Билет 2

1. Стационарные состояния, их временная зависимость. Уравнение Шредингера для стационарных состояний.

$$\psi = c \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Уравнение Шредингера.

1.Уравнение должно быть линейным и однородным, чтобы вып-ся принцип дифракции и интерф. 2)Чтобы вып-ся принцип суперпозиции должно содержать мировые константы 3) Должно решаться для любых квантово-мех. задач.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik_x\psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k_x^2\psi$$

$$\Delta \psi = \nabla^2 \psi = -k^2 \psi = -(p/\hbar)^2 \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi = -i\frac{\varepsilon}{\hbar}\psi, \quad \varepsilon = p^2/2m:$$

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \varepsilon\psi = \frac{p^2}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

– для своб. микрочастицы, Мы будем рассм. потенциальные поля, энергия в ктр.

хар-ся $\frac{p^2}{2m} = E - U$, тогда $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ - Ур-е ШРЕДИНГЕРА. Если силовое поле стационарно, то ф-я *U* не зависит явно от времени и имеет смысл потенц. энергии, тогда $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-i\omega t}$, подставляя в Ур-е Шредингера и сокращая на $e^{-i\omega t}$, получаем *Ур-е для стационарных состояний*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) + U\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Статистич. смысл пси ф-ции.

$$dP = |\psi|^2 \, dV$$

, квадрат модуля пси-ф-ии определяет вероятность dP того, что частица будет обнаружена в пределах объема dV , условии ктр. должна удовлетворять пси-ф-я: непрерывная, конечная, однозначная, производные непрерывны. Вычтем из ур-я Ш.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t)\psi(x.t) = i\hbar\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

комплексно сопряженное ему ур-е

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^2}+U\overline{\psi}=-i\hbar\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}$$

, получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}\right)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t})$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2+\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{i\hbar}{2m}\left(\overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2+div\left(-\frac{i\hbar}{2m}(\overline{\psi}\cdot\nabla\psi-\psi\cdot\nabla\overline{\psi})\right)=0$$

откуда

где выражение в скобках и есть вектор

где выражение в скобках и есть вектор плотности потока вероятности, по аналогии с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$$

.

Принцип суперпозиции. Пусть в состоянии с волновой функцией $\psi_1(\overline{r})$ некоторое измерение приводит с достоверностью к определенному результату 1, а в состоянии с волновой функцией $\psi_2(\overline{r})$ – к результату 2. Тогда всякая линейная комбинация ψ_1 и ψ_2, т.е. всякая

всякая линейная комбинация ψ_1 и ψ_2, т.е. всякая волновая функция вида $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, где $c1$ и $c2$ - постоянные, дает состояние, в котором то же измерение дает либо результат 1, либо результат 2. Вероятности
проявления этих результатов равны c_1^2 и c_2^2 соответственно. Если $\psi_1(\overline{r},t)$ и $\psi_2(\overline{r},t)$ являются решениями уравнения Шредингера, то и любая их лин. комб. $\psi = \sum_n c_n\psi_n$ также является решением уравнения Шредингера.

2. Основные постулаты квантовой механики. Представление физических величин операторами. Собственные функции и собственные значения операторов, их связь с результатами измерений.

Состояние частицы в квантовой механике описывается заданием волновой функции $\psi(x,y,z,t)$, являющейся функцией пространственных координат и времени. **Второй постулат квантовой механики:** каждой физической величине соответствует определенный оператор этой физической величины. **1. Оператор координаты –** умножение на координату. **2. Оператор импульса –** $\bar{p} = -i\hbar\nabla$. **3. Оператор момента импульса –** $L_x = yp_z - zp_y,\ L_y = zp_x - xp_z,\ L_z = xp_y - yp_x$. Для

$L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$, $L_z = xp_y - yp_x$. Для сферических координат:

$L_x = -i\hbar(\sin\varphi(\partial/\partial\theta) + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi(\partial/\partial\varphi))$

$L_y = -i\hbar(\cos\varphi(\partial/\partial\theta) - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi(\partial/\partial\varphi))$,

$L_z = -i\hbar(\partial/\partial\varphi)$.

4. Операторы энергий.

$E_k = p^2/2m_0 = -\hbar^2/2m_0 * \Delta$. $U\psi = U\psi$. **Гамильтониан**

$H = E_k + U = -\hbar^2/2m_0 * \Delta + U$.

Если при действии оператора на некоторую функцию получается та же самая функция, умноженная на число, то есть, если самая функция, умноженная на число, то есть, если $\Phi\psi=f\psi$, то такую функцию называют **собственной функцией** оператора **Ф**, а число *f* его **собственным значением.**

1. Спектр непрерывный. **2.** $-i\hbar\nabla\psi=p_x\psi \Rightarrow \psi=C\exp(ip_x x/\hbar) \Rightarrow$ спектр непрерывный. **3.** $-i\hbar(\partial\psi/\partial\varphi)=L_z\psi \Rightarrow \psi=C\exp(iL_z\varphi/\hbar)$.

Учитывая, $\psi(\varphi+2\pi)=\psi(\varphi) \Rightarrow \exp(iL_z(\varphi+2\pi)/\hbar)=\exp(iL_z\varphi/\hbar) \Rightarrow \exp(iL_z 2\pi/\hbar)=1$

$\Rightarrow L_z 2\pi/\hbar = 2\pi m$, где m=0, ±1, ±2…=> $L_z = m\hbar$, ,
соотвтствует собственным функциям

$$\Psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi)$$

.

$L^2 = \hbar^2 l(l+1)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Задачи о нахождении спектра собственных значений оператора полной энергии **H** связаны с заданием конкретного вида потенциального силового поля, в котором движется частица.

Формула для расчета среднего значения физической величины *f* в квантовом состоянии системы, Формула для расчета среднего значения физической величины f в квантовом состоянии системы, описываемом волновой функцией ψ:

$$\langle f\rangle = \int \Psi^{*}(\hat{F}\Psi)\,dV$$

. Часто эту формулу называют **4-м постулатом** квантовой механики.

Билет 2 (17)

Линейные размеры атома водорода составляют величину 10^{-10} м. Используя соотношение неопр. оцените минимальную кинетич. энергию $E_к$.

Дано:

$L = 10^{-10}$ м

$E_{к\,min}$ - ?

Решение:

$$E_{к\,min} = \frac{p^2_{min}}{2m}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x = \frac{L}{2}$$

$$\Delta p_x = p_{min} = \frac{\hbar}{L}$$

$$\Rightarrow E_{к\,min} = \frac{\hbar^2}{L^2\, 2m} =$$

$$= \frac{(1{,}054 \cdot 10^{-34})^2}{10^{-20} \cdot 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}$$