## Задача № 48.

В некоторый момент времени частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией, координатная часть которой имеет вид $\psi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right)$, где $A$ и $a$ - некоторые постоянные, а $k$ - заданный параметр, имеющий размерность обратной длины. Найдите для данного состояния средние значения координаты $<x>$ и проекции импульса частицы $<p_x>$.

*Решение:*

Из постулатов квантовой механики следует, что среднее значение некоторой физической величины $Q$ в состоянии, описываемом пси-функцией $\psi$, определяется следующим образом:

$$<Q>=\int \psi^* \hat{Q} \psi \, dx \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - оператор физической величины $Q$, а $\psi^*$ - функция, сопряжённая к пси-функции $\psi$. Операторы физических величин, средние значения которых необходимо определить, имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x \\ \hat{p}_x &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \qquad (2)$$

Определим постоянную $A$ в выражении для пси-функции, описывающей состояние частицы, используя условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\frac{x^2}{a^2}\right) dx = 1 \Rightarrow A^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \qquad (3)$$

Тогда пси-функция, описывающая состояние частицы, имеет вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right) \qquad (4)$$

Сопряженная к пси-функции (4) функция имеет следующий вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - ikx\right) \qquad (5)$$

Подставляя в выражение (1) операторы физических величин, средние значения которых необходимо найти, и пси-функцию, описывающую состояние частицы, получим:

$$< x > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{x} \psi dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - ikx\right) x \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right) dx = 0$$

(6)

$$< p_x > = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p}_x \psi dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - ikx\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right)\right)\right) dx =$$

$$= A^2\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} - ikx\right)\left(\frac{2ix}{a^2} + k\right)\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right) dx = \frac{2iA^2\hbar}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-2\frac{x^2}{a^2}\right) + kA^2\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\frac{x^2}{a^2}\right) = \hbar k$$

**Ответ:**

$< x > = 0$

$< p_x > = \hbar k$ .