Задача № 51.

Докажите, что квадрат момента импульса частицы L^2 может быть одновременно измерим с кинетической энергией частицы E_k.

<u>Указание</u>: Рассмотрите коммутатор операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{E}_k$.

Решение:

Коммутатором операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ двух физических величин называется выражение:

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad (1)$$

Если коммутатор двух операторов физических величин равен нулю, то есть операторы коммутируют между собой ($\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$), то эти две физические величины могут быть измерены одновременно точно, если коммутатор двух операторов не равен нулю, то эти две физические величины одновременно неизмеримы. Таким образом, нам необходимо выяснить, равен ли нулю коммутатор операторов квадрата момента импульса и кинетической энергии:

$$[\hat{L}^2, \hat{E}_k] = \hat{L}^2 \hat{E}_k - \hat{E}_k \hat{L}^2 \qquad (2)$$

Оператор квадрата момента импульса имеет вид:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta,\varphi} \qquad (3)$$

где $\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ - угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат. Оператор кинетической энергии имеет вид:

$$\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\right) \qquad (4)$$

где $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, а $\Delta_{\theta,\varphi}$ - угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат. Таким образом, коммутатор определителей кинетической энергии и квадрата момента импульса равняется:

$$[\hat{L}^2, \hat{E}_k] = \frac{\hbar^4}{2m}[\Delta_{\theta,\varphi}, \Delta_r] + \frac{\hbar^4}{2m}\frac{1}{r^2}[\Delta_{\theta,\varphi}, \Delta_{\theta,\varphi}] \qquad (5)$$

Выясним, чему равны коммутаторы операторов $[\Delta_{\theta,\varphi}, \Delta_r]$ и $[\Delta_{\theta,\varphi}, \Delta_{\theta,\varphi}]$. Операторы $\Delta_{\theta,\varphi}$ и Δ_r содержат операции дифференцирования по различным переменным, поэтому порядок их следования не влияет на результат, значит, операторы $\Delta_{\theta,\varphi}$ и Δ_r коммутируют, поэтому $[\Delta_{\theta,\varphi}, \Delta_r] = 0$. Коммутатор одного и того же оператора равен нулю

$[\Delta_{\theta,\varphi}, \Delta_{\theta,\varphi}] = \Delta_{\theta,\varphi}\Delta_{\theta,\varphi} - \Delta_{\theta,\varphi}\Delta_{\theta,\varphi} = 0$. Поэтому из выражения (5) видно, что коммутатор операторов кинетической энергии и квадрата момента импульса равен нулю $[\hat{L}^2, \hat{E}_k] = 0$. Значит, кинетическая энергия и квадрат момента импульса частицы могут быть измерены одновременно.

Ответ: $[\hat{L}^2, \hat{E}_k] = 0 \Rightarrow$ кинетическая энергия и квадрат момента импульса частицы могут быть измерены одновременно.