Задача № 47.

В некоторый момент времени координатная часть волновой функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками $(0 < x < a)$, имеет вид $\psi(x) = Ax(a - x)$. Найдите среднюю кинетическую энергию частицы в этом состоянии, если масса частицы равна m_0.

Решение:

Из постулатов квантовой механики следует, что среднее значение некоторой физической величины Q в квантовом состоянии, описываемом пси-функцией ψ, определяется следующим образом:

$$< Q >= \int \psi^* \hat{Q} \psi dx \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - определитель физической величины Q, а ψ^* - функция, сопряжённая к пси-функции ψ. Операторы проекций импульса на координатные оси x,y,z имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{p}_x &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \\ \hat{p}_y &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} \\ \hat{p}_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \qquad (2)$$

Формулы, связывающие физические величины в классической физике, в квантовой физике справедливы для операторов этих физических величин. Поэтому мы можем записать:

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\nabla^2 \qquad (3)$$

Операторы квадрата импульса и кинетической энергии связаны выражением:

$$\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 \qquad (4)$$

где m_0 - масса частицы. В нашем одномерном случае оператор кинетической энергии имеет вид:

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (5)$$

Определим постоянную A в выражении для пси-функции, описывающей состояние частицы, используя условие нормировки:

$$\int_0^a |\psi|^2\, dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_0^a x^2 (a-x)^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 = \frac{30}{a^5} \qquad (6)$$

Тогда пси-функция состояния частицы имеет вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{30}{a^5}}\, x(a-x) \qquad (7)$$

Подставляя в выражение (1) оператор кинетической энергии и данную пси-функцию, найдём среднее значение кинетической энергии частицы:

$$< K >= \int_0^a \psi^* \hat{K}\, \psi\, dx = A^2 \int_0^a x(a-x)\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x(a-x)\right)\right) dx = \frac{5\hbar^2}{m_0 a^2} \qquad (8)$$

Ответ:

$$< K >= \frac{5\hbar^2}{m_0 a^2}\,.$$