Задача № 6.

Условие Брэгга-Вульфа с учётом преломления электронных волн в кристалле имеет вид $2d\sqrt{n_e^2-\cos^2\theta}=k\lambda$, где d - межплоскостное расстояние, n_e - показатель преломления, θ - угол скольжения, k - порядок отражения. Найдите с помощью этого условия внутренний потенциал φ монокристалла серебра, если пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $U=85B$, образует максимум 2-ого порядка при брэгговском отражении от кристаллических плоскостей с $d=0.204нм$ под углом $\theta=30^o$.

Решение:

Показатель преломления для дебройлевской волны электрона равен:

$$n_e=\frac{v_в}{v_c} \qquad (1)$$

где $v_в$, v_c - фазовые скорости дебройлевской волны в вакууме и среде соответственно. Учитывая, что фазовая скорость равна $v_ф=\frac{\omega}{k}$, а $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, где λ - дебройлевская длина волны, получим:

$$n_e=\frac{v_в}{v_c}=\frac{k_c}{k_в}=\frac{\lambda_в}{\lambda_c} \qquad (2)$$

По определению длина волны де Бройля:

$$\lambda_Б=\frac{2\pi\hbar}{p} \qquad (3)$$

где p – импульс электрона.
В вакууме кинетическая энергия электрона была равна $K_1=eU$, его импульс:

$$p_1=\sqrt{2mK_1}=\sqrt{2meU} \qquad (4)$$

Дебройлевская длина волны электрона в вакууме:

$$\lambda_в=\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} \qquad (5)$$

В кристалле энергия электрона увеличится на величину $e\varphi$. На рисунке 1 представлены графики зависимости $\varphi(x)$ и $U(x)=-e\varphi(x)$. Из рисунка справа ясно, что $K_2=K_1+e\varphi=e(U+\varphi)$. Тогда длина волны де Бройля электрона в кристалле:

$$\lambda_c=\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2me(U+\varphi)}} \qquad (6)$$

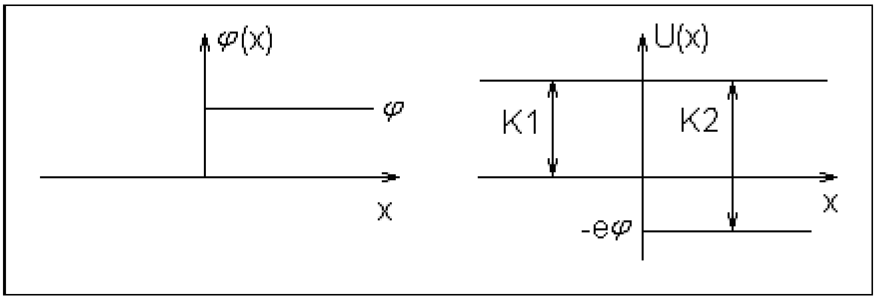

Рисунок 1

Используя (2), найдём показатель преломления:

$$n_e = \frac{\lambda_в}{\lambda_c} = \sqrt{\frac{U+\varphi}{U}} = \sqrt{1+\frac{\varphi}{U}} \qquad (7)$$

Из соотношения (7) определим внутренний потенциал кристалла:

$$\varphi = U(n_e^2 - 1) \qquad (8)$$

Воспользуемся условием Вульфа-Брэггов для того, чтобы определить показатель преломления n_e:

$$2d\sqrt{n_e^2 - \cos^2\theta} = k\lambda \qquad (9)$$

Возведём обе части в квадрат и найдём n_e^2:

$$4d^2(n_e^2 - \cos^2\theta) = k^2\lambda_в^2 = k^2\frac{4\pi^2\hbar^2}{2meU}$$

$$n_e^2 = k^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2meUd^2} + \cos^2\theta \qquad (10)$$

Подставим полученное значение в уравнение (8):

$$\varphi = U\left(k^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2meUd^2} + \cos^2\theta - 1\right) = U\left(k^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2meUd^2} - \sin^2\theta\right) \qquad (11)$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\varphi = 14.9B$$

Ответ:

$$\varphi = U\left(k^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2meUd^2} - \sin^2\theta\right)$$

$\varphi = 14.9B$