 \psi dV = \int_0^\infty \psi^* r^2 \psi \cdot 4\pi r^2 dr \qquad (3)$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$. Определим в данной пси-функции неизвестную константу A из условия нормировки:

$$\int \psi^* \psi dV = 1 \Rightarrow 4\pi A^2 \int_0^\infty r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = 1 \Rightarrow A^2 = \frac{1}{\pi a^3} \qquad (4)$$

Тогда пси-функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \qquad (5)$$

Подставляя в выражение (3) пси-функцию (5), получим:

$$< r^2 >= 4\pi A^2 \int_0^\infty r^4 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dr = 4\pi \cdot \frac{1}{\pi a^3} \cdot \frac{3}{4} a^5 = 3a^2 \qquad (6)$$

Ответ:

$< r^2 >= 3a^2$.