Задача № 50.

Найдите средние значения кинетической и потенциальной энергий квантового осциллятора с частотой ω_0 в основном состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(x) = A\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)$, где A - некоторая постоянная, а m_0 - масса осциллятора.

Решение:

Из постулатов квантовой механики следует, что среднее значение некоторой физической величины Q в состоянии, описываемом пси-функцией ψ, определяется следующим образом:

$$< Q > = \int \psi^* \hat{Q} \psi dx \qquad (1)$$

где $\hat{Q}$ - оператор физической величины Q, а ψ^* - функция, сопряжённая к пси-функции ψ. А среднее значение некоторой функции координат $f(x)$ определяется так:

$$< f > = \int \psi^* f(x) \psi dx \qquad (2)$$

Найдём оператор кинетической энергии. Операторы проекций импульса на координатные оси x,y,z имеют вид:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$
$$\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} \qquad (3)$$
$$\hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$$

Формулы, связывающие физические величины в классической физике, в квантовой физике справедливы для операторов этих физических величин. Поэтому мы можем записать:

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\nabla^2 \qquad (4)$$

Операторы квадрата импульса и кинетической энергии связаны выражением:

$$\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 \qquad (5)$$

где m_0 - масса частицы. В нашем одномерном случае оператор кинетической энергии имеет вид:

$$\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad (6)$$

Пси-функция, описывающая состояние квантового осциллятора, имеет вид:

$$\psi(x) = A\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right) \qquad (7)$$

Из условия нормировки определим постоянную A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \Rightarrow A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{\hbar}\right) dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt[4]{\frac{m_0\omega_0}{\pi\hbar}} \qquad (8)$$

Тогда пси-функция (7) примет вид:

$$\psi(x) = \sqrt[4]{\frac{m_0\omega_0}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right) \qquad (9)$$

Найдём среднее значение кинетической энергии квантового осциллятора, подставив в выражение (1) оператор кинетической энергии (6) и пси-функцию (9):

$$<K> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{K}\psi dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)\right)\right) dx = \frac{\hbar\omega_0}{4} \qquad (10)$$

Потенциальная энергия квантового осциллятора имеет вид:

$$U(x) = \frac{m_0\omega_0^2 x^2}{2} \qquad (11)$$

Подставив в выражение (2) вид потенциальной энергии м пси-функцию (9), найдём среднее значение потенциальной энергии:

$$<U> = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* U(x)\psi dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_0\omega_0^2 x^2}{2} \exp\left(-\frac{m_0\omega_0 x^2}{\hbar}\right) dx = \frac{\hbar\omega_0}{4} \qquad (12)$$

Ответ:

$$<K> = \frac{\hbar\omega_0}{4},$$

$$<U> = \frac{\hbar\omega_0}{4}.$$