Задача № 46.

Возможные значения проекции момента импульса на произвольную ось равны $m\hbar$, где $m = l, l-1, ..., -l+1, -l$. Считая, что эти проекции равновероятны и оси равноправны, покажите, что в состоянии с определённым значением l среднее значение квадрата момента импульса $< L^2 >= \hbar^2 l(l+1)$.

Решение:

Формулы, связывающие физические величины в классической физике, в квантовой физике справедливы для средних значений. Следовательно, среднее значение квадрата момента импульса равняется сумме средних значений квадратов проекций момента импульса на все координатные оси:

$$< L^2 >=< L_x^2 > + < L_y^2 > + < L_z^2 > \qquad (1)$$

Так как мы предполагаем все координатные оси равноправными, то $< L_x^2 >=< L_y^2 >=< L_z^2 >$, поэтому выражение (1) можно переписать:

$$< L^2 >= 3 < L_z^2 > \qquad (2)$$

Проекция момента импульса на произвольную ось z при определённом значении l может принимать $2l+1$ значений:

$$L_z = m\hbar \qquad (3)$$

где $m = l, l-1, ..., -l+1, -l$. Считая, что эти проекции равновероятные найдём среднее значение квадрата проекции момента импульса:

$$< L_z^2 >= \frac{\sum\limits_m (m\hbar)^2}{2l+1} = \hbar^2 \frac{\sum\limits_m m^2}{2l+1} = \frac{\hbar^2}{2l+1} \frac{l(l+1)(2l+1)}{3} = \frac{\hbar^2}{3} l(l+1) \qquad (4)$$

Подставив это выражение для $< L_z^2 >$ в выражение (2), получим, что среднее значение квадрата момента импульса равняется:

$$< L^2 >= \hbar^2 l(l+1) \qquad (5)$$

Ответ:

$< L^2 >= \hbar^2 l(l+1)$.