Министерство путей сообщения Российской федерации

Дальневосточный государственный университет путей сообщения

Кафедра "Строительная механика"

А.В. Хлебородов

РАСЧЕТ ПРОСТЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Методические указания

Хабаровск

2001

Рецензент:

Кандидат технических наук, доцент, заведующий
кафедрой “Строительная механика” Дальневосточного
государственного университета путей сообщения *Л.П. Миронов*

С 603 Хлебородов А.В.
Расчет простых статически неопределимых систем методом сил: Методические указания. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2001. – 30 с.: ил.

Методические указания включают в себя краткое описание метода сил для расчета статически неопределимых систем. Рассмотрен ряд характерных примеров расчета методом сил при одноосном растяжении или сжатии, кручении и изгибе, а также приведен расчет один раз статически неопределимой плоской системы при растяжении и сжатии.

Методические указания предназначены для студентов строительных и механических специальностей всех форм обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основная идея расчета статически неопределимой упругой системы методом сил заключается в переходе к расчету некоторой другой статически определимой "основной" системы, но деформирующейся под нагрузкой точно также, как заданная статически неопределимая система (в смысле тождественности внутренних усилий, деформаций и перемещений). Для этого заданная система преобразуется в статически определимую (основную) систему путем отбрасывания (удаления) так называемых "лишних" связей, число которых равно разности между общим числом опорных связей и числом линейнонезависимых уравнений равновесия, которые можно записать для заданной системы. Усилия в отброшенных связях принимаются за неизвестные метода сил и находятся путем решения системы уравнений. Каждое такое уравнение является уравнением совместности деформаций для основной системы, которое выражает условие эквивалентности работы заданной статически неопределимой системы и основной статически определимой системы под действием приложенной внешней нагрузки и всех неизвестных усилий в отброшенных связях.

После определения неизвестных метода сил строят окончательные эпюры внутренних усилий и выполняют необходимые проверки, позволяющие убедиться в том, что основная система под действием внешней нагрузки и найденных усилий в отброшенных (лишних) связях действительно работает точно также, как заданная статически неопределимая система.

1. Основные понятия

1.1. Вычисление степени статической неопределимости

Расчет статически неопределимых систем методом сил начинают с определения степени статической неопределимости. Степень статической неопределимости любой системы может быть установлена по формуле:

$$n = N - У \tag{1.1}$$

где N – общее число неизвестных реакций, У – число независимых уравнений равновесия, которые возможно составить для данной системы. При одноосном растяжении-сжатии или кручении число У=1 ($\Sigma F_z=0$, $\Sigma m_z=0$). Для плоской задачи при растяжении или сжатии У=2 ($\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$). При расчете систем на изгиб в большинстве случаев У=3.

Пример 1. Число неизвестных реакций для данной системы (рис. 1.1) равно N = 2 (R_1 и R_2), а У=1 ($\Sigma F_z=0$). Степень статической неопределимости равна n = 2-1 = 1.

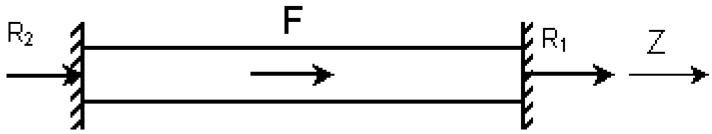


Рис. 1.1.

Пример 2. Общее число неизвестных усилий в стержнях (рис. 1.2) равно N=4, а У=2 (ΣF_x=0, ΣF_y=0). Тогда n=4-2=2.

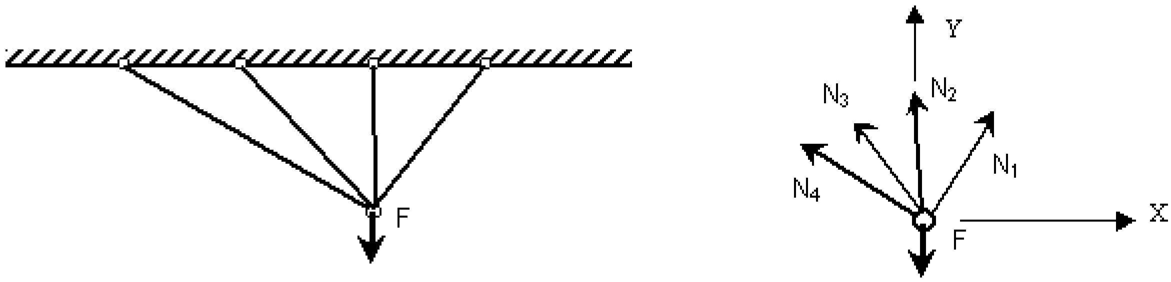


Рис. 1.2.

Пример 3. Число неизвестных реакций для рассматриваемой балки (рис. 1.3) равно N=7. Число независимых уравнений равновесия У=3 (например ΣF_x=0, ΣF_y=0, Σm_A=0). Таким образом, n=7-3=4. Рассматриваемая система четыре раза статически неопределимая.

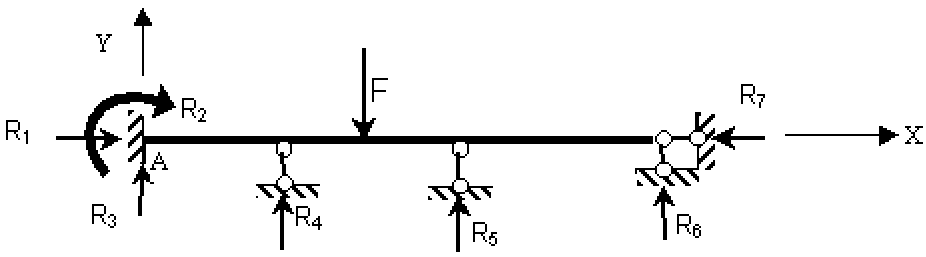


Рис. 1.3.

Пример 4. N = 5, У=3 (ΣF_x=0, ΣF_y=0, Σm_A=0), n=5-3=2. Показанная на рис.1.4 рама имеет степень статической неопределимости равную двум.

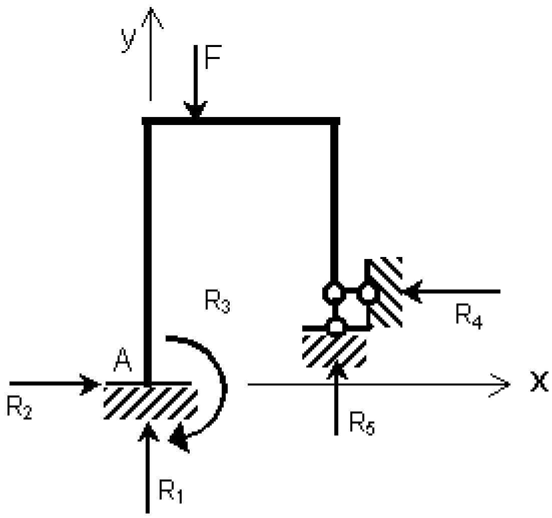


Рис. 1.4.

1.2. Основная система метода сил

Основной системой будем называть геометрически неизменяемую статически определимую систему, полученную из заданной статически неопределимой системы путем устранения лишних связей. Следует отметить, что основная система, нагруженная заданной внешней нагрузкой и лишними неизвестными (т.е. отброшенными реакциями), в отношении внутренних усилий и перемещений эквивалентна заданной статически неопределимой системе. Примеры основных и эквивалентных систем приведены на рис. 1.5–1.8.

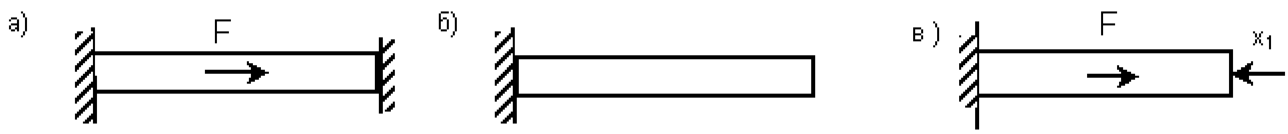


Рис. 1.5. а) заданная система; б) основная система; в) эквивалентная система

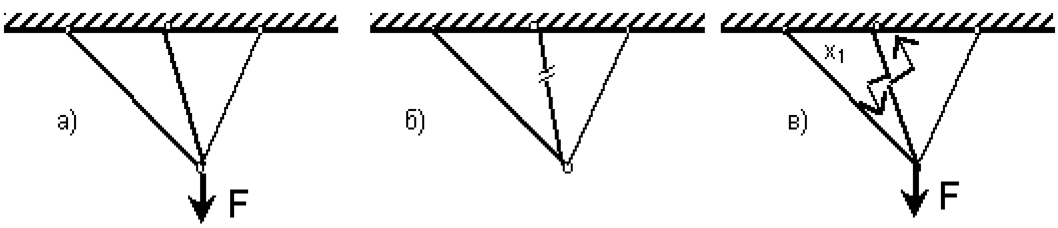


Рис. 1.6. а) заданная система; б) основная система; в) эквивалентная система

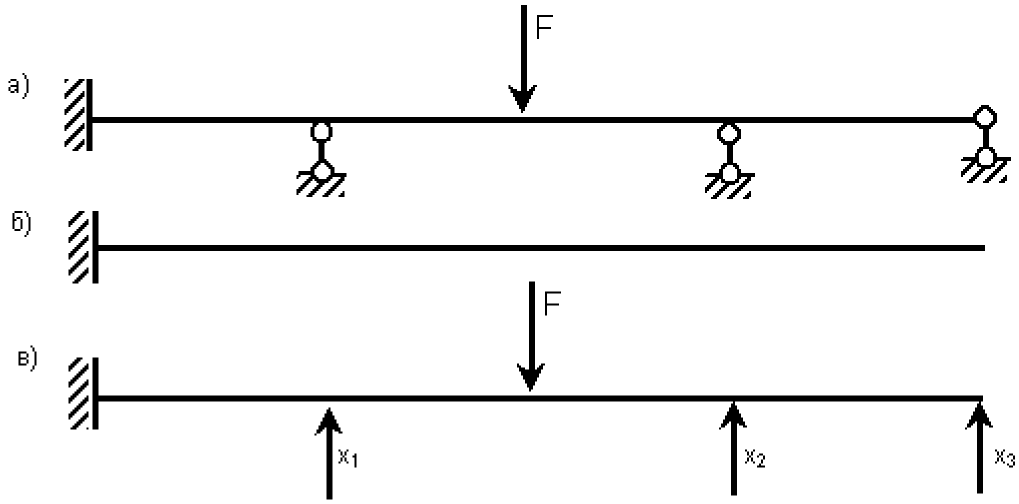


Рис. 1.7. а) заданная система; б) основная система; в) эквивалентная система

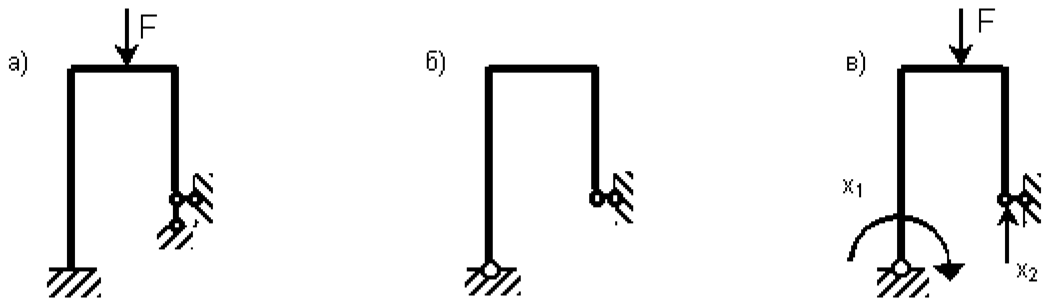


Рис. 1.8. а) заданная система; б) основная система; в) эквивалентная система

1.3. Канонические уравнения метода сил

После выбора основной системы составляют уравнения совместности перемещений, каждое из которых должно выражать условие равенства нулю суммарного перемещения по направлению той или иной отброшенной связи от заданной нагрузки и всех лишних неизвестных. Эти уравнения, написанные в определенной форме, называют каноническими уравнениями. Получим канонические уравнения для системы, показанной на рис. 1.9,а. Степень статической неопределимости равна $n=5-3=2$.

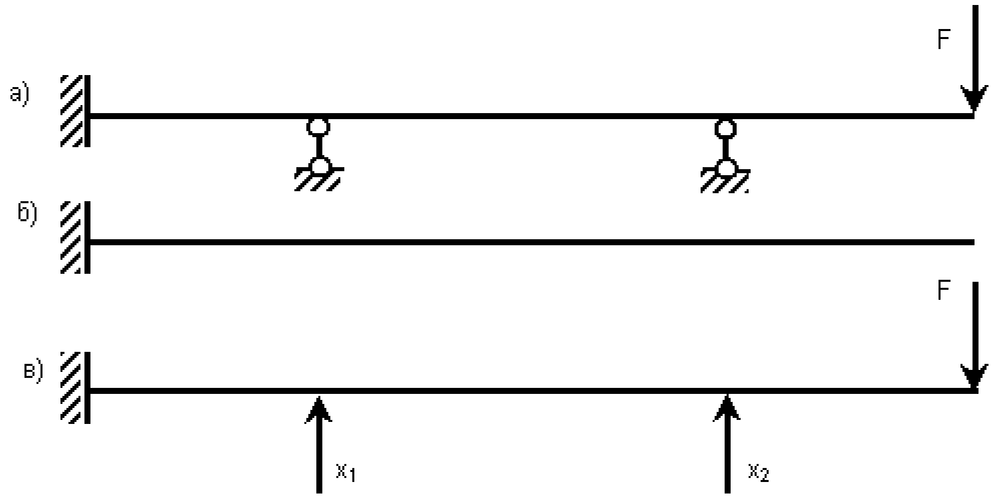


Рис. 1.9. а) заданная система; б) основная система; в) эквивалентная система

Основная и эквивалентная системы показаны на рис.1.9, б, в. Полное перемещение в основной системе по направлению x_1 от лишних неизвестных x_1 и x_2 и внешней нагрузки F обозначим через $_1$, а аналогичное перемещение по направлению силы x_2 обозначим через Δ_2. Приложим к основной системе силу x_1, в результате чего конструкция будет деформироваться. Перемещения по направлению x_1 и x_2 обозначим через Δ_{11} и Δ_{21} (рис. 1.10, а). Далее будем последовательно прикладывать к основной системе силу x_2 и внешнюю нагрузку F, а соответствующие перемещения от этих сил обозначим через Δ_{12}, Δ_{21}, Δ_{10}, Δ_{20} (рис. 1.10, б, в). Перемещения системы по направлениям сил x_1 и x_2, вызванные приложением сил $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, обозначим через $_{11}$, $_{12}$, δ_{21}, δ_{22} (рис. 1.10,г,д). Запишем величины перемещений по направлениям x_1 и x_2 в следующей форме

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \delta_{11}x_1,\\
\Delta_{12} &= \delta_{12}x_2,\\
\Delta_{21} &= \delta_{21}x_1,\\
\Delta_{22} &= \delta_{22}x_2,
\end{aligned}$$

после чего суммарные перемещения по направлениям сил x_1 и x_2 приравняем к нулю, так как в заданной системе эти перемещения действительно равны нулю.

$$\begin{cases}
\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{10} = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{10} = 0,\\
\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{20} = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{20} = 0.
\end{cases}$$

Таким образом, система канонических уравнений для рассматриваемой задачи будет иметь вид

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{10} = 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{20} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

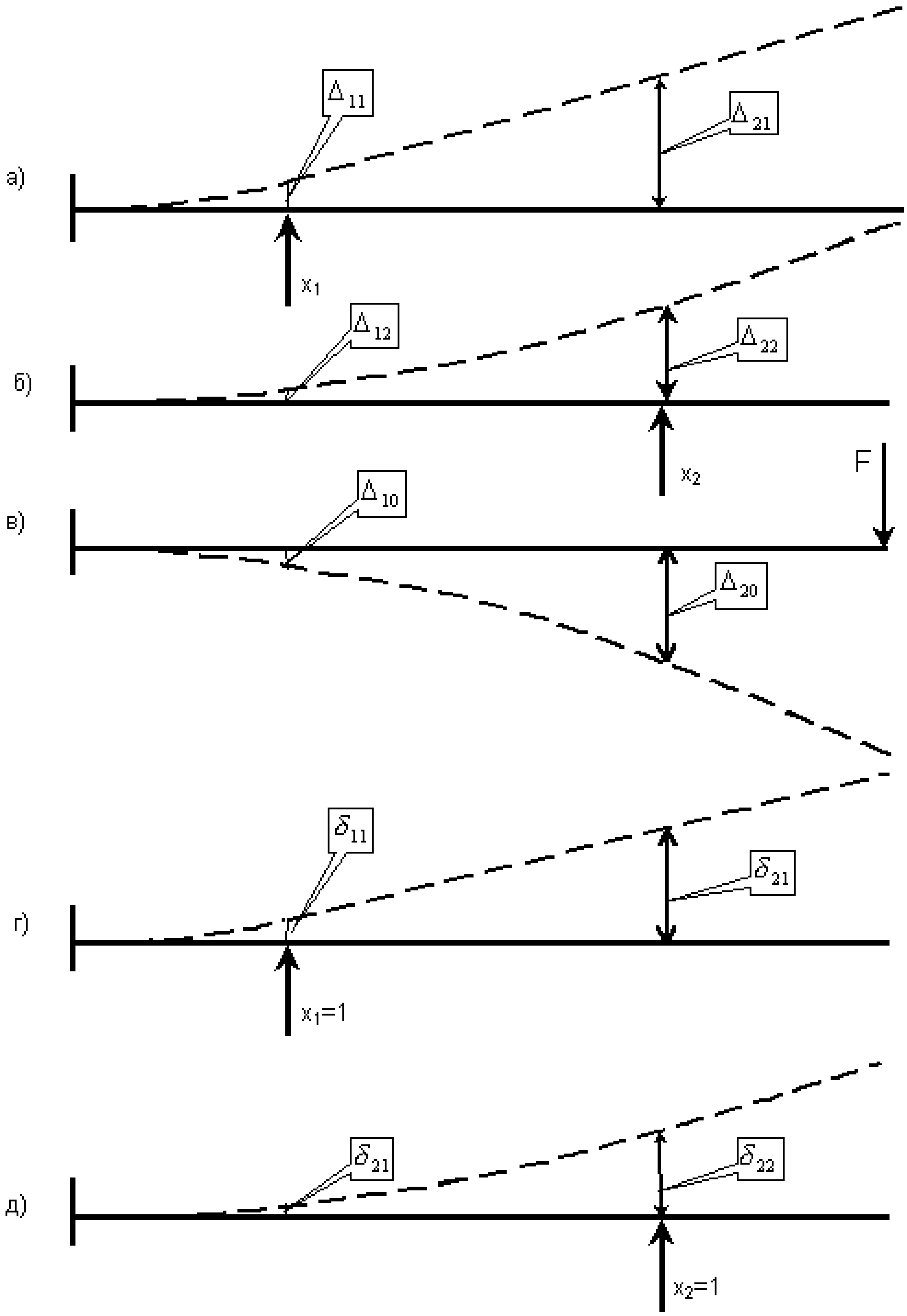


Рис. 1.10. а), б), в), г), д) физический смысл коэффициентов канонических уравнений

1.4. Определение коэффициентов канонических уравнений.

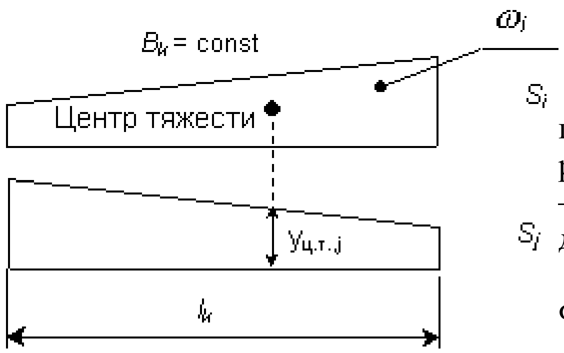
Коэффициенты канонических уравнений, являясь перемещениями, могут быть найдены при помощи формулы Мора

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{k} \int_{l_k} \frac{S_i S_j}{B_k} dl;$$

$$\Delta_{i0} = \sum_{k=1}^{k} \int_{l_k} \frac{S_i S_0}{B_k} dl, \tag{1.3}$$

где S_i, S_j и S_0 – соответственно усилия в основной системе от x_i=1, x_j=1 и внешней нагрузки при соответствующем виде деформации, k – номер участка с непрерывным подинтегральным выражением, B_k – жесткость k-го участка при соответствующем виде деформации. При вычислении коэффициентов δ_{11} и Δ_{10} используются известные формулы Верещагина, трапеции и Симпсона – для перемножения эпюр. Формула Верещагина при перемножении эпюр на k-ом участке имеет вид

$$\int_{l_k} \frac{S_i\, S_j}{B_k} dl = \frac{\omega_i\, y_{ц.т.,j}}{B_k}, \tag{1.4}$$



где ω_i – площадь i-ой эпюры, $y_{ц.т.,j}$ – ордината, расположенная под центром тяжести на j-ой эпюре, B_k – жесткость участка при соответствующем виде деформации (рис. 1.11)

Рис. 1.11.

Формула трапеции имеет вид

$$\int_{l_k} \frac{S_i\, S_j}{B_k} dl = \frac{l_k}{6B_k}(2ab + 2cd + ac + bd), \tag{1.5}$$

где l_k – длина k-го участка, a,b,c,d – ординаты соответствующих эпюр (рис. 1.12)

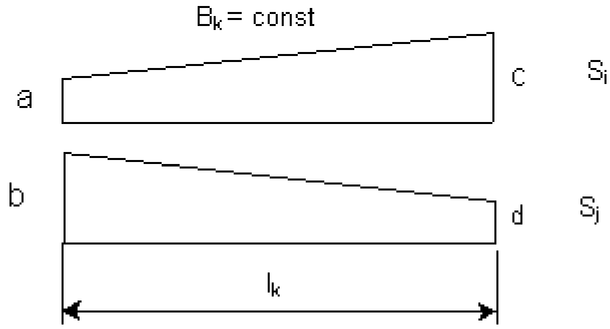


Рис. 1.12.

Формула Симпсона имеет вид

$$\int_{l_k} \frac{S_i\, S_j}{B_k} dl = \frac{l_k}{6B_k}(ab + 4mn + cd), \qquad (1.6)$$

где a,b,c,d,m,n – ординаты соответствующих эпюр (рис 1.13).

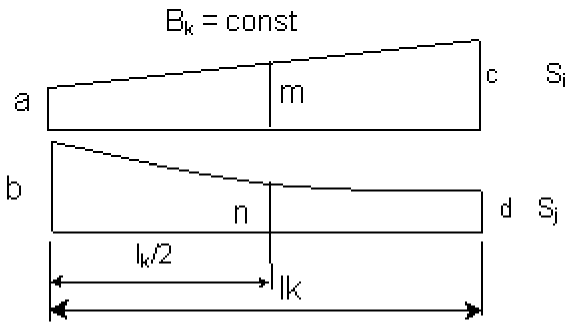


Рис. 1.13.

Правильность решения системы канонических уравнений вручную контролируется путем подстановки найденных значений неизвестных в каждое уравнение.

1.5. Определение расчетных усилий

После определения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ расчетные усилия подсчитываются по формуле

$$S_p = S_0 + \bar{S}_1 x_1 + \bar{S}_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + \bar{S}_n x_n\,. \qquad (1.7)$$

1.6. Деформационная проверка

Деформационная проверка заключается в определении перемещений, которые заведомо равны нулю. Такими перемещениями являются перемещения по направлению лишних неизвестных. Для выполнения деформационной проверки достаточно воспользоваться следующей формулой

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{l_k} \frac{S_p \, \overline{S}_{\Sigma}}{B_k} dl = 0, \tag{1.8}$$

где $\overline{S}_{\Sigma}$ – суммарные усилия от $x_1 \ldots x_n$ в любой основной системе метода сил. Если деформационная проверка не выполняется, т.е. результат перемножения эп. S_p на эпюру, построенную от суммарного действия всех лишних неизвестных равных единице, тождественно не равен нулю, тогда основная система работает не эквивалентно заданной, и необходимо искать ошибку (в вычислении коэффициентов, в решении системы канонических уравнений, в определении расчетных усилий или же, наконец, в выполнении самой деформационной проверки).

После того как деформационная проверка будет выполнена, при соответствующих видах деформации (например, при поперечном изгибе в балках или рамах), строят эпюры поперечных и продольных сил, которые в свою очередь контролируют при помощи уравнений равновесия.

Величины поперечных сил на участке определяются по формуле

$$Q_{лев,прав} = \pm \frac{ql}{2} + tq\alpha, \tag{1.9}$$

где – для левой ординаты перед первым слагаемым в этой формуле знак плюс, а для правой ординаты знак минус; α – угол, образованный линией, соединяющей две крайние ординаты эпюры изгибающих элементов на участке, длина которого равна L, причем $\alpha > 0$ в том случае, если ось эпюры изгибающих моментов до совмещения ее с указанной линией следует повернуть по ходу стрелки часов (рис. 1.14). Величина продольных сил (для рам) определяется из условия равновесия жестких узлов конструкции.

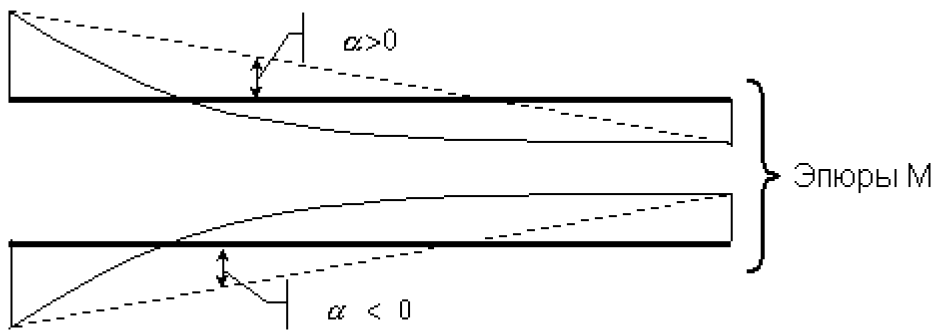


Рис. 1.14.

2. Примеры расчета

Пример 1. Расчет статически неопределимой системы при одноосном растяжении и сжатии. В примере рассматривается ступенчатый стержень, закрепленный по концам при помощи жестких заделок и загруженный сосредоточенной силой F = 5 кН. Жесткости участков при растяжении-сжатии соответственно равны ЕА, 3ЕА. Требуется построить эпюру продольных сил, выполнить необходимые проверки и определить горизонтальное перемещение сечения "к-к" (рис. 2.1, а).

Степень статической неопределимости подсчитаем по формуле (1.1). Неизвестными для данной конструкции являются реакции, возникающие в левой и правой жестких заделках $R_{1.}$, $R_{2.}$ (см. рис. 1.1). Поэтому общее число неизвестных равно N = 2, тогда n = N-У = 2-1 =1.

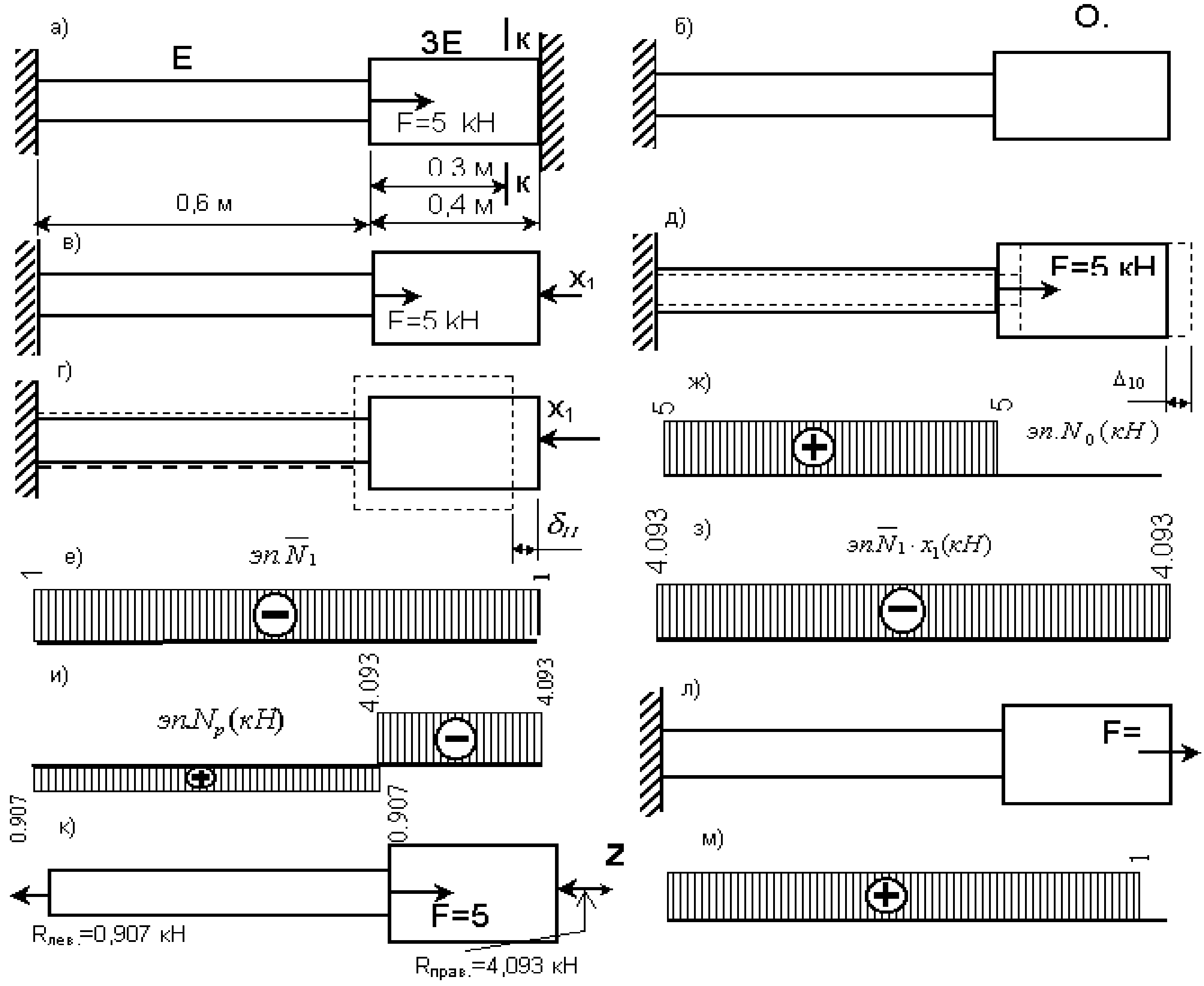


Рис. 2.1. а) заданная система; б) основная система; в) эквивалентная система; г, д) физический смысл коэффициентов канонического уравнения; е) единичная эпюра продольных сил; ж) грузовая эпюра продольных сил; з) единичная эпюра продольных сил, умноженная на x_1; и) расчетная эпюра продольных сил; к) заданная система с приложенной к ней внешней нагрузкой и опорными реакциями; л) основная система с приложенной к ней единичной силой; м) эпюра продольных сил от F=1

Таким образом, данная система имеет одно лишнее неизвестное, в связи с чем при выборе основной системы необходимо удалить одну из опорных связей.

Основную систему назначим путем удаления правой жесткой заделки (рис. 2.1, б).

Используя (1.2) и учитывая, что n = 1, запишем каноническое уравнение

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{10} = 0 , \tag{2.1}$$

где δ_{11} и Δ_{10} – перемещения в основной системе вдоль оси Z правого торцевого сечения соответственно от силы x_1=1 и внешней нагрузки (рис. 2.1, г, д).

Используя метод сечений построим эпюры продольных сил в основной системе отдельно от силы x_1=1 (эп. $\overline{N}_1$) и внешней нагрузки (эп. N_0) (рис. 2.1, е, ж).

Для определения коэффициентов канонического уравнения используется формула Верещагина для перемножения эпюр

$$\delta_{11} = \text{эп}\overline{N}_1\ \text{эп.}\overline{N}_1 = \frac{1\cdot 0{,}6\cdot 1}{EA} + \frac{1\cdot 0{,}4\cdot 1}{3EA} = \frac{0{,}733}{EA},$$

$$\Delta_{10} = \text{эп}\overline{N}_1\ \text{эп.}N_0 = -\frac{1\cdot 0{,}6\cdot 5}{EA} = -\frac{3}{EA}.$$

Решим каноническое уравнение

$$\frac{0{,}733}{EA}x_1 - \frac{3}{EA} = 0,\quad x_1 = 0{,}493\ \text{кН}.$$

Расчетную эпюру продольных сил (см. рис. 2.1, и) можно построить, умножив все характерные ординаты единичной эпюры на величину силы x_1, сложив, полученную при этом эпюру (см. рис. 2.1, з) с "грузовой" эпюрой N_0

$$\text{эп.}N_p = \text{эп.}N_0 + \text{эп}\overline{N}_1 \cdot x_1.$$

Определим перемещение правого концевого сечения стержня в основной системе, к которому приложена отброшенная реакция $R_{прав.}$, для чего, перемножим расчетную эпюру (эп. N_p) и единичную эпюру (эп. $\overline{N}_1$).

$$\text{эп.}N_p \cdot \text{эп}\overline{N}_1 = \frac{1\cdot 0{,}4\cdot 4{,}093}{3EA} - \frac{1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}907}{EA} = \frac{0{,}546}{EA} - \frac{0{,}544}{EA} \cong 0.$$

Вычислим относительную погрешность

$$t = \frac{0{,}546 - 0{,}544}{0{,}546} 100\,\% = 0{,}4\ \%$$.

Полученная при этом относительная погрешность t не превосходит допускаемой величины [t]=1 %, поэтому можно считать, что деформационная проверка выполняется.

Удалим опорные связи (левую и правую заделки), а их действие по отношению к рассматриваемой системе заменим опорными реакциями, возникающими в них. Причем реакцию, возникающую в левой заделке, определим как "скачок" на эпюре N_p, учитывая при этом ее знак на участке, который примыкает к этой опоре (если плюс, следовательно, реакция должна вызывать деформацию растяжения на этом участке). Направление правой реакции определяется знаком x_1, полученным при решении канонического уравнения (если плюс – направление правой реакции совпадает с направлением x_1, если минус, тогда направление реакции следует поменять на противоположное), либо воспользоваться эпюрой N_p (рис. 2.1, к). Записав уравнение равновесия (как сумму проекций на ось Z) и убедившись, что это уравнение тождественно равно нулю, можно сделать вывод, что статическая проверка выполняется

$$\sum Z = R_{лев.} + F - R_{прав.} = -0{,}907 + 5 - 4{,}093 = 0,\ 0 \equiv 0.$$

Для определения перемещения приложим в основной системе в сечение "к-к" слева направо единичную силу F=1 (рис. 2.1, л), предполагая тем самым, что сечение "к-к" переместится вправо, и построим от ее действия эпюру эп. $\overline{N}$ рис. 2.1, м), после чего умножим расчетную эпюру эп. N_p на эп. $\overline{N}$

$$\Delta_{k-k,гор.} = эп.N_p \cdot эп.\overline{N}_\Delta = \frac{0{,}3 \cdot 1 \cdot 4{,}093}{3EA} + \frac{1 \cdot 0{,}907 \cdot 0{,}6}{EA} = \frac{0{,}135}{EA}.$$

Результат перемножения эпюр оказался положительным, следовательно, сечение перемещается вправо.

Пример 2. Расчет статически неопределимой системы при кручении. В задаче рассматривается ступенчатый вал, закрепленный с двух сторон жесткими заделками и загруженный сосредоточенным скручивающим моментом m = 3 kН м. Жесткости при кручении для участков равны $2GI_\rho$ и GI_ρ. Требуется построить эпюру скручивающих моментов, выполнить необходимые проверки и определить угол закручивания сечения "к-к" (рис. 2.2, а).

Степень статической неопределимости подсчитаем по формуле (1.1). Неизвестными в данной задаче являются реактивные скручивающие моменты, возникающие в левой и правой опорных связях. В связи с этим общее число неизвестных равно N = 2, тогда n = 2-1 = 1.

Поскольку рассматриваемая система имеет одну лишнюю связь, то при выборе основной системы необходимо удалить левую или правую жесткую заделку. Получим основную систему путем удаления правой жесткой заделки (рис. 2.2, б).

На основании (1.3) и учитывая, что n=*1*, каноническое уравнение будет иметь вид

$$\delta_{11} x_1 + \Delta_{10} = 0. \qquad (2.2)$$

где δ_{11} и Δ_{10} – углы закручивания правого торцевого сечения соответственно от скручивающих моментов $x_1 = 1$ и m = 3 кН м.

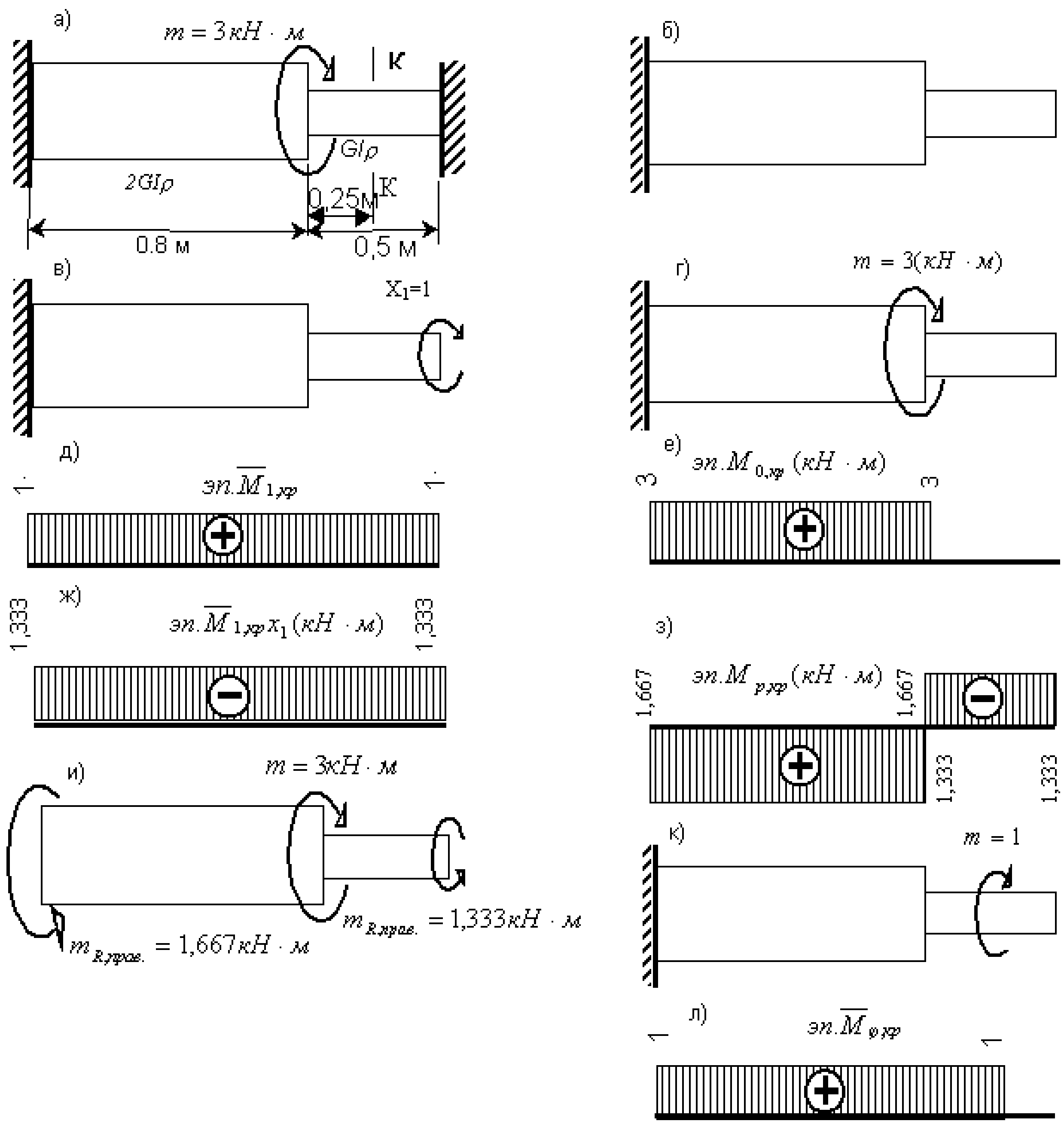


Рис. 2.2. а) заданная система; б) основная система; в) основная система, с приложенным к ней лишним неизвестным $x_1 = 1$; г) основная система, с приложенной к ней внешней нагрузкой; д) единичная эпюра крутящих моментов от $x_1 = 1$; е) грузовая эпюра крутящих моментов; ж) единичная эпюра крутящих моментов, умноженная на величину x_1; з) расчетная эпюра крутящих моментов; и) заданная система с приложенной к ней внешней нагрузкой и опорными скручивающими моментами; к) основная система с приложенным к ней единичным скручивающим моментом m = 1; л) единичная эпюра скручивающих моментов от m = 1

Единичная и грузовая эпюры, построенные в основной системе отдельно от скручивающих моментов x_1=1 (эп. $\overline{M}_{1,кр.}$) и m=3 кн м (эп. M_0), показаны на рис. 2.2, д,е. При этом использовалось общепринятое правило знаков для построения эпюр скручивающих моментов.

Поскольку единичная и грузовая эпюры прямоугольные, тогда для определения коэффициентов δ_{11} и Δ_{10} удобнее всего использовать формулу Верещагина для перемножения эпюр

$$\delta_{11} = эп.\overline{M}_{1,кр}\, эп.\overline{M}_{1,кр} = \frac{0,5\cdot 1\cdot 1}{GI_p} + \frac{0,8\cdot 1\cdot 1}{2GI_p} = \frac{0,9}{GI_p},$$

$$\Delta_{10} = эп.\overline{M}_{1,кр}\, эп.M_{0,кр} = \frac{0,8\cdot 1\cdot 3}{2GI_p} = \frac{1,2}{GI_p}.$$

Решим каноническое уравнение

$$\frac{0,9}{GI_p}x_1 + \frac{1,2}{GI_p} = 0, \quad x_1 = -\frac{1,2}{0,9} = -1,333\ кНм.$$

Знак минус в решении канонического уравнения означает, что x_1 направлен в противоположную сторону.

Умножив все характерные ординаты единичной эпюры (эп.` $M_{1,кр.}$) на величину момента x_1 и сложив, полученную при этом эпюру (рис. 2.2, ж) с грузовой эпюрой (эп. $M_{0,кр}$), получим расчетную эпюру скручивающих моментов эп. $M_{p,кр.}$ (рис. 2.2, з)

$$эп.M_{p,кр} = эп.M_0 + эп.\overline{M}_{1,кр}x_1.$$

Определим угол закручивания в заданной системе правого крайнего торцевого сечения, для чего перемножим расчетную и единичную эпюры скручивающих моментов. В результате перемножения получим

$$эп.\overline{M}_{1,кр}\, эп.M_{p,кр} = -\frac{0,5\cdot 1\cdot 1,333}{GI_p} + \frac{0,8\cdot 1\cdot 1,667}{2GI_p} = -\frac{0,667}{GI_p} + \frac{0,667}{GI_p} = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Следовательно, деформационная проверка выполняется.

Отбросим левую и правую опорные заделки, а их действие заменим опорными реактивными моментами. Опорный реактивный момент в правой заделке равен величине X_1 и имеет такое же направление, что и X_1. Величину опорного момента в левой заделке можно определить по величине “скачка” на эп. $M_{p,кр}$, а его направление определяет знак на этой эпюре. Таким образом, $m_{R,лев}$ должен быть направлен по ходу стрелки часов, если смотреть на систему с острия оси Z (со стороны внешней нормали, рис. 2.2, и). Запишем уравнение равновесия как сумму моментов относительно продольной оси "Z"

$$\sum m_Z = -m_{R,лев.} - m_{R,прав.} + m = -1{,}667 - 1{,}333 + 3 = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Так как уравнение равновесия тождественно равно нулю, статическая проверка выполняется.

Для определения угла закручивания приложим в основной системе в сечение "к-к" скручивающий момент $m_{кр}$=1 (рис. 2.2, к) и от его действия построим единичную эпюру скручивающих моментов эп.` Mf $_{,кр}$ (рис. 2.2, л). После этого умножим эп.$M_{р,кр}$ на эп.` Mf $_{,кр}$, в результате чего получим

$$\varphi_{к-к} = эп.\,M_{р,кр}\,эп.\,\overline{M}_{\varphi,кр} = -\frac{0{,}25\cdot 1\cdot 1{,}333}{GI_р} + \frac{0{,}8\cdot 1\cdot 1{,}667}{2GI_р} = \frac{0{,}334}{GI_р}.$$

Знак плюс, полученный в результате вычислений, указывает на то, что сечение "к-к" при взгляде на него со стороны внешней нормали поворачивается против хода стрелки часов.

Пример 3. Расчет статически неопределимой системы при растяжении-сжатии. В задаче рассматривается абсолютно жесткий брус, прикрепленный к земле при помощи шарнирно-неподвижной опоры и двух прикрепляющих стержней (тяг), загруженный равномерно распределенной нагрузкой. Жесткости стержней соответственно равны 3ЕА и ЕА. Требуется построить эпюру продольных сил, выполнить необходимые проверки и определить вертикальное перемещение сечения "к" (рис. 2.3, а).

Как и ранее степень статической неопределимости подсчитаем по формуле (1.1). Неизвестными в данной задаче являются вертикальная и горизонтальная составляющие реакций (H_A и R_A), возникающие в шарнирно-неподвижной опоре, а также продольные усилия, возникающие в прикрепляющих тягах. Следовательно, N = 4, тогда n = N-3 = 4-3 = 1.

При выборе основной системы разрежем один из прикрепляющих стержней (например, стержень 1, рис. 2.3, б). Эквивалентная система показана на рис. 2.3, в.

Каноническое уравнение для рассматриваемой задачи будет иметь вид

$$эп.M_р\ (кН\ /\ м)$$

где d $_{11}$ и D $_{10}$ – взаимное смещение точек "с" и "д" в основной системе соответственно от x_1=1 и внешней нагрузки (рис. 2.4, а,б).

Единичная и грузовая эпюры продольных сил показаны на рис. 2.4,в и рис. 2.5,а. При построении эпюр использовались общепринятые правила знаков для построения эпюр продольных сил.

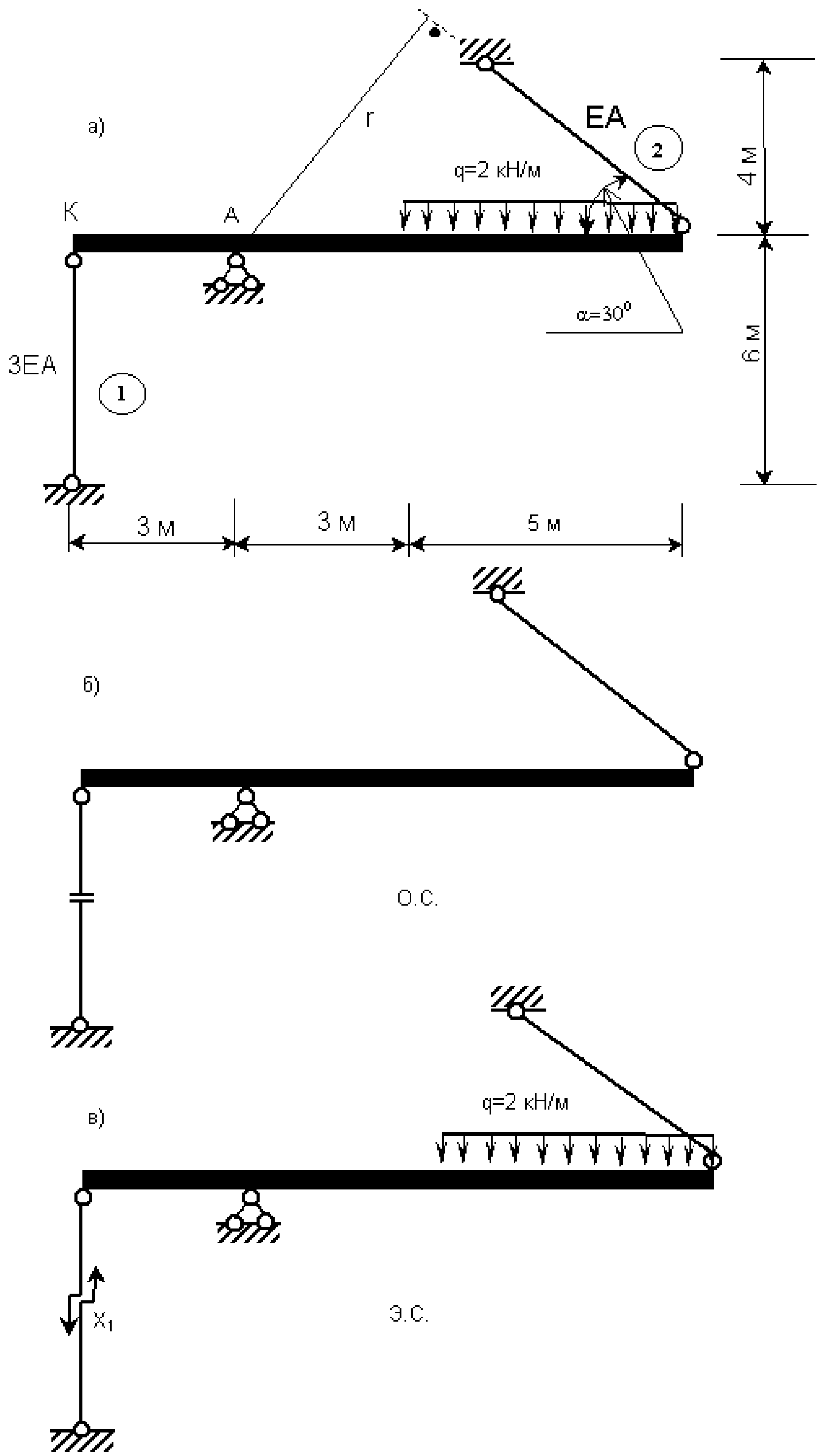


Рис. 2.3. а) заданная система; б) основная система; в) эквивалентная система

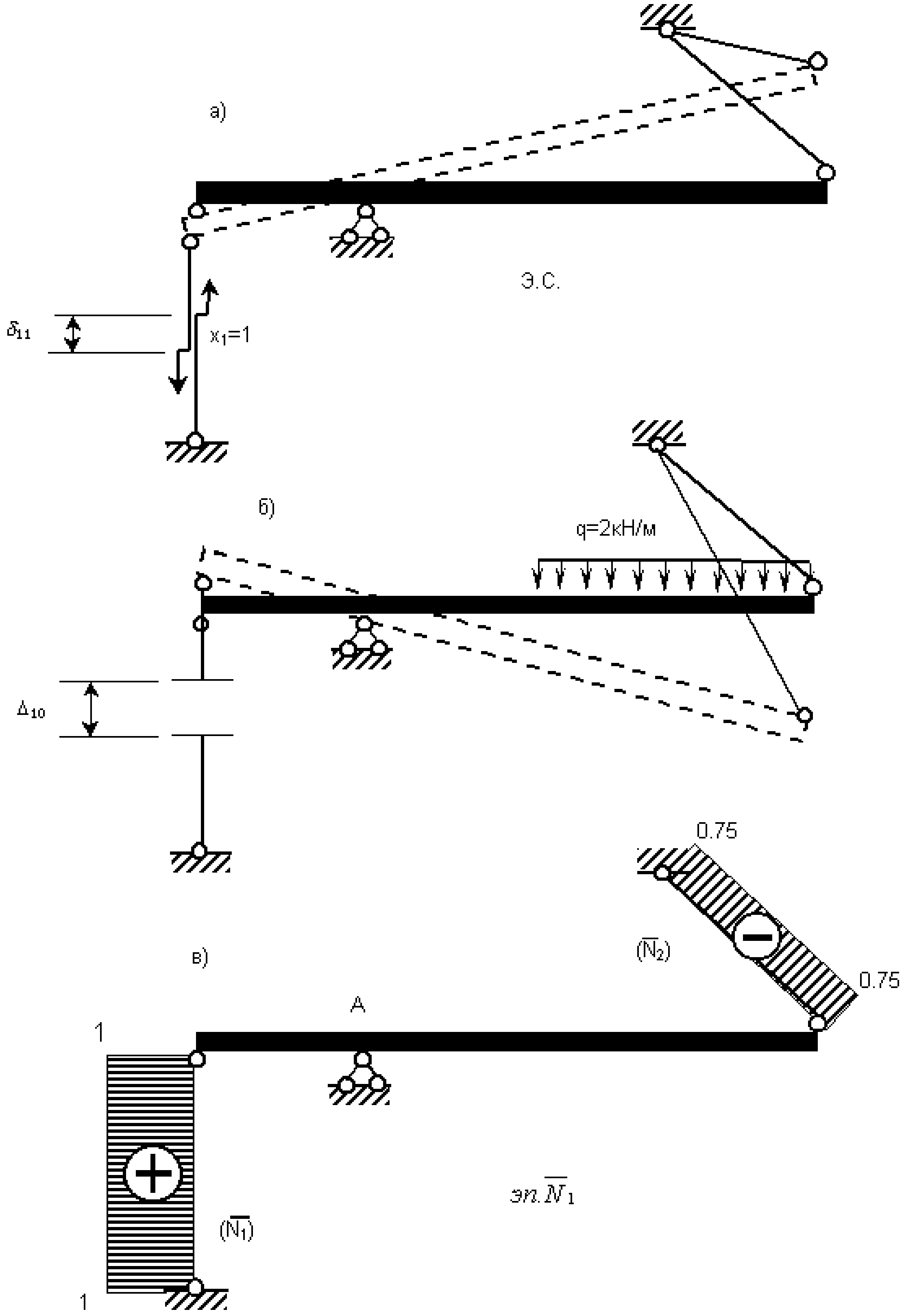


Рис. 2.4. а), б) физический смысл коэффициентов канонического уравнения; в) эпюра, построенная от $x_1 = 1$

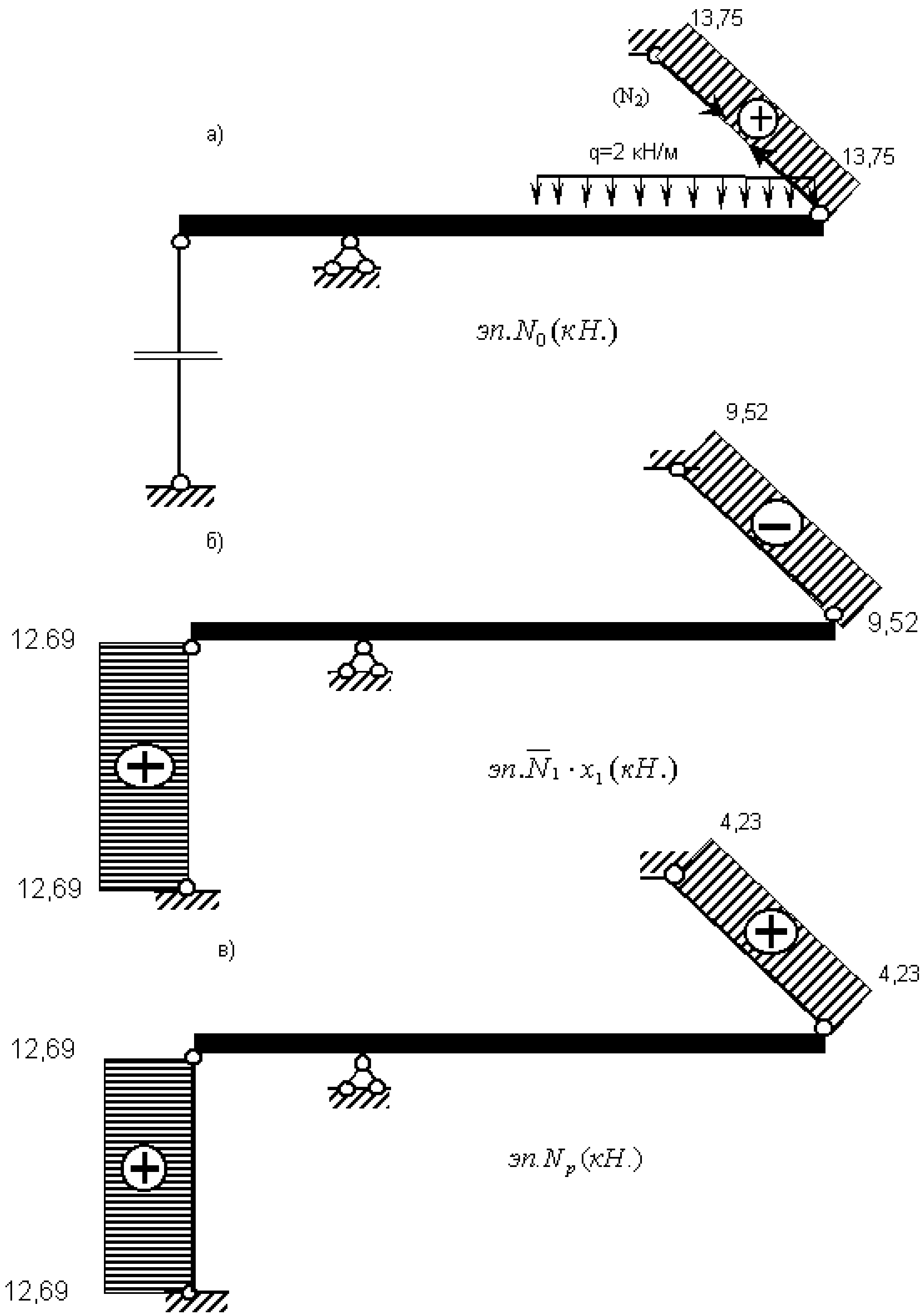


Рис. 2.5. а) грузовая эпюра (эпюра, построенная в О.С. от внешней нагрузки; б) единичная эпюра продольных сил, умноженная на x_1=12,69 кН; в) расчетная эпюра продольных сил

Поскольку единичная и грузовая эпюры прямоугольные, для определения коэффициентов d $_{11}$ и D $_{10}$ удобнее всего использовать формулу Верещагина для перемножения эпюр

$$\delta_{11} = эп.\bar{N}_1 \cdot эп.\bar{N}_1 = \frac{6\cdot1\cdot1}{3EA} + \frac{(-0{,}75)\cdot4\cdot(-0{,}75)}{0{,}5EA} = \frac{2}{EA} + \frac{4{,}5}{EA} = \frac{6{,}5}{EA},$$

$$\Delta_{10} = эп.\bar{N}_1 \cdot эп.N_0 = \frac{(-0{,}75)\cdot4\cdot13{,}75}{0{,}5EA} = -\frac{82{,}5}{EA}.$$

Решим каноническое уравнение

$$\frac{6{,}5}{EA}\cdot x_1 - \frac{82{,}5}{EA} = 0, \qquad x_1 = 12{,}69\ Кн.$$

Знак плюс в решении канонического уравнения означает, что в стержне под номером один в заданной системе возникает растягивающее усилие.

Умножив все характерные ординаты единичной эпюры (эп.` $N_1$) на величину усилия $x_1$ (рис. 2.5,б), и сложив, полученную при этом эпюру эп.` $N_1\, x_1$ с эпюрой N_0, получим расчетную эпюру продольных сил эп. N_p (рис. 2.5, в)

$$эп.N_p = эп.N_0 + эп.\bar{N}_1 \cdot x_1.$$

Перемножим эп.` N_1 и эп. N_p

$$эп.\bar{N}_1 \cdot эп.N_p = -\frac{1\cdot6\cdot12{,}69}{3EA} + \frac{(-0{,}75)\cdot4\cdot4{,}23}{0{,}5EA} = \frac{25{,}38}{EA} - \frac{25{,}38}{EA} = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Деформационная проверка выполняется.

Разрежем стержени 1 и 2, а усилия, возникающие в них приложим в виде внешних сил к обьекту равновесия, показанному на рис. 2.6,а. При этом необходимо учитывать, что усилия в стержнях 1 и 2 растягивающие. Запишем уравнение моментов относительно точки "А".

$$\sum m_A = -12{,}69\cdot3 + 2\cdot5\cdot5{,}5 - 4{,}23\cdot8\cdot0{,}5 = -38{,}07 + 55 - 16{,}93$$
$$= -55 + 55 = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Статическая проверка выполняется.

Для определения вертикального перемещения сечения "К" приложим в основной системе в это сечение вертикальную силу F=1. От ее действия определим усилие в стержне 2, для чего запишем уравнение моментов относительно точки "А"

$$\sum m_A = -\bar{N}_2 \cdot 8 \cdot 0{,}5 - 3 \cdot F = 0, \quad \bar{N}_2 = -0{,}75.$$

По полученным данным построим эпюру` N (рис. 2.6, б). Из эпюры видно, что усилие в стержне под номером один равно нулю. Перемножим эпюры` N и эпюру N_p

$$\Delta_{к,верт.} = эп.\bar{N}_\Delta \cdot эп.N_p = \frac{(-0{,}75) \cdot 4 \cdot 4{,}23}{0{,}5EA} = -\frac{25{,}38}{EA}.$$

Результат перемножения эпюр оказался отрицательным, следовательно, сечение "*к*" перемещается вверх.

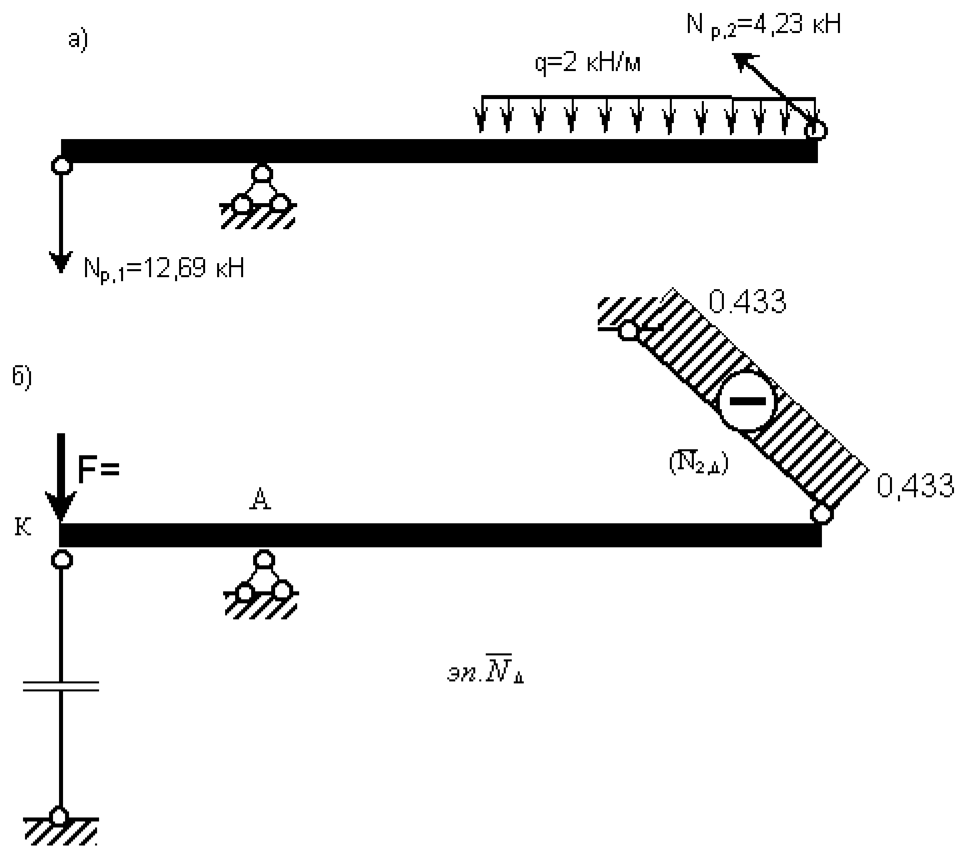


Рис. 2.6. а) заданная система, с приложенными к ней найденными усилиями в стержнях и внешней нагрузкой; б) единичная эпюра от F=1

Пример 4. Расчет статически неопределимой балки методом сил. В задаче рассматривается статически неопределимая балка, для которой необходимо построить эпюру изгибающих моментов и эпюру поперечных сил, выполнить необходимые проверки, определить вертикальное перемещение и угол поворота сечения "к", расположенного посередине второго пролета балки (рис. 2.7, а).

Неизвестными в данной задаче являются опорные реакции На, Rа, Rв, Rс (рис. 2.7, а). Следовательно, общее число неизвестных равно N=4. Тогда степень статической неопределимости равна n=N-У=4-3=1.

Основная система может быть получена двумя путями.

Первый сводится к удалению одной из линейных вертикальных опор в сечениях "А" или "В" (рис. 2.7, б, эквивалентная система показана на рис. 2.7, в).

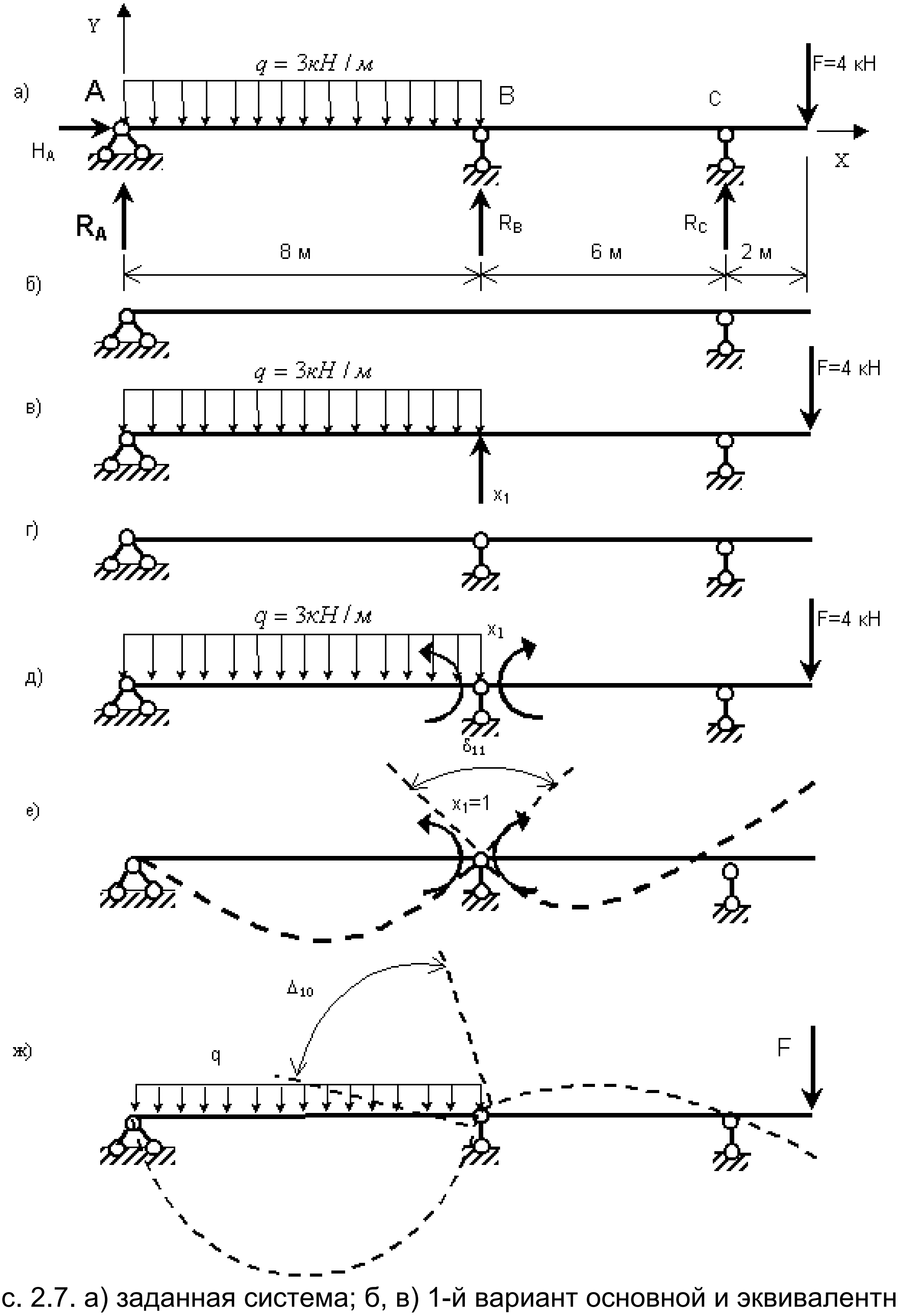


Рис. 2.7. а) заданная система; б, в) 1-й вариант основной и эквивалентной систем; г, д) 2-й вариант основной и эквивалентной систем; е, ж) физический смысл коэффициентов канонического уравнения

Второй сводится к врезанию шарнира в сечение, где установлена опора "В" (рис. 2.7, г, эквивалентная система показана на рис. 2.7, д). При этом для обоих вариантов основных систем, требования предъявляемые к ним, должны выполняться.

Второй вариант основной системы считается более предпочтительным, так как вся система распадается на две независимо работающие друг от друга балки, загружение которых лишними неизвестными и внешней нагрузкой является более простым.

Каноническое уравнение имеет вид

$$\delta_{11} \cdot x_1 + \Delta_{10} = 0.$$

Для первого варианта основной системы каноническое уравнение отрицает линейное вертикальное перемещение по направлению реакции $R_в$ в основной системе от действия x_1 и внешней нагрузки, причем x_1 является опорной реакцией $R_в$. Для второго варианта основной системы каноническое уравнение отрицает взаимный угол поворота в основной системе двух торцевых сечений, примыкающих к опоре "В" от x_1 и внешней нагрузки, а x_1 является изгибающим моментом, возникающим в сечении на опоре "В". Коэффициенты d $_{11}$, D $_{10}$ – соответственно взаимный угол поворота двух торцевых сечений в основной системе, примыкающих к опоре "В" от x_1=1 и внешней нагрузки (рис. 2.7, е,ж).

Единичная и грузовая эпюры изгибающих моментов показаны соответственно на рис. 2.8, а, б. При построении эпюр использовались общепринятые правила знаков для построения эпюр изгибающих моментов в балках.

Для определения коэффициента d $_{11}$ воспользуемся формулой трапеции

$$эп.\overline{M}_1 \cdot эп.\overline{M}_1 = \frac{8}{6EI}(2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{8}{6EI}(2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{4{,}67}{EI},$$

а для определения D $_{10}$ применим формулу Симпсона для перемножения эпюр

$$\Delta_{10} = эп.\overline{M}_1 \cdot эп.M_0 = \frac{8}{6EI}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 24 + 1 \cdot 0) - \frac{6}{6EI}(2 \cdot 1\ 0 + 2 \cdot 8 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 8) =$$
$$= \frac{64}{EI} - \frac{8}{EI} = \frac{56}{EI}.$$

Решим каноническое уравнение

$$\frac{4{,}67}{EI}\cdot x_1+\frac{56}{EI}=0,\quad x_1=-12\ кН\cdot м.$$

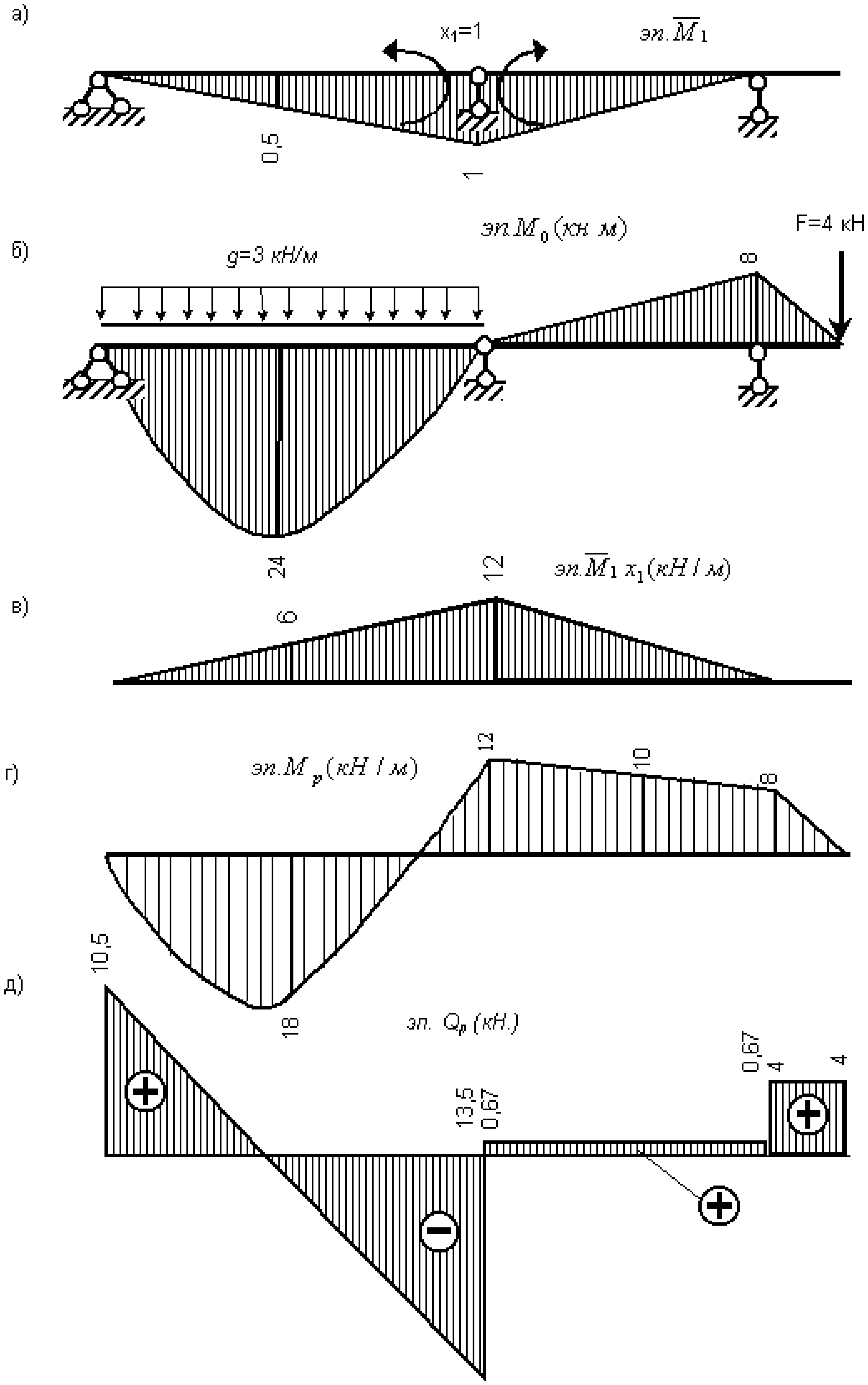


Рис. 2.8. а) эпюра изгибающих моментов, построенная от момента x_1=1;
б) эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе от внешней

нагрузки (грузовая эпюра); в) единичная эпюра изгибающих моментов, умноженная на величину x_1; г) расчетная эпюра изгибающих моментов; д) расчетная эпюра поперечных сил

Знак минус для x_1 означает, что для рассматриваемой системы в поперечном сечении, расположенном на опоре "В", растянуты верхние волокна.

Умножив все характерные ординаты единичной эпюры (эп.\` $M_1$) на величину усилия $x_1$, и сложив, полученную при этом эпюру (эп.\` $M_1 x_1$, рис. 2.8, в) с грузовой эпюрой M_0, получим расчетную эпюру изгибающих моментов эп. M_p (рис. 2.8, г).

Используя формулы для перемножения эпюр, перемножим эпюры эп.\` M_1 и эп. M_p

$$\text{эп.}\overline{M}_1 \cdot \text{эп}M_p = \frac{8}{EI}(0 \cdot 0 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 18 + 12 \cdot 1) - \frac{6}{6EI}(2 \cdot 1 \cdot 12 + 2 \cdot 0{,}8 + 8 \cdot 1 + 12 \cdot 1) =$$
$$= \frac{32}{EI} - \frac{32}{EI} = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

На основе полученного результата можно сделать вывод, что деформационная проверка выполняется.

Для построения расчетной эпюры поперечных сил воспользуемся уже построенной эпюрой M_p и формулой (1.9). Определим поперечную силу в пролете балки, длина которого равна 8 м.

$$Q_{\text{лев,прав}} = \pm\frac{3 \cdot 8}{2} - \frac{12 - 0}{8} = \pm 12 - 1{,}5.$$

Знак минус для второго слагаемого обусловлен тем, что ось эпюры изгибающих моментов на эп. M_p до совмещения ее с линией, соединяющей левую ординату, равную нулю и правую ординату, равную 12 кН м, на этом участке следует повернуть против хода стрелки часов. Таким образом,

$$Q_{\text{лев.}} = 10{,}5\,\text{кн}, \quad Q_{\text{прав.}} = -13{,}5\ \text{кн}.$$

Величина поперечной силы на участке балки длиной 6 м равна

$$Q = \frac{12-8}{6} = \frac{4}{6} = 0{,}67\,кн.$$

Поперечная сила на этом участке положительная, так как ось эпюры, до совмещения ее с линией соединяющей крайние ординаты на этом участке, следует повернуть по ходу стрелки часов.

Величина поперечной силы на консольном участке балки равна

$$Q = \frac{8}{2} = 4\,кн.$$

Знак плюс, так как ось эпюры до совмещения ее с самой эпюрой на этом участке следует повернуть по ходу стрелки часов.

По полученным данным построим расчетную эпюру Q_p (рис. 2.8,г).

В заданной системе отбросим все опорные связи, а вертикальные реакции, возникающие в них, получим как величины скачков, взятых с эпюры Q_p. Отметим, что "движение" по эпюре Q_p для определения направления "скачков" следует осуществлять слева направо (рис. 2.9, а). Запишем уравнение проекций всех сил на вертикальную ось Y

$$\sum y = R_A + R_B - q \cdot 8 - F = 10{,}5 + 14{,}17 + 3{,}33 - 3 \cdot 8 - 4 = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Запишем уравнение моментов относительно точки "A"

$$\sum m_A = q \cdot 8 \cdot 4 - R_B \cdot 8 - R_C \cdot 14 + F \cdot 16 = 96 - 113{,}36 - 46{,}62 + 64$$
$$= 160 - 160{,}58 \cong 0.$$

Подсчитаем относительную погрешность вычислений

$$\frac{160{,}58 - 160}{160{,}58} 100\% = 0{,}36\% < [1\%].$$

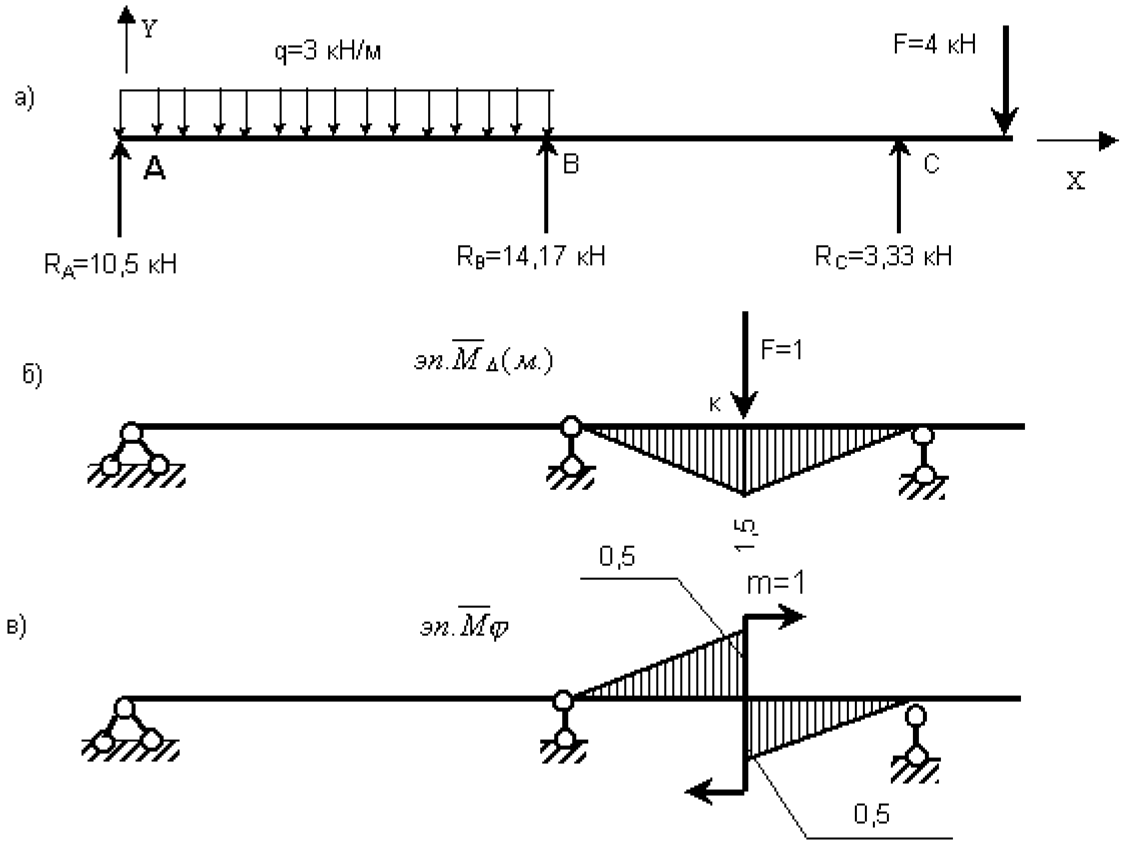


Рис. 2.9. а) заданная система, с приложенными к ней опорными реакциями и внешней нагрузкой; б) эпюра изгибающих моментов от F = 1, приложенной в сечении “к”; в) эпюра изгибающих моментов от m=1, приложенного в сечении “к”

Для определения вертикального перемещения сечения "к" приложим в это сечение в основной системе вертикальную силу F = 1 и построим от ее действия эпюру изгибающих моментов, которую обозначим эп.` М (рис. 2.9,б). Перемножим эп. $M_р$ на эп.` М , в результате чего получим

$$\Delta_{к,верт.} = \textbf{эп.}\mathbf{M}_р\ \textbf{эп.}\overline{\mathbf{M}}_\Delta = -\frac{3}{6EI}(2\ 12\ 0 + 2\ 10\ 1{,}5 + 12\ 1{,}5 + 10\ 0) -$$

$$-\frac{3}{6EI}(2\ 10\ 1{,}5 + 2\ 8\ 0 + 8\ 1{,}5 + 10\ 0) = -\frac{24}{EI} - \frac{21}{EI} = -\frac{45}{EI}.$$

Знак минус для D $_{к,верт.}$ означает, что сечения "к-к" произойдет вверх.

Для того чтобы определить угол поворота сечения "к", приложим в это сечение в основной системе сосредоточенный единичный момент m=1, после чего от его действия построим эпюру изгибающих моментов, обозначив ее в дальнейшем эп.` Mj (рис. 2.9, в). Перемножим эп. $M_p$ на эп.` Mj .

$$\varphi_k = \text{эп.}M_p\ \text{эп}\overline{M_\varphi} = -\frac{3}{6EI}(2\ 10\ 12 + 2\ 10\ \ 0{,}5 + 10\ \ 0) -$$
$$-\frac{3}{6EI}(2\ 10\ \ 0{,}5 + 2\ \ 8\ \ 0 + 10\ \ 0 + 8\ \ 0{,}5) = \frac{8}{EI} - \frac{7}{EI} = \frac{1}{EI}.$$

Знак плюс для j $_k$ означает, что сечение "к" поворачивается по ходу стрелки часов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов А.В., Александров А.В., Монахов Н.И. и др. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975 г. – 480 с.

2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. –608 с.

3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1969. – 734 с.

4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1967. – 552 с.

5. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.Л. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.

6. Варданян Г.С., Андреев В.И. и др. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичночти. – М.: Изд-во АСВ, 1995. –568 с.