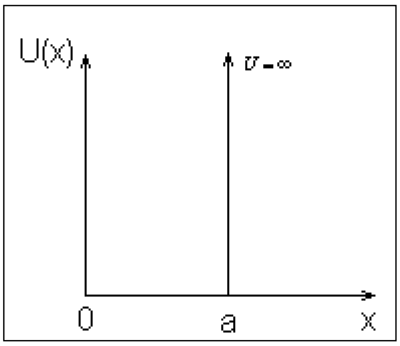
Задача № 49.

В некоторый момент времени координатная часть волновой функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками $(0 < x < a)$, имеет вид $\psi(x) = A\sin^2\frac{\pi x}{a}$. Найдите вероятность пребывания частицы в основном состоянии.

Решение:

Вид потенциальной ямы, в которой находится частица, представлен на рисунке 1:



$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ 0,, 0 < x < a \\ \infty, x > a \end{cases}$$

Рисунок 1

Найдём пси-функции собственных состояний частицы в потенциальной яме. Составим уравнение Шредингера для области $0 < x < a$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \qquad (1)$$

или в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0 \qquad (2)$$

где $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha) \qquad (3)$$

Воспользуемся естественными условиями, накладываемыми на пси-функцию. В области $x < 0$ потенциальная энергия равняется бесконечности, поэтому частица находится в области $x < 0$ не может. Следовательно, плотность вероятности нахождения частицы, а, значит, и пси-функция частицы в области $x < 0$ равны нулю. Из условия непрерывности пси-функций для точки $x = 0$, получим:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Аналогично, применив условие непрерывности пси-функций, для точки $x = a$ получим:

$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \sin ka = 0 \Rightarrow ka = \pm\pi n, n = 1, 2, 3, ...$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют вид:

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \tag{4}$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$, получим:

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E = \frac{\pi^2}{a^2}n^2 \Rightarrow E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2 \tag{5}$$

Мы получили энергетический спектр частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Определим постоянную A в выражении для пси-функций собственных состояний частицы (4), используя условие нормировки:

$$\int_0^a |\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2\int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi}{a}nx\right)dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{6}$$

Тогда пси-функции собственных состояний имеют вид:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}nx\right) \tag{7}$$

По условию частица в некоторый момент времени находится в состоянии, описываемом пси-функцией:

$$\psi(x) = A\sin^2\frac{\pi x}{a} \tag{8}$$

Используя условие нормировки, определим постоянную A в выражении (8):

$$\int_0^a |\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2\int_0^a \sin^4\left(\frac{\pi}{a}x\right) = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{8}{3a}} \tag{9}$$

Тогда пси-функция (8) имеет вид:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{8}{3a}}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \tag{10}$$

Разложим пси-функцию (10) в ряд по пси-функциям собственных состояний (7):

$$\psi(x) = C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + C_3\psi_3 + \ldots \tag{11}$$

где $C_1, C_2, \ldots$ - коэффициенты, которые определяются следующим образом:

$$C_n = \int_0^a \psi_n^*\psi\, dx \tag{12}$$

где ψ_n^* - функция, сопряжённая к собственной пси-функции ψ_n, ψ - пси-функция, описывающая состояние частицы. Найдём несколько первых коэффициентов разложения:

$$C_1 = \int_0^a \psi_1^* \psi dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx = \frac{16\sqrt{3}}{9\pi} \qquad (13)$$

$$C_2 = \int_0^a \psi_2^* \psi dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 2x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx = 0 \qquad (14)$$

$$C_3 = \int_0^a \psi_3^* \psi dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 3x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx = -\frac{16\sqrt{3}}{45\pi} \qquad (15)$$

$$C_4 = \int_0^a \psi_4^* \psi dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 4x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx = 0 \qquad (16)$$

$$C_5 = \int_0^a \psi_5^* \psi dx = \frac{4}{\sqrt{3}a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi}{a} \cdot 5x\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx = -\frac{16\sqrt{3}}{315\pi} \qquad (17)$$

Значит, разложение пси-функции (10) в ряд по собственным пси-функциям (7) имеет вид:

$$\psi = \frac{16\sqrt{3}}{9\pi}\psi_1 - \frac{16\sqrt{3}}{45\pi}\psi_3 - \frac{16\sqrt{3}}{315\pi}\psi_5 + ... \qquad (18)$$

Если в собственных состояниях некоторая физическая величина Q имеет определённые собственные значения, то в состоянии описываемом пси-функцией ψ, которая не является пси-функцией собственного состояния, физическая величина Q определённого значения иметь не будет. Если пси-функцию ψ разложить в ряд по пси-функциям собственных состояний, то вероятность того, что значение физической величины Q будет равно Q_1 - собственному значению в состоянии, описываемом пси-функцией ψ_1, определяет квадрат модуля первого коэффициента в разложении $|C_1|^2$. Аналогично, вероятность того, что значение физической величины Q примет значение Q_2, определяет $|C_2|^2$, и так далее. Следовательно, вероятность нахождения частицы в основном состоянии в нашем случае определяет квадрат модуля первого коэффициента в разложении (18), значит:

$$P_1 = |C_1|^2 = \left|\frac{16\sqrt{3}}{9\pi}\right|^2 = 0.96 = 96\% \qquad (19)$$

Ответ:

$P_1 = 96\%$.