

Растяжение и сжатие

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad N = \sigma \cdot F$$

σ — нормальное напряжение [Па], 1 Па (паскаль) = 1 Н/м²,
10⁶ Па = 1 МПа (мегапаскаль) = 1 Н/мм²

N — продольная (нормальная) сила [Н] (ньютон); F — площадь сечения [м²]

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

ε — относительная деформация [безразмерная величина];

ΔL — продольная деформация [м] (абсолютное удлинение), L — длина стержня [м].

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{— закон Гука —} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon$$

E — модуль упругости при растяжении (модуль упругости 1-го рода или модуль Юнга) [МПа]. Для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа = $2 \cdot 10^6$ кг/см² (в "старой" системе единиц).

(чем больше E , тем менее растяжимый материал)

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}; \quad \Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot F} \quad \text{— закон Гука}$$

EF — жесткость стержня при растяжении (сжатии).

При растяжении стержня он "утоњшается", его ширина — a уменьшается на поперечную деформацию — Δa .

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} \quad \text{— относительная поперечная деформация.}$$

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad \text{— коэффициент Пуассона [безразмерная величина];}$$

μ лежит в пределах от 0 (пробка) до 0,5 (каучук); для стали $\mu \approx 0,25 \div 0,3$.

Если продольная сила и поперечное сечение не постоянны, то удлинение стержня:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(z)}{E \cdot F(z)} dz$$

$$\text{Работа при растяжении: } A = \frac{P \cdot \Delta L}{2}, \quad \text{потенциальная энергия: } U = A = \frac{P^2 L}{2 \cdot E \cdot F}$$

Учет собственного веса стержня

Продольная сила $N(z) = P + \gamma \cdot F \cdot L$;

P — сила, действующая на стержень, γ — удельный вес, F — площадь сечения.

$$\text{Максимальное напряжение: } \sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot L. \quad \text{Деформация: } \Delta L = \frac{P \cdot L}{E \cdot F} + \frac{\gamma \cdot L^2}{2 \cdot E}$$

Условие прочности при растяжении (сжатии) $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$,

$[\sigma]$ — допускаемое напряжение на растяжение (сжатие).

У чугуна $[\sigma_{\text{раст}}] \neq [\sigma_{\text{сж}}]$, у стали и др. пластичных материалов $[\sigma_{\text{раст}}] = [\sigma_{\text{сж}}]$.

Основные механические характеристики материалов

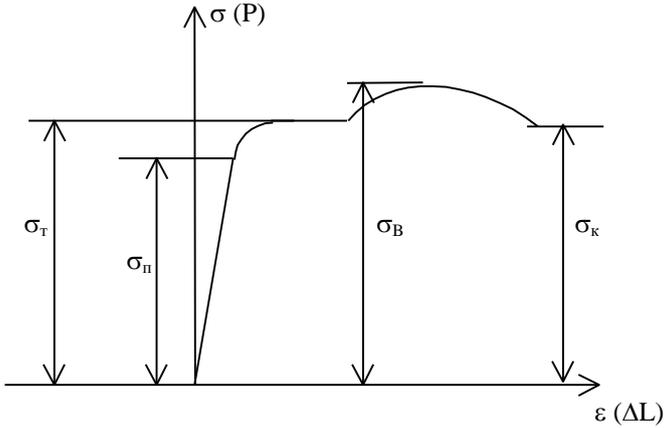


диаграмма напряжений (растяжения)
для пластичных материалов
(например, малоуглеродистая сталь)

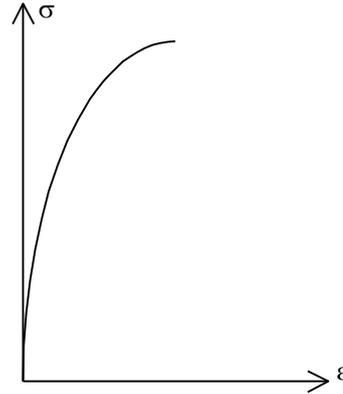


диаграмма напряжений для хрупких
материалов (например, чугун)

$\sigma_{п}$ — предел пропорциональности, $\sigma_{Т}$ — предел текучести, $\sigma_{В}$ — предел прочности или временное сопротивление, $\sigma_{к}$ — напряжение в момент разрыва.

Хрупкие материалы, напр., чугун разрушаются при незначительных удлинениях и не имеют площадки текучести, лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению.

Допускаемое напряжение $[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$, σ_0 — опасное напряжение, n — коэф. запаса прочности. Для пластичных материалов $\sigma_0 = \sigma_{Т}$ и $n = 1,5$, хрупких $\sigma_0 = \sigma_{В}$, $n = 3$.

Линейное напряженное состояние

напряжения по наклонной площадке:

$$\text{полное: } p_{\alpha} = \frac{P}{F_{\alpha}} = \frac{P}{F} \cos \alpha = \sigma \cdot \cos \alpha$$

$$\text{нормальное: } \sigma_{\alpha} = \sigma \cdot \cos^2 \alpha, \quad \text{касательное: } \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

F_{α} — площадь наклонной площадки.

Нормальные напряжения σ_{α} положительны, если они растягивающие; касательные напряжения τ_{α} положительны, если они стремятся повернуть рассматриваемый элемент (нижняя часть) по часовой стрелке (на рис. все положительно). Наибольшие нормальные напряжения возникают по площадкам перпендикулярным к оси стержня ($\alpha=0$, $\cos \alpha=1$, $\max \sigma_{\alpha} = \sigma$)

На перпендикулярных площадках: $\beta = 90 - \alpha$

$$\sigma_{\beta} = \sigma \cdot \sin^2 \alpha; \quad \tau_{\beta} = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha, \quad \text{т.е. } \tau_{\beta} = -\tau_{\alpha}.$$

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, составляющим угол 45° к оси стержня ($\alpha=45^{\circ}$, $\sin 2\alpha=1$, $\max \tau_{\alpha} = \sigma/2$)

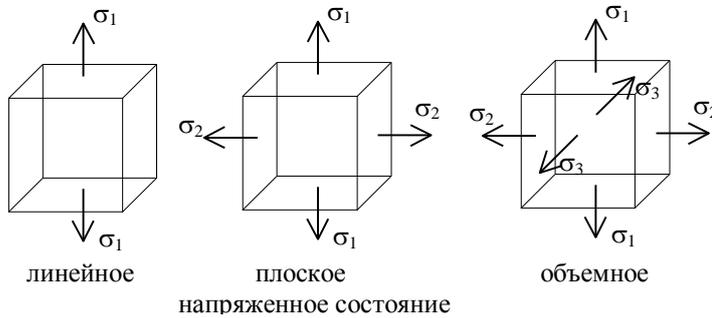
Напряженное и деформированное состояние

Различают три вида напряженного состояния:

- 1) линейное напряженное состояние — растяжение (сжатие) в одном направлении;
- 2) плоское напряженное состояние — растяжение (сжатие) по двум направлениям;

3) объемное напряженное состояние — растяжение (сжатие) по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Рассматривают бесконечно малый параллелепипед (кубик). На его гранях могут быть нормальные σ и касательные τ напряжения. При изменении положения "кубика" напряжения меняются. Можно найти такое положение, при котором нет касательных напряжений см. рис.



Площадки, по которым не действуют касательные напряжения, называются главными площадками, а нормальные напряжения на этих площадках — главными напряжениями.

Главные напряжения обозначают: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Плоское напряженное состояние

Разрежем элементарный параллелепипед (рис.а) наклонным сечением. Изображаем только одну плоскость. Рассматриваем элементарную треугольную призму (рис.б). Положение наклонной площадки определяется углом α . Если поворот от оси x против час.стр. (см. рис.б), то $\alpha > 0$.

Нормальные напряжения имеют индекс, соответствующий оси их направления. Касательные напряжения, обычно, имеют два индекса: первый соответствует направлению

нормали к площадке, второй — направлению самого напряжения (к сожатию, встречаются и другие обозначения, и другой выбор осей координат, что приводит к изменению знаков в некоторых формулах).

Нормальное напряжение положительно, если оно растягивающее, касательное напряжение положительно, если оно стремится повернуть рассматриваемую часть элемента относительно внутренней точки по час.стр (для касательного напряжения в некоторых учебниках и вузах принято обратное).

Напряжения на наклонной площадке:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

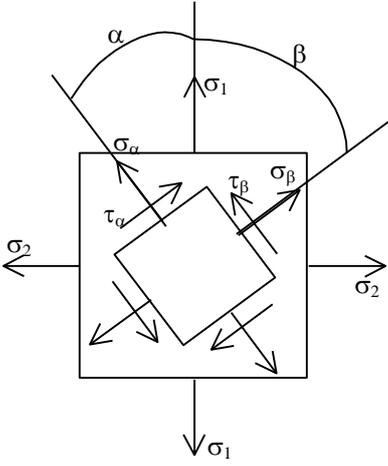
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha$$

или
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

Закон парности касательных напряжений: если по площадке действует касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке будет действовать касательное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку. ($\tau_{xz} = -\tau_{zx}$)

В теории напряженного состояния различают две основные задачи.

Прямая задача. По известным главным напряжениям: $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ требуется определить для площадки, наклоненной под заданным углом (α) к главным площадкам, нормальные и касательные напряжения:



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

или
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha.$$

Для перпендикулярной площадки:

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Откуда видно, что $\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2$ — сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам инварианта (независима) по отношению к наклону этих площадок.

Как и в линейном напряженном состоянии максимальные касательные напряжения имеют место при $\alpha = \pm 45^\circ$, т.е. по площадкам, наклоненным к главным площадкам под углом 45°

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Обратная задача. По известным нормальным и касательным напряжениям, действующим в двух взаимно перпендикулярных площадках, найти главные (max и min) напряжения и положение главных площадок.

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

(касательные напряжения по главным площадкам равны 0).

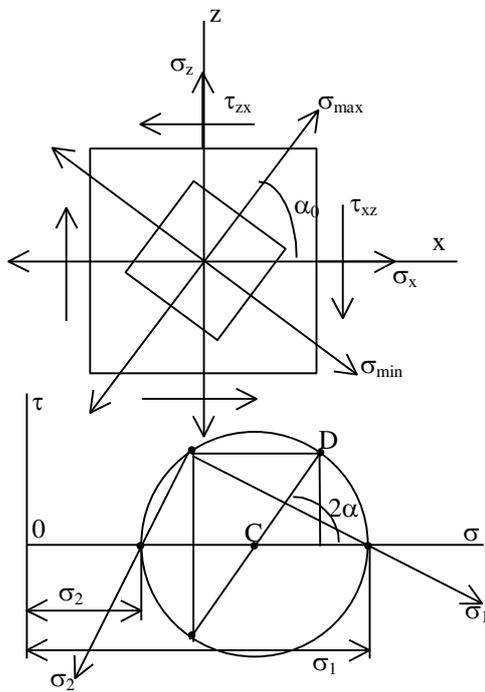
Угол α_0 , определяющий положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Если одно из главных напряжений окажется отрицательным, то их надо обозначать σ_1, σ_3 , если оба отрицательны, то σ_2, σ_3 .

Круг Мора (круг напряжений). Координаты точек круга соответствуют нормальным и касательным напряжениям на различных площадках. Откладываем от оси σ из центра C луч под углом 2α ($\alpha > 0$, то против час.стр.), находим точку D ,

координаты которой: $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$. Можно графически решать как прямую, так и обратную задачи.

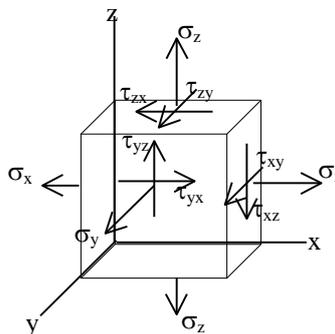


состояние

Напряжения в любой площадке напряжениях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$:

Объемное напряженное

при известных главных



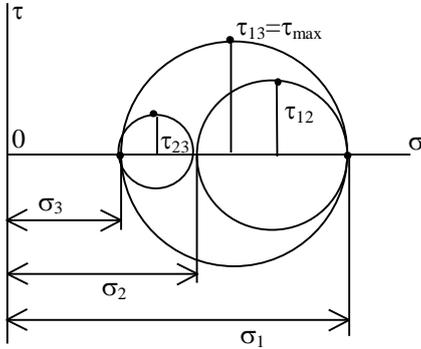
$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3;$$

$$\tau_{\alpha} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_{\alpha}},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — углы между нормалью к рассматриваемой площадке и направлениями главных напряжений.

Наибольшее касательное напряжение: $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

Оно действует по площадке параллельной главному напряжению σ_2 и наклоненной под углом 45° к главным напряжениям σ_1 и σ_3 .



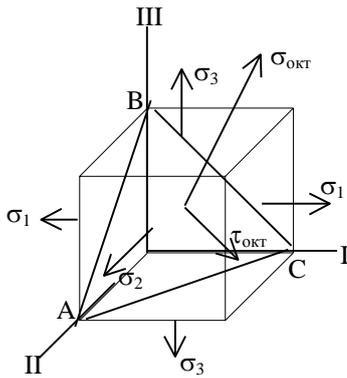
Круг Мора для объемного напряженного состояния.

Точки, являющиеся вершинами кругов соответствуют диагональным площадкам, наклоненным под 45° к главным

напряжениям: $\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, $\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ (иногда называют главными касательными напряжениями).

Плоское напряженное состояние — частный случай объемного и тоже может быть представлено тремя кругами Мора, при этом одно из главных напряжений должно быть равно 0. Для касательных напряжений также, как и при плоском напряженном состоянии, действует закон парности: составляющие касательных напряжений по взаимно перпендикулярным площадкам, перпендикулярные к линии пересечения этих площадок, равны по величине и обратны по направлению.



Напряжения по октаэдрической площадке.

Октаэдрическая площадка (ABC) — площадка, равнонаклоненная ко всем главным направлениям.

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$

Октаэдрическое нормальное напряжение равно среднему из трех главных напряжений.

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

или $\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2}$, Октаэдрическое касательное

напряжение пропорционально геометрической сумме главных касательных напряжений. Интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ — сумма нормальных напряжений, действующих по любым трем взаимно перпендикулярным площадкам есть постоянная величина, равная сумме главных напряжений (первый инвариант).

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned}$$

Деформации при объемном напряженном состоянии.

Обобщенный закон Гука (закон Гука при объемном напряжении):

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — относительные удлинения в главных направлениях (главные удлинения). Если какие-либо из напряжений σ_i будут

сжимающими, то их необходимо подставлять в формулы со знаком минус.

Относительная объемная деформация:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \theta = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Изменение объема не зависит от соотношения между главными напряжениями, а зависит от суммы главных напряжений. Т.е. элементарный кубик получит такое же изменение объема, если к его граням будут приложены одинаковые средние напряжения: $\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$,

тогда $\theta = \frac{1 - 2 \cdot \mu}{E} 3\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{K}$, где $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$ — модуль объемной деформации. При

деформации тела, материал которого имеет коэффициент Пуассона $\mu = 0,5$ (например, резина) объем тела не меняется.

Потенциальная энергия деформации

При простом растяжении (сжатии) потенциальная энергия $U = \frac{P \cdot \Delta L}{2}$.

Удельная потенциальная энергия — количество потенциальной энергии, накапливаемое в

единице объема: $u = \frac{U}{F \cdot L} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}$; $u = \frac{\sigma^2}{2E}$. В общем случае объемного напряженного

состояния, когда действуют три главных напряжения:

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2} \quad \text{или} \quad u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3)]$$

Полная энергия деформации, накапливаемая в единице объема, может рассматриваться как состоящая из двух частей: 1) энергии u_o , накапливаемой за счет изменения объема (т.е. одинакового изменения всех размеров кубика без изменения кубической формы) и 2) энергии u_ϕ , связанной с изменением формы кубика (т.е. энергии, расходуемой на превращение кубика в параллелепипед). $u = u_o + u_\phi$.

$$u_o = \frac{1 - 2\mu}{6 \cdot E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad u_\phi = \frac{1 + \mu}{3 \cdot E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3]$$

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{ — тензор напряжений (матрица третьего порядка).}$$

При переходе к главным напряжениям тензор напряжений получает вид:

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \text{ При повороте системы координат коэффициенты тензора меняются,}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ J_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2; \\ J_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{zx} \tau_{yz}. \end{aligned}$$

сам тензор остается постоянным. Три инварианта напряженного состояния:

Аналогичные зависимости возникают при рассмотрении деформированного состояния в

точке. Сопоставление зависимостей напряженного и деформированного плоского состояния (аналогия):

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha & \varepsilon_\alpha &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha & \gamma_\alpha &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

ε_α — относительная деформация, γ_α — угол сдвига.

Та же аналогия сохраняется и для объемного состояния. Поэтому имеем инварианты деформированного состояния:

$$\begin{aligned} J_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ J_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2; \\ J_3 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \text{ — тензор деформаций.} \end{aligned}$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ — компоненты деформированного состояния. Теории прочности

В общем случае опасное напряженное состояние элемента конструкции зависит от соотношения между тремя главными напряжениями ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$). Т.е., строго говоря, для каждого соотношения нужно экспериментально определять величину предельного напряжения, что нереально. Поэтому были приняты такие методы расчета прочности, которые позволяли бы оценить степень опасности любого напряженного состояния по напряжению растяжения – сжатия. Они называются теориями прочности (теории предельных напряженных состояний).

1-ая теория прочности (теория наибольших нормальных напряжений): причиной наступления предельного напряженного состояния являются наибольшие нормальные напряжения. $\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma]$. Главный недостаток: не учитываются два других главных напряжения. Подтверждается опытом только при растяжении весьма хрупких материалов (стекло, гипс). В настоящее время практически не применяется.

2-ая теория прочности (теория наибольших относительных деформаций): причиной наступления предельного напряженного состояния являются наибольшие удлинения. $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon]$. Учитывая, что $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$, μ — коэффициент Пуассона, получаем

условие прочности $\sigma_{\text{эквII}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$. $\sigma_{\text{экв}}$ — эквивалентное (расчетное) напряжение. В настоящее время теория используется редко, только для хрупких материалов (бетон, камень).

3-я теория прочности (теория наибольших касательных напряжений): причиной наступления предельного напряженного состояния являются наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max} \leq [\tau]$, $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, условие прочности: $\sigma_{\text{эквIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$. Основной

недостаток — не учитывает влияние σ_2 . При плоском напряженном состоянии: $\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$. При $\sigma_y = 0$ получаем $\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$. Широко используется для пластичных материалов.

4-я теория прочности (энергетическая теория): причиной наступления предельного напряженного состояния являются величина удельной потенциальной энергии изменения формы. $u_{\phi} \leq [u_{\phi}]$. $\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{0,5 \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma]$.

Учитывает, все три главных напряжения. При плоском напряженном состоянии:

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]. \text{ При } \sigma_y = 0, \sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Широко используется для пластичных материалов.

Теория прочности Мора Получена на основе кругов напряжений Мора.

$$\sigma_{\text{эквM}} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \cdot \sigma_3. \text{ Используется при расчетах хрупких материалов, у которых}$$

допускаемые напряжения на растяжение $[\sigma_p]$ и сжатие $[\sigma_c]$ не одинаковы (чугун).

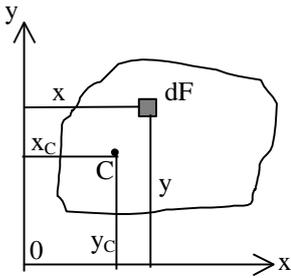
Для пластичных материалов $[\sigma_p] = [\sigma_c]$ теория Мора превращается в 3-ю теорию.

Для осей, совпадающих с направлениями главных деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, тензор деформаций

$$\text{принимает вид: } T_D = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \text{ Геометрические характеристики плоских сечений}$$

$$\text{Площадь: } F = \int_F dF, \text{ } dF \text{ — элементарная площадка.}$$

Статический момент элемента площади dF относительно оси Ox — произведение элемента площади на расстояние "y" от оси Ox : $dS_x = y \cdot dF$



Просуммировав (проинтегрировав) такие произведения по всей площади фигуры, получаем статические моменты относительно осей y и x :

$$S_x = \int_F y dF;$$

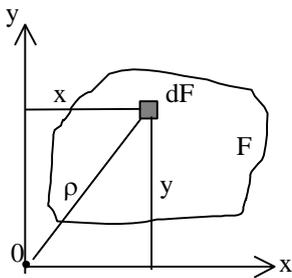
$$S_y = \int_F x dF \quad [\text{см}^3, \text{м}^3, \text{т.д.}].$$

Координаты центра тяжести: $x_C = \frac{S_y}{F}; y_C = \frac{S_x}{F}$. Статические моменты относительно центральных осей (осей, проходящих через центр тяжести сечения) равны нулю. При вычислении статических моментов сложной фигуры ее разбивают на простые части, с известными площадями F_i и координатами центров тяжести x_i, y_i . Статический момент площади всей фигуры = сумме статических моментов каждой ее части:

$$S_x = \sum_{i=1}^n F_i y_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n F_i x_i.$$

Координаты центра тяжести сложной фигуры:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$



Моменты инерции сечения

Осевой (экваториальный) момент инерции сечения — сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний до оси.

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF \quad [\text{см}^4, \text{м}^4, \text{т.д.}].$$

Полярный момент инерции сечения

относительно некоторой точки (полюса) — сумма произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний от этой точки.

$$J_p = \int_F \rho^2 dF; \quad [\text{см}^4, \text{м}^4, \text{т.д.}]. \quad J_y + J_x = J_p.$$

Центробежный момент инерции сечения — сумма произведений элементарных площадок на их расстояния от двух взаимно перпендикулярных осей.

$$J_{xy} = \int_F xy dF.$$

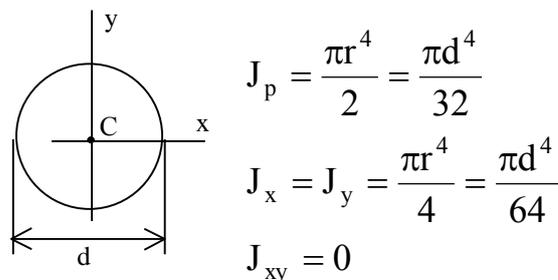
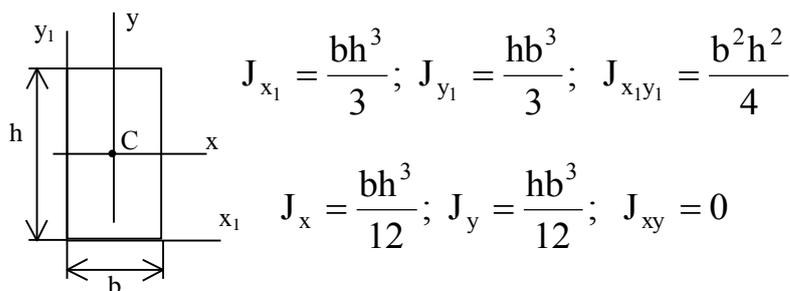
Центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с осями симметрии, равен нулю.

Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

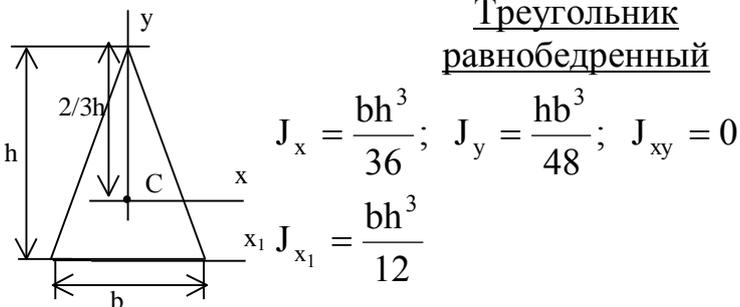
Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции составных ее частей.

Моменты инерции сечений простой формы

Прямоугольное сечение Круг

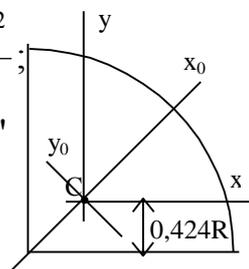
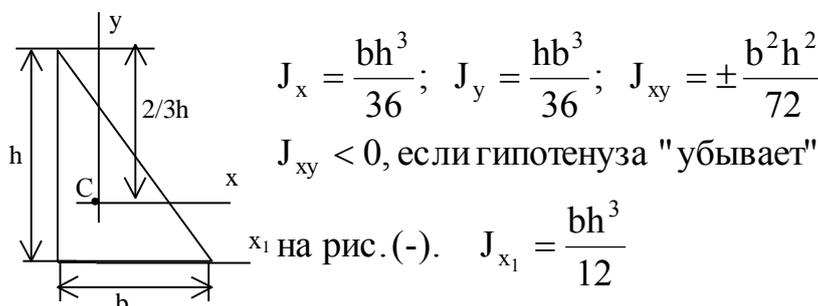


Кольцо



Треугольник равнобедренный

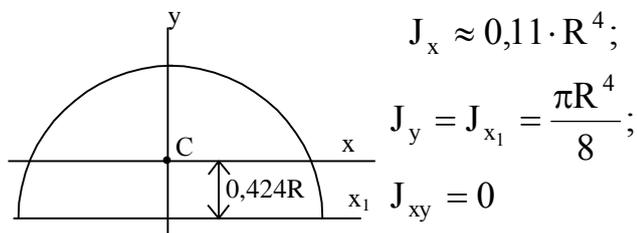
Прямоугольный треугольник



Четверть круга

$J_y = J_x = 0,055R^4$
 $J_{xy} = \pm 0,0165R^4$
 на рис. (—)
 $J_{x0} = 0,0714R^4$
 $J_{y0} = 0,0384R^4$

Полукруг



Моменты инерции стандартных профилей находятся из таблиц сортамента:

Двутавр Швеллер Уголок

Моменты инерции относительно

$$J_{xy} = \frac{J_{x0} - J_{y0}}{2} \sin 2\alpha$$

параллельных осей:

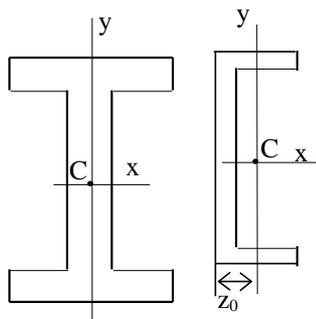
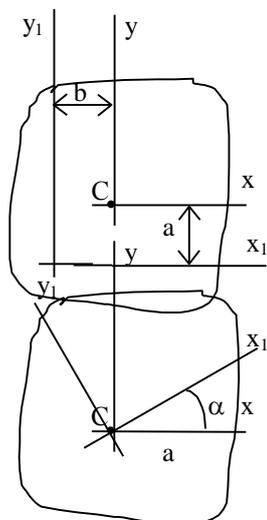
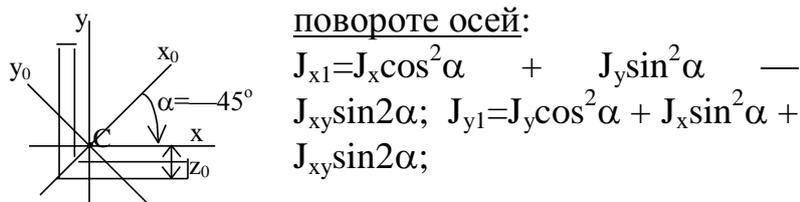
$$J_{x1} = J_x + a^2 F;$$

$$J_{y1} = J_y + b^2 F;$$

момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

$$J_{y1x1} = J_{yx} + abF; \text{ ("a" и "b" подставляют в формулу с учетом их знака).}$$

Зависимость между моментами инерции при повороте осей:



$$J_{x_1y_1} = \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha ;$$

Угол $\alpha > 0$, если переход от старой системы координат к новой происходит против час.стр.

$$J_{y_1} + J_{x_1} = J_y + J_x$$

Экстремальные (максимальное и минимальное) значения моментов инерции называются главными моментами инерции. Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называются главными осями инерции. Главные оси инерции взаимно перпендикулярны. Центробежные моменты инерции относительно главных осей = 0, т.е. главные оси инерции — оси, относительно которых центробежный момент инерции = 0. Если одна из осей совпадает или обе совпадают с осью симметрии, то они главные. Угол,

определяющий положение главных осей: $\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot J_{xy}}{J_y - J_x}}$, если $\alpha_0 > 0 \Rightarrow$ оси поворачиваются

против час.стр. Ось максимума всегда составляет меньший угол с той из осей, относительно которой момент инерции имеет большее значение. Главные оси, проходящие через центр тяжести, называются главными центральными осями инерции. Моменты инерции

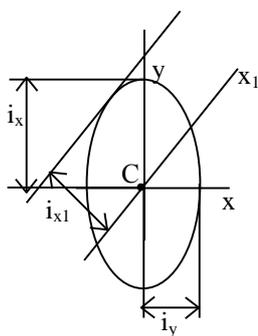
относительно этих осей: $\boxed{J_{\max}^{\min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2}}$

$J_{\max} + J_{\min} = J_x + J_y$. Центробежный момент инерции относительно главных центральных осей инерции равен 0. Если известны главные моменты инерции, то формулы перехода к повернутым осям:

$$J_{x_1} = J_{\max} \cos^2 \alpha + J_{\min} \sin^2 \alpha; \quad J_{y_1} = J_{\max} \sin^2 \alpha + J_{\min} \cos^2 \alpha; \quad J_{x_1y_1} = \frac{1}{2}(J_{\max} - J_{\min}) \sin 2\alpha;$$

Конечной целью вычисления геометрических характеристик сечения является определение главных центральных моментов инерции и положения главных центральных осей инерции.

Радиус инерции — $\boxed{i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}; \quad J_x = F \cdot i_x^2, \quad J_y = F \cdot i_y^2.$



Если J_x и J_y главные моменты инерции, то i_x и i_y — главные радиусы инерции. Эллипс, построенный на главных радиусах инерции как на полуосях, называется эллипсом инерции. При помощи эллипса инерции можно графически найти радиус инерции i_{x_1} для любой оси x_1 . Для этого надо провести касательную к эллипсу, параллельную оси x_1 , и измерить расстояние от этой оси до касательной. Зная радиус инерции, можно найти момент инерции сечения относительно оси x_1 : $J_{x_1} = F \cdot i_{x_1}^2$. Для сечений, имеющих

более двух осей симметрии (например: круг, квадрат, кольцо и др.) осевые моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой, $J_{xy} = 0$, эллипс инерции обращается в круг инерции.

Моменты сопротивления.

Осевой момент сопротивления — отношение момента инерции относительно оси к расстоянию от нее до наиболее удаленной точки сечения. $\boxed{W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}}$ [см³, м³]

Особенно важны моменты сопротивления относительно главных центральных осей:

$$\text{прямоугольник: } W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{b^2h}{6}; \quad \text{круг: } W_x = W_y = \frac{J_x}{R} = \frac{\pi \cdot R^3}{4},$$

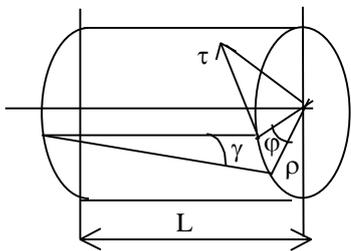
трубчатое сечение (кольцо): $W_x=W_y= \frac{J_x}{d_H/2} = \frac{\pi \cdot d_H^3}{32} (1 - \alpha^4)$, где $\alpha = d_H/d_B$.

Полярный момент сопротивления — отношение полярного момента инерции к расстоянию от полюса до наиболее удаленной точки сечения: $W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}$.

Для круга $W_p = \frac{\pi \cdot R^3}{2}$.

Кручение

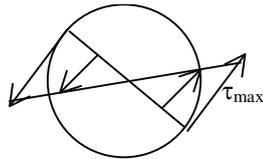
Такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях возникает только одни крутящие моменты — M_k . Знак крутящего момента M_k удобно определять по направлению внешнего момента. Если при взгляде со стороны сечения внешний момент направлен против час.стр., то $M_k > 0$ (встречается и обратное правило). При кручении происходит поворот одного сечения относительно другого на угол закручивания φ . При кручении круглого бруса (вала) возникает напряженное состояние чистого сдвига (нормальные напряжения отсутствуют), возникают только касательные напряжения. Принимается, что сечения плоские до закручивания остаются плоскими и после закручивания — закон плоских сечений. Касательные напряжения в точках сечения изменяются пропорционально расстоянию точек от оси. Из закона Гука при сдвиге: $\tau = \gamma G$, G — модуль сдвига,



$$\tau = \frac{M_k \rho}{J_p} = \frac{M_k}{W_p}, \quad W_p = \frac{J_p}{R}$$

— полярный момент сопротивления

круглого сечения. Касательные напряжения в центре равны нулю, чем дальше от центра,



тем они больше. Угол закручивания $\varphi = \frac{M_k L}{GJ_p}$, GJ_p — жесткость

сечения при кручении. $\theta = \frac{\varphi}{L} = \frac{M_k}{GJ_p}$ — относительный угол

закручивания. Потенциальная энергия при кручении: $U = \frac{1}{2} M_k \varphi = \frac{M_k^2 L}{2GJ_p}$. Условие

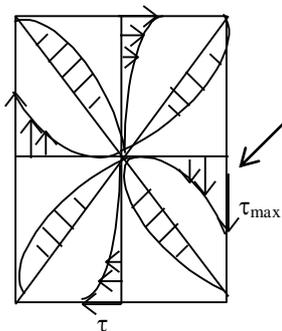
прочности: $\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau]$, $[\tau] = \frac{\tau_{\text{пред}}}{[n]}$, для пластичного материала за $\tau_{\text{пред}}$ принимается

предел текучести при сдвиге τ_t , для хрупкого материала — τ_b — предел прочности, $[n]$ — коэффициент запаса прочности. Условие жесткости при кручении: $\theta_{\max} \leq [\theta]$ — допустимый угол закручивания.

Кручение бруса прямоугольного сечения

При этом нарушается закон плоских сечений, сечения некруглой формы при кручении искривляются — депланация поперечного сечения.

Эпюры касательных напряжений прямоугольного сечения.



$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}$; $\varphi = \frac{M_k L}{GJ_k}$, J_k и W_k — условно называют моментом

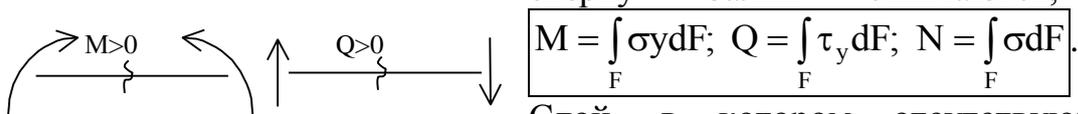
инерции и моментом сопротивления при кручении. $W_k = \alpha hb^2$,

$J_k = \beta hb^3$, Максимальные касательные напряжения τ_{\max} будут посередине длинной стороны, напряжения по середине короткой стороны: $\tau = \gamma \cdot \tau_{\max}$,

коэффициенты: α, β, γ приводятся в справочниках в зависимости от отношения h/b (например, при $h/b=2$, $\alpha=0,246$; $\beta=0,229$; $\gamma=0,795$).

Изгиб

Плоский (прямой) изгиб — когда изгибающий момент действует в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции сечения, т.е. все силы лежат в плоскости симметрии балки. Основные гипотезы (допущения): гипотеза о не надавливании продольных волокон: волокна, параллельные оси балки, испытывают деформацию растяжения – сжатия и не оказывают давления друг на друга в поперечном направлении; гипотеза плоских сечений: сечение балки, плоское до деформации, остается плоским и нормальным к искривленной оси балки после деформации. При плоском изгибе в общем случае возникают внутренние силовые факторы: продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M . $N>0$, если продольная сила растягивающая; при $M>0$ волокна сверху балки сжимаются, снизу растягиваются.

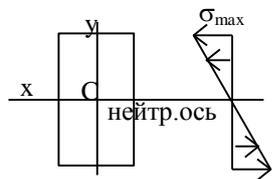


Слой, в котором отсутствуют удлинения, называется нейтральным слоем (осью, линией). При $N=0$ и $Q=0$, имеем случай чистого изгиба.

Нормальные напряжения: $\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho}$, ρ — радиус кривизны нейтрального слоя, y —

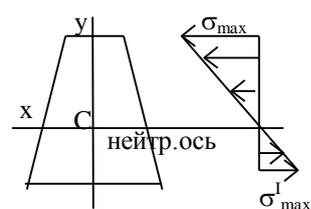
расстояние от некоторого волокна до нейтрального слоя. Закон Гука при изгибе: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot J_x}$,

откуда (формула Навье): $\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x}$, J_x — момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгибающего момента, EJ_x — жесткость при изгибе, $\frac{1}{\rho}$ — кривизна нейтрального слоя.



Максимальные напряжения при изгибе возникают в точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя: $\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{J_x}$, $J_x/y_{\max} = W_x$ — момент

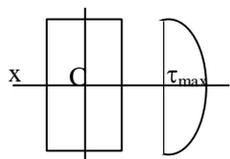
сопротивления сечения при изгибе, $\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}$. Если сечение не имеет горизонтальной оси



симметрии, то эпюра нормальных напряжений σ не будет симметричной. Нейтральная ось сечения проходит через центр тяжести сечения. Формулы для определения нормального напряжения для чистого изгиба приближенно годятся и когда $Q \neq 0$. Это случай поперечного изгиба. При поперечном изгибе, кроме изгибающего момента M , действует поперечная сила Q и в сечении возникают не только нормальные σ , но и касательные τ

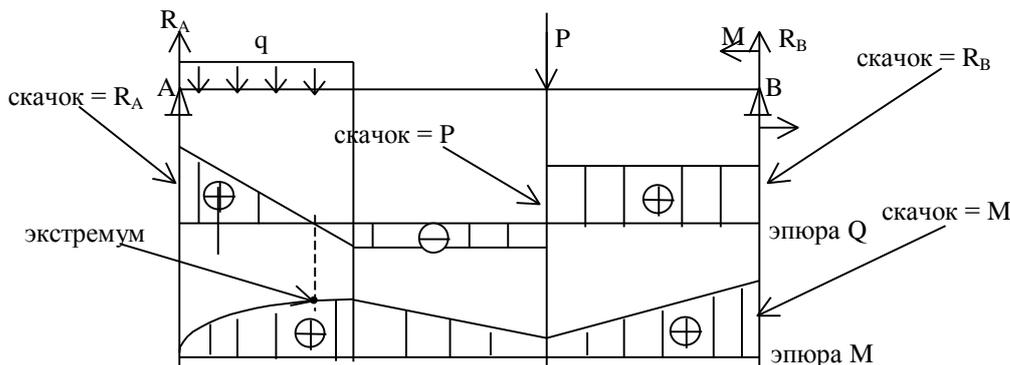
напряжения. Касательные напряжения определяются формулой Журавского: $\tau = \frac{Q \cdot S_x(y)}{b(y) \cdot J_x}$,

где $S_x(y)$ — статический момент относительно нейтральной оси той части площади, которая расположена ниже или выше слоя, отстоящего на расстоянии " y " от нейтральной оси; J_x — момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси, $b(y)$ — ширина сечения в слое, на котором определяются касательные напряжения.



Для прямоугольного сечения: $\tau_{max} = \frac{3Q}{2F}$, $F=b \cdot h$, для круглого сечения: $\tau_{max} = \frac{4Q}{3F}$, $F=\pi \cdot R^2$, для сечения любой формы $\tau_{max} = k \frac{Q}{F}$,

k — коэфф., зависящий от формы сечения (прямоугольник: k= 1,5; круг - k= 1,33).

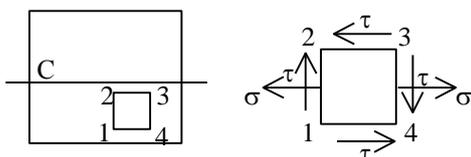


M_{max} и Q_{max} определяются из эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. Для этого балка разрезается на две части и рассматривается одна из них. Действие отброшенной части заменяется внутренними силовыми факторами M и Q, которые определяются из уравнений равновесия. В некоторых вузах момент $M > 0$ откладывается вниз, т.е. эпюра моментов строится на растянутых волокнах. При $Q = 0$ имеем экстремум эпюры моментов. Дифференциальные зависимости между M, Q и q:

$\frac{dM}{dz} = Q; \frac{dQ}{dz} = q;$

$$\frac{dM}{dz} = Q; \frac{dQ}{dz} = q;$$

q — интенсивность распределенной нагрузки [кН/м]



Главные напряжения при поперечном изгибе:

$$\sigma_{max/min} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Расчет на прочность при изгибе: два условия прочности, относящиеся к различным точкам балки: а) по нормальным напряжениям

относящиеся к различным точкам балки: а) по нормальным напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ (точки наиболее удаленные от C); б) по касательным напряжениям}$$

$$\tau = \frac{Q_{max} \cdot S_{max}}{b \cdot J_x} \leq [\tau], \text{ (точки на нейтр.оси). Из а) определяют размеры балки: } W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]},$$

которые проверяют по б). В сечениях балок могут быть точки, где одновременно большие нормальные и большие касательные напряжения. Для этих точек находятся эквивалентные напряжения, которые не должны превышать допустимых. Условия прочности проверяются по различным теориям прочности

I-я: $\sigma_{экви} = \frac{1}{2} [\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma];$ II-я: $\sigma_{эквиII} = 0,35\sigma + 0,65[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \leq [\sigma]$ (при коэфф.Пуассона $\mu=0,3$); — применяются редко.

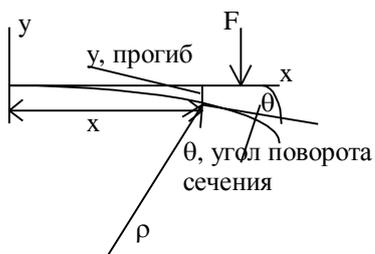
III-я: $\sigma_{эквиIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$ IV-я: $\sigma_{эквиIV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma],$

теория Мора: $\sigma_{эквиM} = \frac{1-m}{2} \sigma + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$ $m = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}$ (используется для чугуна, у

которого допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma_p] \neq [\sigma_c]$ — на сжатие).

Определение перемещений в балках при изгибе

Имеем закон Гука при изгибе: $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E \cdot J_x}$, где $\rho(x)$ — радиус кривизны изогнутой оси балки в сечении x, M(x) — изгибающий



момент в том же сечении, EJ — жесткость балки. Из высшей математики известно:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^3}} = \frac{M(x)}{EJ} \quad \text{дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.} \quad \frac{dy}{dx} = \theta$$

тангенс угла между осью x и касательной к изогнутой оси. Эта величина очень мала (прогибы балки малы) \Rightarrow ее квадратом пренебрегают и угол поворота сечения приравнивают тангенсу. Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

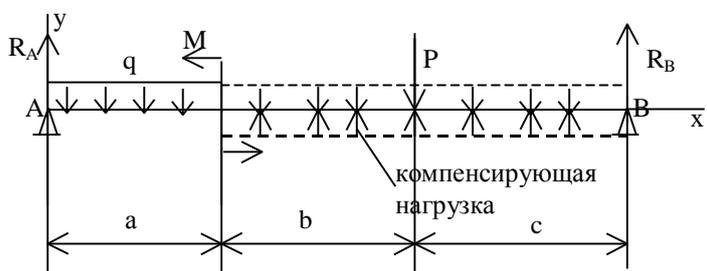
$$\pm EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x). \quad \text{Если ось } y \text{ направлена вверх, то знак (+). В некоторых вузах ось } y \text{ направляется вниз } \Rightarrow (-). \text{ Интегрируя дифф. уравнение, получаем:}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ} \int M(x) dx + C$$

— уравнение углов поворота, интегрируем второй раз: $y = \frac{1}{EJ} \iint M(x) dx dx + Cx + D$ —

получаем уравнение прогибов. Постоянные интегрирования C и D находятся из граничных условий, которые зависят от способов закрепления балки.

Метод начальных параметров. Начало координат выбирают в крайней левой точке. При



включении в уравнение момента M , который приложен на расстоянии "а" от начала координат, его умножают на множитель $(x - a)^0$, который равен 1. Любую распределенную нагрузку продлевают до конца балки, а для ее компенсации прикладывают нагрузку обратного направления. Для рис.:

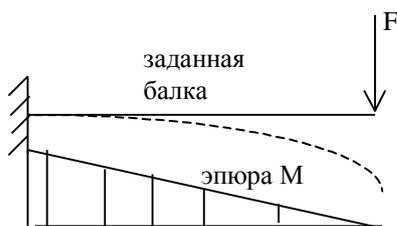
$$EJ y'' = M(x) = R_A \cdot x - q \frac{x^2}{2} - M(x - a)^0 +$$

$$q \frac{(x - a)^2}{2} - P(x - a - b); \quad \text{интегрируем:}$$

$$EJ y' = EJ \theta_0 + R_A \cdot \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} - M(x - a) + q \frac{(x - a)^3}{6} - P \frac{(x - a - b)^2}{2};$$

$$EJ y = EJ y_0 + EJ \theta_0 x + R_A \cdot \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} - M \frac{(x - a)^2}{2} + q \frac{(x - a)^4}{24} - P \frac{(x - a - b)^3}{6}.$$

Начальные параметры — то, что мы имеем в начале координат, т.е. для рис.: $M_0=0$, $Q_0=R_A$, прогиб $y_0=0$, угол поворота $\theta_0 \neq 0$. θ_0 находим из подстановки во второе уравнение условия закрепления правой опоры: $x=a+b+c$; $y(x)=0$.



Дифференциальные зависимости при изгибе:

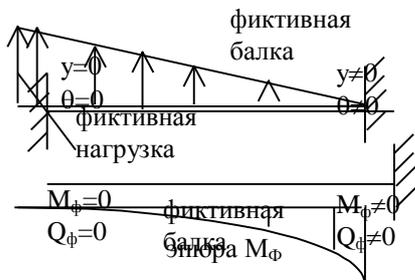
$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x); \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q(x); \quad EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x); \quad \frac{dy}{dx} = \theta.$$

Определение перемещений способом фиктивной нагрузки.

Сопоставляя уравнения:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad \text{и} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} \quad \text{имеем аналогию, } \Rightarrow \text{определение прогибов}$$

можно свести к определению моментов от некоторой фиктивной



(условной) нагрузки в фиктивной балке: $q_{\phi} = \frac{M}{EJ}$. Момент от фиктивной нагрузки M_{ϕ} после деления на EJ равен прогибу "y" в заданной балке от заданной нагрузки. Учитывая, что $\frac{dy}{dx} = \theta$ и $\frac{dM_{\phi}}{dx} = Q_{\phi}$, получаем, что угол поворота в заданной балке численно равен

фиктивной поперечной силе в фиктивной балке. $y = \frac{M_{\phi}}{EJ}$, $\theta = \frac{Q_{\phi}}{EJ}$. При этом должна быть

полная аналогия в граничных условиях двух балок. Каждой заданной балке соответствует своя фиктивная балка. Закрепление фиктивных балок выбирается из того условия, чтобы на концах балки и на опорах имелось полное соответствие между "y" и "θ" в заданной балке и M_{ϕ} и Q_{ϕ} в фиктивной балке. Если эпюры моментов как в действительной, так и в фиктивной балках строить со стороны растянутого волокна (т.е. положительный момент откладывать вниз), то линии прогибов в заданной балке совпадает с эпюрой моментов в фиктивной балке.

Статически неопределимые балки.

Статически неопределимыми называются системы, реакции в которых не могут быть определены из уравнений равновесия твердого тела. В таких системах больше связей, чем это необходимо для равновесия. Степень статической неопределимости балки (не имеющей промежуточных шарниров – неразрезные балки) равна избыточному (лишнему) числу внешних связей (более трех).

Раскрытие статической неопределимости с помощью дифф-ного урав-ния изогнутой оси

балки. Записываем дифф-ное урав-ние куда входит в качестве неизвестной реакция R_B и дважды его интегрируем: $EJ y'' = R_B \cdot x$

$$- q \frac{x^2}{2}; \quad EJ y' = R_B \cdot \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6} + C;$$

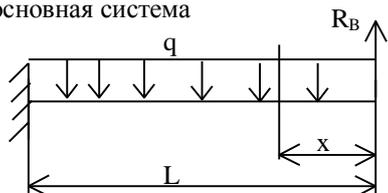
$$EJ y = R_B \cdot \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24} + C \cdot x + D. \text{ Используем условия закрепления}$$

балки: $x=0, y=0, y'=0; x=L, y=0$. Подставляем их в два последних уравнения, находим постоянные интегрирования C и D и неизвестную реакцию R_B . Далее из урав-ний статики:

$$H_A=0; R_A - q \cdot L + R_B=0; R_B \cdot L - q \frac{L^2}{2} + M_A=0; \text{ находятся } R_A \text{ и } M_A.$$

Уравнение совместности перемещений. Статически определимая балка, которая получается

основная система



из статически неопределимой при удалении "лишнего" закрепления, называется основной системой. За "лишнюю" неизвестную можно взять любую из реакций. Приложив к основной системе заданные нагрузки добавляем условие, которое обеспечивает совпадение заданной балки и основной – уравнение совместности перемещений. Для рис.: $y_B=0$, т.е.

прогиб в точке $B = 0$. Решение этого уравнения возможно разными способами.

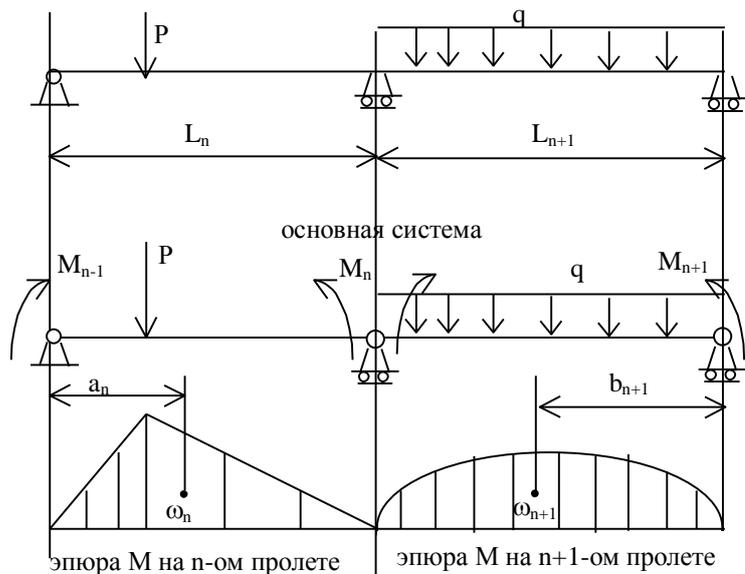
Способ сравнения перемещений. Определяется прогиб точки B (рис.) в основной системе

под действием заданной нагрузки (q): $y_{Bq} = -\frac{q \cdot L^4}{8EJ}$. Далее рассматривается основная

система под действием "лишней" неизвестной R_B , и находится прогиб от действия R_B :

$$y_{B_R} = \frac{R_B \cdot L^3}{3EJ}. \text{ Подставляем в уравнение совместности перемещений: } y_B = y_{Bq} + y_{B_R} = 0, \text{ т.е.}$$

$-\frac{q \cdot L^4}{8EJ} + \frac{R_B \cdot L^3}{3EJ} = 0$, откуда $R_B = \frac{3}{8}qL$, далее остальные реакции находятся из уравнений статики.



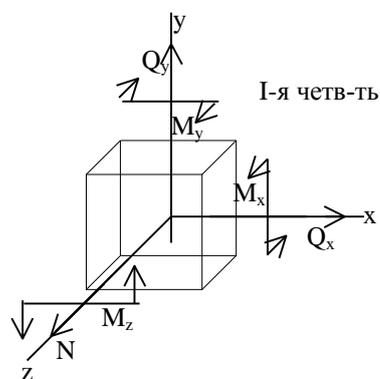
Теорема о трех моментах. Используется при расчете неразрезных балок — балок на многих опорах, одна из которых неподвижна, остальные подвижны. Для перехода от статически неопределимой балки к статически определимой основной системе над лишними опорами вставляются шарниры. Лишними неизвестными: моменты M_n , приложенные к концам пролетов над лишними опорами. Строятся эпюры моментов для каждого пролета балки от заданной нагрузки, рассматривая каждый пролет, как простую балку на двух опорах. Для каждой промежуточной опоры "n" составляется

уравнение трех моментов:

$$M_{n-1}L_n + 2 \cdot M_n(L_n + L_{n+1}) + M_{n+1}L_{n+1} = -6 \cdot \left(\frac{\omega_n a_n}{L_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}} \right) \omega_n, \omega_{n+1} - \text{площади эпюр, } a_n -$$

расстояние от центра тяжести левой эпюры до левой опоры, b_{n+1} — расстояние от центра тяжести правой эпюры до правой опоры. Число уравнений моментов равно числу промежуточных опор. Совместное их решение позволяет найти неизвестные опорные моменты. Зная опорные моменты, рассматриваются отдельные пролеты и из уравнений статики находятся неизвестные опорные реакции. Если пролета всего два, то левый и правый моменты известны, т.к. это либо заданные моменты, либо они равны нулю. В результате получаем одно уравнение с одним неизвестным M_1 .

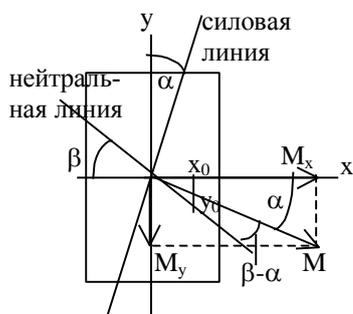
Сложное сопротивление



Под сложным сопротивлением понимают различные комбинации простых напряженных состояний (растяжения, сжатия, сдвига, кручения, изгиба). В общем случае в поперечных сечениях бруса действуют шесть компонентов внутренних усилий: $N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z = M_{кр}$. Нормальная сила N и изгибающие моменты M_x, M_y вызывают нормальные напряжения. От поперечных сил Q_x, Q_y и крутящего момента $M_z = M_{кр}$ возникают касательные напряжения. Знаки: $N > 0$, если она вызывает растягивающие напряжения. M_x и $M_y > 0$, если они вызывают растягивающие напряжения в точках положительной четверти осей координат (I-ая четверть). На рис.

все > 0 .

Прямой изгиб не принято рассматривать как сложное сопротивление, хотя возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила. Сложный изгиб (неплоский изгиб), который вызывается нагрузками, расположенными в разных плоскостях, проходящих через ось балки. Изогнутая ось балки при этом не является плоской кривой. Косой изгиб — такой вид изгиба, когда все нагрузки действуют в одной плоскости, которая не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции сечения. Косой изгиб



приводят к двум плоским изгибам, раскладывая нагрузку в главных плоскостях zy и zx . В сечении возникают четыре компоненты внутренних усилий: Q_x , Q_y , M_x , и M_y . На основании принципа независимости действия сил полные нормальные напряжения равны сумме напряжений от отдельного действия M_x и M_y . Напряжение в произвольной точке с

координатами "x,y":
$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y}$$
; M_x, M_y, x, y подставляются с учетом знака ($M_x > 0$ и

$M_y > 0$, если они вызывают растяжение в I-ой четверти). $\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_x}$, $M_x = M \cdot \cos \alpha$; $M_y = M \cdot \sin \alpha$,

α – угол между "y" и плоскостью действия изгибающего момента M (силовой пл-стью).

$$\sigma = M \left(\frac{y \cdot \cos \alpha}{J_x} + \frac{x \cdot \sin \alpha}{J_y} \right)$$
. Т.к. на нейтральной линии (оси) нормальные напряжения $\sigma = 0$, то

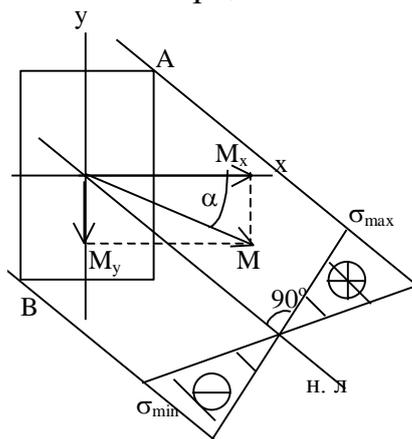
уравнение нейтр. линии будет: $\frac{M_x y_0}{J_x} + \frac{M_y x_0}{J_y} = 0$, x_0, y_0 – коорд. нейтр. линии, или

$\frac{y_0 \cos \alpha}{J_x} + \frac{x_0 \sin \alpha}{J_y} = 0$. Это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат.

Ее положение определяется углом наклона β к главной оси "x":

$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{M_y J_x}{M_x J_y}$. $\operatorname{tg} \beta = -\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha$, \Rightarrow если $J_x \neq J_y$, то нейтр. линия не перпендикулярна к

силовой линии. Нейтр. линия при косом изгибе повернута на угол $(\beta - \alpha)$ от оси, перпендикулярной плоскости действия изгибающего момента, к оси, относительно которой момент инерции имеет минимальное значение (на рис. это ось "y").



Наибольшие напряжения будут в точках наиболее удаленных от нейтральной линии: А и В. Для их нахождения надо провести к контуру сечения касательные параллельные нейтральной линии.

Условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma], \quad W_x = J_x / y_{\max}; \quad W_y = J_y / x_{\max}.$$

Для хрупкого материала (чугун) $[\sigma] = [\sigma_p]$ (допускаемое напряжение на растяжение). Перемещение (прогиб) "f" определяется геометрическим суммированием прогибов в плоскостях xz и yz :

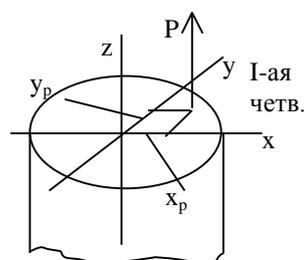
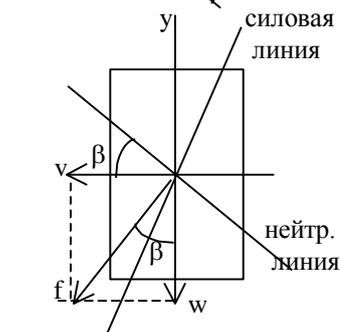
$$EJ_x \frac{d^2 w}{dz^2} = M_x; \quad EJ_y \frac{d^2 v}{dz^2} = M_y.$$

$f = \sqrt{v^2 + w^2}$. При косом изгибе направление полного прогиба перпендикулярно к нейтральной линии и не совпадает с направлением действующей нагрузки.

В случае неплоского изгиба, когда нагрузки не лежат в одной плоскости, линия прогиба не перпендикулярна нейтральной линии.

Изгиб с растяжением (внецентренное сжатие–растяжение).

Внецентренное растяжение–сжатие такой вид деформации, когда в поперечном сечении жесткого стержня действуют продольная сила и изгибающий момент. Нормальное напряжение в произвольной точке сечения с координатами "x,y" равно сумме напряжений от продольной



силы N и изгибающих моментов M_x, M_y : $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y$; знаки: $N > 0$ – если сила

растягивающая, $M_x, M_y > 0$, если моменты "растягивают" сечение в I-ой четверти. Внецентренное сжатие похоже на косой изгиб, только добавляется нормальная сила. На практике важен случай действия одной силы P (равнодействующей), когда она не совпадает с осью балки и имеет координаты точки приложения " x_p, y_p ". Внутренние усилия: $N=P$; $M_y=P \cdot x_p$; $M_x=P \cdot y_p$. Координаты " x_p, y_p " называются эксцентриситеты силы P относительно главных осей инерции x, y . Точка приложения силы P – полюс. Напряжения:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_p F}{J_y} x + \frac{y_p F}{J_x} y \right) \text{ или } \sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{x_p}{i_y^2} x + \frac{y_p}{i_x^2} y \right), \quad i_{x,y} = \sqrt{\frac{J_{x,y}}{F}}$$

– радиусы инерции относительно главных центральных осей инерции сечения.

Уравнение нейтральной линии, на которой $\sigma=0$, будет: $1 + \frac{x_p}{i_y^2} x + \frac{y_p}{i_x^2} y = 0$.

Отрезки, отсекаемые нейтр. линией на осях координат: $x_H = -\frac{i_y^2}{x_p}$; $y_H = -\frac{i_x^2}{y_p}$.

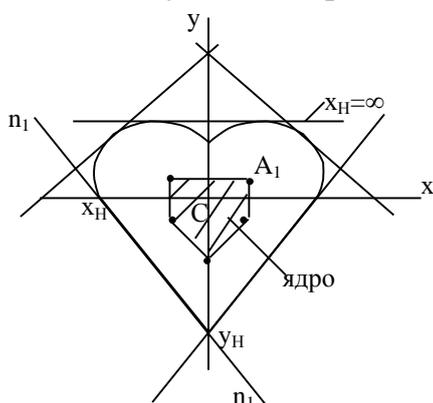
Нейтральная линия и полюс (точка приложения силы) лежат по разные стороны от начала координат.

Чем дальше от начала координат расположен полюс, тем ближе к центру сечения проходит нейтр. линия. Если полюс находится на одной из главных центральных осей инерции, то нейтр. линия перпендикулярна этой оси (например, если $x_p=0$, т.е. точка приложения силы P

находится на оси "y", то $x_H = -\frac{i_y^2}{0} = \infty$, \Rightarrow нейтр. линия параллельна оси "x",

перпендикулярна оси "y"). Нейтр. линия может как пересекать сечение, так и проходить вне его, в этом случае во всем сечении напряжения будут одного знака: растягивающие или сжимающие. Это важно, например, при расчете кирпичных колон, которые плохо сопротивляются растяжению, и надо, чтобы они только сжимались. Когда сила P приложена в центре тяжести сечения, то нейтр. линия находится в бесконечности. При перемещении силы P от центра тяжести в сторону края сечения нейтр. линия перемещается из бесконечности к сечению, оставаясь параллельной самой себе. В какой-то момент она коснется сечения. При этом сила занимает предельное положение, при котором в сечении будут напряжения одного знака. Область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой приложение силы P вызывает в сечении напряжения одного знака, называется ядром сечения.

Чтобы получить очертание ядра сечения надо задать несколько положений нейтр. линии, касательных к контуру сечения (нигде не пересекая его), определить отсекаемые ими отрезки на координатных осях " x_H, y_H " и вычислить соответствующие координаты точки



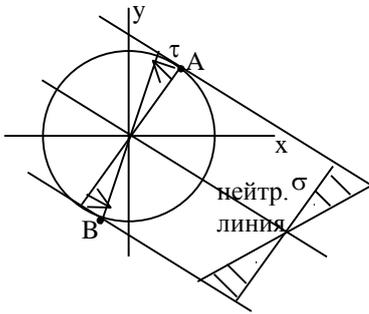
приложения силы P : $x_p = -\frac{i_y^2}{x_H}$; $y_p = -\frac{i_x^2}{y_H}$ – координаты

контура ядра (на рис. $n_1 n_1$ – нейтр. линия, A_1 – соответствующая ей точка ядра сечения). При многоугольной форме контура сечения удобнее нейтр. линию совмещать с каждой из сторон многоугольника. Для прямоугольного сечения – ядро сечения

ромб, с диагоналями равными одной трети соответствующей стороны сечения, для круга – круг радиусом R/4, для двутавра – ромб.

Изгиб с кручением

Совместное действие изгиба с кручением наиболее частый случай нагружения валов. Возникают пять компонентов внутренних усилий: Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z=M_{кр}. При расчете строят эпюры изгибающих M_x, M_y, и крутящих M_{кр} моментов и определяют опасное сечение. Результирующий изгибающий момент $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$. Макс. нормальные и касательные напряжения в опасных точках



сечение. Результирующий изгибающий момент $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$. Макс. нормальные и касательные напряжения в опасных точках

$$(A,B): \sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W},$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p}, \text{ (для круга: } W = \frac{\pi \cdot R^3}{4} \text{ – осевой момент сопротивления,}$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot R^3}{2} \text{ – полярный момент сопр-ния сечения).}$$

Главные напряжения в наиболее опасных точках (А и В):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

Проверка прочности проводится по одной из теорий прочности:

IV-ая: $\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$; теория Мора: $\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$;

где $m = [\sigma_p]/[\sigma_c]$ – допуст. напр.растяжения/сжатия (для хрупких материалов – чугун).

Т.к. $W_p = 2 \cdot W$, получаем: $\sigma_{\text{эквМ}} = \frac{1}{W} [\frac{1-m}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2}\sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2}] \leq [\sigma]$;

$\sigma_{\text{эквIV}} = \frac{1}{W} \sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2} \leq [\sigma]$; В числителе – приведенный момент по принятой

теории прочности. $M_{\text{прМ}} = \frac{1-m}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2}\sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2}$;

IV-ая: $M_{\text{прIV}} = \sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0,75M_{\text{кр}}^2 + M^2}$;

I-ая: $M_{\text{прI}} = \frac{1}{2}[\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2}]$;

II-ая: $M_{\text{прII}} = 0,35\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + 0,65\sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2}$, при коэф.Пуассона $\mu=0,3$;

III-ая: $M_{\text{прIII}} = \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + M_x^2 + M_y^2}$;

или одной формулой: $\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{пр}}}{W} \leq [\sigma]$, откуда момент сопротивления: $W \geq \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]}$, диаметр

вала: $d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{пр}}}{\pi[\sigma]}}$. Формулы годятся и при расчете кольцевого сечения.

Общие методы определения перемещений

Работа постоянных сил: $A = P \cdot \Delta_p$, P – обобщенная сила – любая нагрузка (сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, распределенная нагрузка), Δ_p – обобщенное перемещение (прогиб, угол поворота).

$\Delta_1 = X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \dots$
$\Delta_2 = X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \dots$
$\Delta_3 = X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \dots$

Обозначение Δ_{mn} означает перемещение по направлению обобщенной силы "m", которое вызвано действием силы

обобщенной "n". Полное перемещение, вызванное несколькими силовыми факторами: $\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM}$. Перемещения вызванные единичной силой или единичным моментом: δ – удельное перемещение. Если единичная сила $P=1$ вызвала перемещение δ_P , то полное перемещение вызванное силой P , будет: $\Delta_P = P \cdot \delta_P$. Если силовые факторы, действующие на систему, обозначить X_1, X_2, X_3 и т.д., то перемещение по направлению каждого из них: где $X_1 \delta_{11} = +\Delta_{11}$; $X_2 \delta_{12} = +\Delta_{12}$; $X_i \delta_{mi} = +\Delta_{mi}$. Размерность удельных перемещений:

$$[\delta] = \frac{\text{Дж}}{[X_m][X_i]}, \text{ Дж - джоули размерность работы } 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Нм.}$$

Работа внешних сил, действующих на упругую систему: $A = \int_{\Delta} P d\Delta = \int_0^P P \delta_{PP} dP = \frac{\delta_{PP} P^2}{2}$.

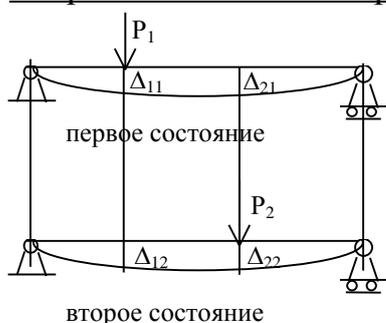
$A = \frac{P \cdot \Delta}{2}$ – действительная работа при статическом действии обобщенной силы на упругую систему равна половине произведения окончательного значения силы на окончательное значение соответствующего перемещения. Работа внутренних сил (сил упругости) в случае

плоского изгиба: $A = \sum \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^L \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum k \int_0^L \frac{Q^2 dx}{2GF}$,

k – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по площади поперечного сечения, зависит от формы сечения.

На основании закона сохранения энергии: потенциальная энергия $U=A$.

Теорема о взаимности работ (теорема Бетли). Два состояния упругой системы:



Δ_{11} – перемещение по направл. силы P_1 от действия силы P_1 ;

Δ_{12} – перемещение по направл. силы P_1 от действия силы P_2 ;

Δ_{21} – перемещение по направл. силы P_2 от действия силы P_1 ;

Δ_{22} – перемещение по направл. силы P_2 от действия силы P_2 .

$A_{12} = P_1 \cdot \Delta_{12}$ – работа силы P_1 первого состояния на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_2 второго состояния.

Аналогично: $A_{21} = P_2 \cdot \Delta_{21}$ – работа силы P_2 второго состояния на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_1 первого

состояния. $A_{12} = A_{21}$. Такой же результат получается при любом числе сил и моментов.

Теорема о взаимности работ: $P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}$.

Работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

Теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла) Если $P_1=1$ и $P_2=1$, то $P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21}$, т.е. $\delta_{12} = \delta_{21}$, в общем случае $\delta_{mn} = \delta_{nm}$.

Для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй единичной силы, вызванному первой силой.

Универсальный метод определения перемещений (линейных и углов поворота) – метод

Мора. К системе прикладывают единичную обобщенную силу в точке, для которой ищется обобщенное перемещение. Если определяется прогиб, то единичная сила представляет собой безразмерную сосредоточенную

$$\Delta_{mn} = \sum \left[\int_0^L \frac{\bar{M}_i^x M_p^x dx}{EJ_x} + \int_0^L \frac{\bar{M}_i^y M_p^y dx}{EJ_y} + \int_0^L \frac{\bar{M}_i^{kp} M_p^{kp} dx}{GJ_k} + k_x \int_0^L \frac{\bar{Q}_i^x Q_p^x dx}{GF} + k_y \int_0^L \frac{\bar{Q}_i^y Q_p^y dx}{GF} + \int_0^L \frac{\bar{N}_i N_p dx}{EF} \right]$$

силу, если определяется угол поворота, то – безразмерный единичный момент. В случае пространственной системы действуют шесть компонентов внутренних усилий. Обобщенное перемещение определяется формулой (формула или интеграл Мора):

Черта над M , Q и N указывает на то, что эти внутренние усилия вызваны действием единичной силы. Для вычисления входящих в формулу интегралов надо перемножить эпюры соответствующих усилий. Порядок определения перемещения: 1) для заданной (действительной или грузовой) системы находят выражения M_n , N_n и Q_n ; 2) по направлению искомого перемещения прикладывают соответствующую ему единичную силу (силу или момент); 3) определяют усилия \bar{M}_m ; \bar{N}_m ; \bar{Q}_m от действия единичной силы; 4) найденные выражения подставляют в интеграл Мора и интегрируют по заданным участкам. Если полученное $\Delta_{mn} > 0$, то перемещение совпадает с выбранным направлением единичной силы, если < 0 , то противоположно. Для плоской конструкции:

$$\Delta_{mn} = \sum \left[\int_0^L \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EJ} + \int_0^L \frac{\bar{N}_i N_p ds}{EF} + k \int_0^L \frac{\bar{Q}_i Q_p ds}{GF} \right].$$

Обычно при определении перемещений

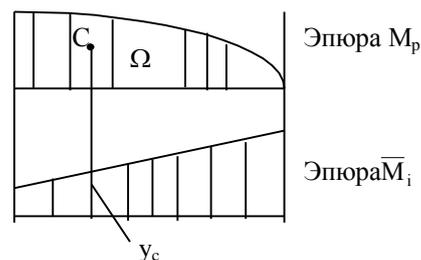
пренебрегают влиянием продольных деформаций и сдвигом, которые вызываются продольной N и поперечной Q силами, учитываются только перемещения, вызываемые

изгибом. Для плоской системы будет:
$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EJ}.$$

Вычисление интеграла Мора способом Верещагина. Интеграл $\int_L \bar{M}_i M_p dz$ для случая, когда

эпюра от заданной нагрузки имеет произвольное очертание, а от единичной – прямолинейное удобно определять графо-аналитическим способом, предложенным

Верещагиным.
$$\int_L \bar{M}_i M_p dz = \Omega \cdot y_c,$$
 где Ω – площадь эпюры M_p от



внешней нагрузки, y_c – ордината эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести эпюры M_p . Результат перемножения эпюр равен произведению площади одной из эпюр на ординату другой эпюры, взятой под центром тяжести площади первой эпюры. Ордината должна быть обязательно взята из прямолинейной эпюры. Если обе эпюры прямолинейны, то ординату можно

взять из любой.

Перемещение:
$$\Delta_{ip} = \sum \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ}.$$
 Вычисление по этой формуле производится по участкам, на

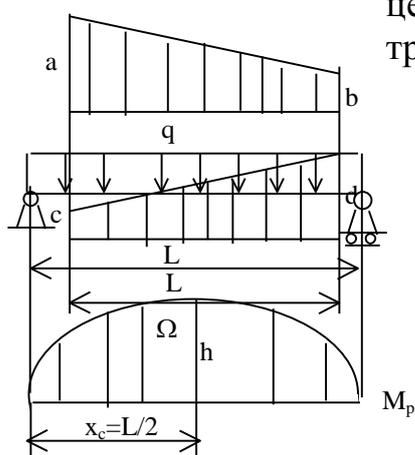
каждом из которых прямолинейная эпюра должна быть без переломов. Сложную эпюру M_p разбивают на простые геометрические фигуры, для которых легче определить координаты центров тяжести. При перемножении двух эпюр, имеющих вид трапеций, удобно использовать формулу:

$$\Omega \cdot y_c = \frac{L}{6} (2ac + 2bd + ad + bc).$$

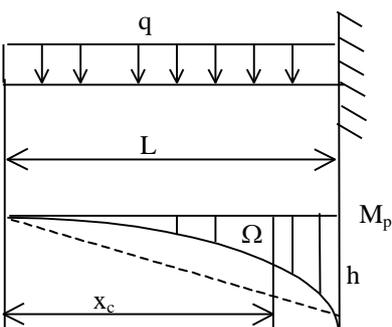
Эта же формула годится и для

треугольных эпюр, если подставить соответствующую ординату $= 0$.

При действии равномерно распределенной нагрузки на шарнирно опертую балку эпюра строится в виде выпуклой квадратичной



параболы, площадь которой $\Omega = \frac{2hL}{3}$ (для рис. $h = \frac{qL^2}{8}$, т.е. $\Omega = \frac{2}{3} \frac{qL^2}{8} L = \frac{qL^3}{12}$, $x_c = L/2$).



Для "глухой" заделки при равномерно распределенной нагрузке имеем вогнутую квадратичную параболу, для которой $\Omega = \frac{hL}{3}$;

$h = \frac{qL^2}{2}$, $\Omega = \frac{1}{3} \frac{qL^2}{2} L = \frac{qL^3}{6}$, $x_c = 3L/4$. Тоже можно получить, если

эпюру представить разностью площади треугольника и площади выпуклой квадратичной параболы: $\Omega = \frac{1}{2} \frac{qL^2}{2} L - \frac{qL^3}{12} = \frac{qL^3}{6}$.

"Отсутствующая" площадь считается отрицательной.

Теорема Кастильяно. $\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}$ – перемещение точки приложения обобщенной силы по

направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии по этой силе. Пренебрегая влиянием на перемещение осевых и поперечных сил, имеем

потенциальную энергию: $U = \sum \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EJ}$, откуда $\Delta_P = \int_s \frac{M(s) ds}{EJ} \frac{\partial M(s)}{\partial P}$.

Статически неопределимые системы

Статически неопределимые системы – системы, силовые факторы в элементах которых не могут быть определены только из уравнений равновесия твердого тела. В таких системах число связей больше, чем необходимо для равновесия. Степень статической неопределимости: $S = 3n - m$, n – число замкнутых контуров в конструкции, m – число одиночных шарниров (шарнир, соединяющий два стержня, считается за один, соединяющий три стержня – за два и т.д.). Метод сил – в качестве неизвестных принимают силовые факторы. Последовательность расчета: 1) устанавливают степень статич. неопределимости; 2) путем удаления лишних связей заменяют исходную систему статически определимой – основной системой (таких систем может быть несколько, но при удалении лишних связей не должна нарушаться геометрическая неизменяемость конструкции); 3) основную систему загружают заданными силами и лишними неизвестными; 4) неизвестные усилия должны быть подобраны так, чтобы деформации исходной и основной систем не отличались. Т.е. реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям = 0. Канонические уравнения метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0 \end{cases}$$

Эти уравнения являются дополнительными ур-ями деформаций, которые позволяют раскрыть статич. неопределимость. Число ур-ий = числу отброшенных связей, т.е. степени неопределимости системы.

δ_{ik} – перемещение по направлению i , вызванное единичной силой действующей по направлению k . δ_{ii} – главные, δ_{ik} –

побочные перемещения. По теореме о взаимности перемещений: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Δ_{ip} – перемещение по направлению связи i , вызванное действием заданной нагрузки (грузовые члены).

Перемещения, входящие в канонические уравнения удобно определять по методу Мора. Для этого к основной системе прикладывают единичные нагрузки $X_1=1$, $X_2=1$, $X_n=1$, внешнюю нагрузку и строят эпюры изгибающих моментов. По интегралу Мора находят:

$$\Delta_{1P} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EJ}; \quad \Delta_{2P} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_2 M_p ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \Delta_{nP} = \sum \int_0^L \frac{\bar{M}_n M_p ds}{EJ};$$

$$\delta_{11} = \sum_0^L \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1 ds}{EJ}; \quad \delta_{22} = \sum_0^L \int \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_2 ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \delta_{nn} = \sum_0^L \int \frac{\overline{M}_n \overline{M}_n ds}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \sum_0^L \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2 ds}{EJ}; \quad \delta_{13} = \sum_0^L \int \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_3 ds}{EJ}; \quad \dots; \quad \delta_{ik} = \sum_0^L \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k ds}{EJ}. \quad \text{Черта над } M \text{ указывает на то,}$$

что эти внутренние усилия вызваны действием единичной силы.

Для систем, состоящих из прямолинейных элементов перемножение эпюр удобно

производить по способу Верещагина. $\Delta_{1P} = \frac{\Omega_P \cdot y_{Cp}}{EJ}$; $\delta_{11} = \frac{\Omega_1 \cdot y_{C1}}{EJ}$ и т.д. Ω_P – площадь

эпюры M_P от внешней нагрузки, y_{Cp} – ордината эпюры от единичной нагрузки под центром тяжести эпюры M_P , Ω_1 – площадь эпюры M_1 от единичной нагрузки. Результат перемножения эпюр равен произведению площади одной из эпюр на ординату другой эпюры, взятой под центром тяжести площади первой эпюры.