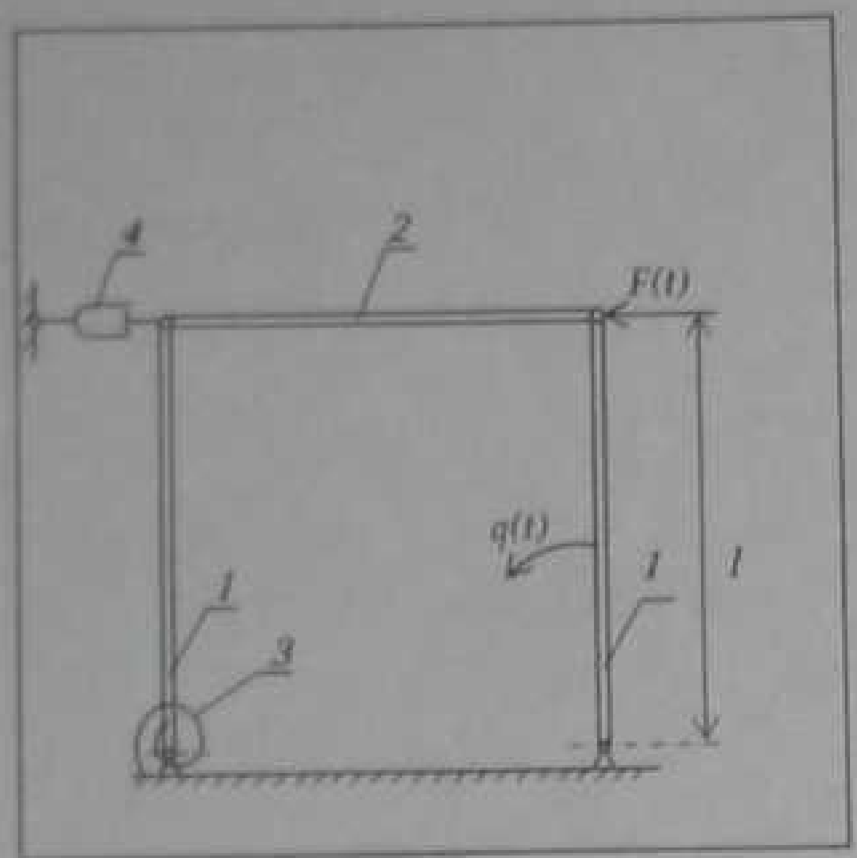
Колебания линейной системы с одной степенью свободы. <u>Вариант 11</u>



Дано:

$m_1=3$ кг $m_2=6$ кг

$l = 0{,}5$ м $l = 0{,}4$ м

$c_3 = 244{,}1$ Нм/рад

$\mu_4 = 96$ Н·с/м

$F(t)=F_0 \cdot \sin pt$

$F_0=20$ Н

$p=8$ рад/с

Начальные условия: $t = 0$

$q(0)=q_0=0{,}1$ рад

$\dot{q}(0) = \dot{q}_0 = 1$ рад/с

Получить дифференциальное уравнение движения механической системы и решить его. Определить период установившихся вынужденных колебаний $\tau_в$ и добротность системы Д. При малом сопротивлении определить также условный период затухающих колебаний τ_1, логарифмический декремент колебаний δ и постоянную времени для затухающих колебаний τ_0.

Второй этап – амплитуда вынужденных колебаний возрастает в два раза.

Третий этап – нет вынужденных колебаний.

Исследовать амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики.

Решение.

Вынужденные колебания с сопротивлением. Способ возмущения динамический - силой $F(t)$, приложенной к стержню 1.

Данная механическая система имеет одну степень свободы.

Она состоит из двух кривошипов 1, спарника 2, пружины 3 и демпфера 4.

Кинематические соотношения.

Кривошипы 1 – вращательное движение.

Обобщенная координата q (в дальнейшем φ) – определяет положение кривошипов 1.

Угловая скорость кривошипов 1 $\omega_1 = \dot{\varphi}$

Скорость точки A $v_A = \omega_1 \cdot OA = l\dot{\varphi}$

Спарник 2 – поступательное движение.

Скорость спарника 2 $v_2 = v_A = l\dot{\varphi}$

Силы механической системы.

$\overline{R}_4 = -\mu_4 \overline{v}_A$ *сила линейно-вязкого сопротивления демпфера*

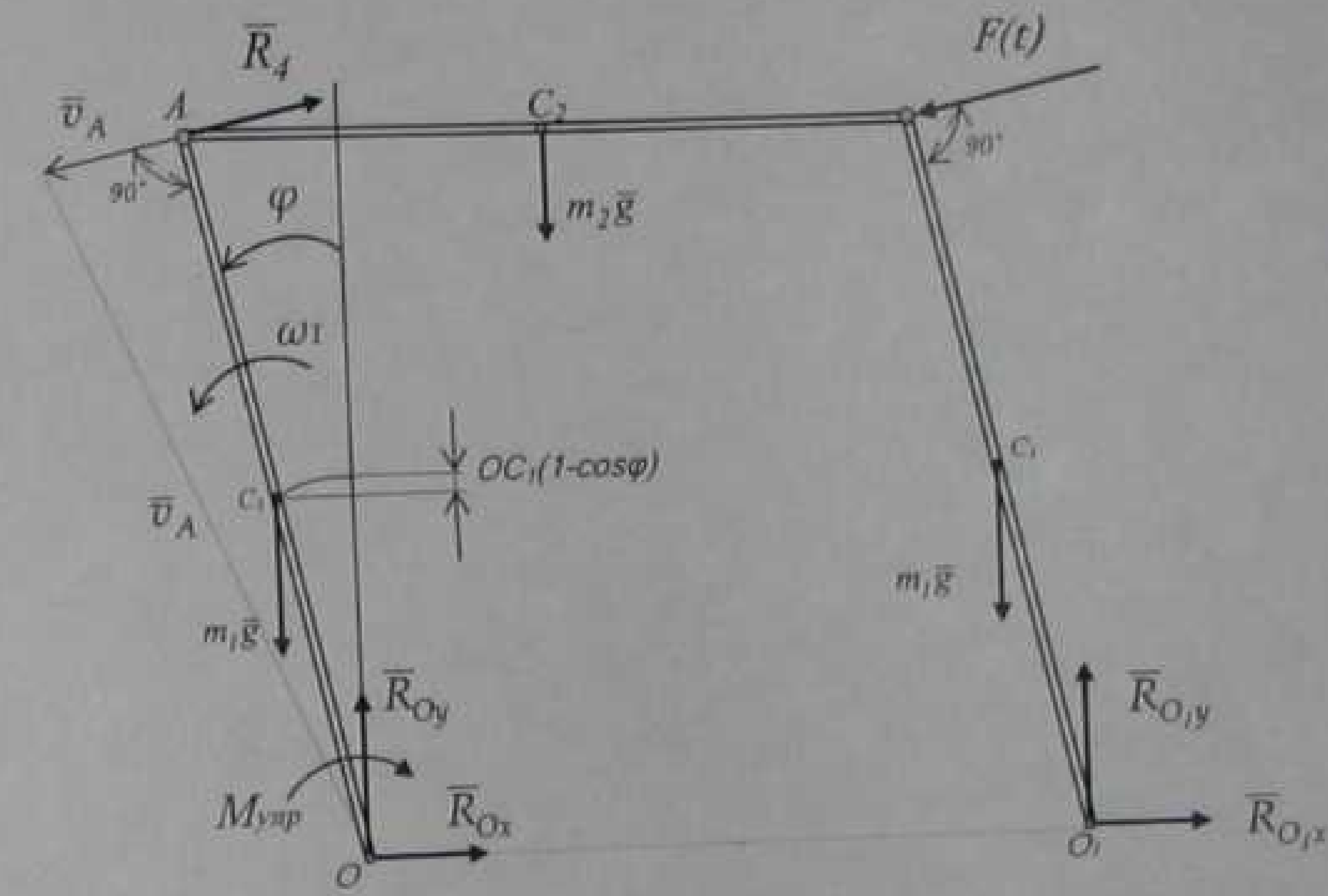
$M_{упр} = c_3 \cdot \Delta$ *момент спиральной пружины 3.*

$\Delta = \varphi$ *деформация пружины.*

$M_{упр} = c_3 \cdot \varphi$

Дифференциальное уравнение движения механической системы получим, используя уравнение Лагранжа 2-го рода для обобщенной координаты φ.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$



Кинетическая энергия механической системы $T = 2T_1 + T_2$

$T_1 = \frac{1}{2} I_{Oz}\omega_1^2$ кинетическая энергия вращательного движения кривошипа 1.

$I_{Oz} = \frac{m_1 (OA)^2}{3} = \frac{1}{3} m_1 l^2$ момент инерции кривошипа относительно оси вращения $O(z)$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{Oz}\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2$$

$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$ кинетическая энергия поступательного движения спарника 2.

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (l\dot{\varphi})^2$$

$$T = 2T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}m_1 + m_2)l^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}a\dot{\varphi}^2$$

$$a = (\frac{2}{3}m_1 + m_2)l^2 = (\frac{2}{3}\cdot 3 + 6)\cdot 0{,}5^2 = 2 \text{ кгм}^2$$

Обобщенный коэффициент инерции a = 2 кгм²

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a\dot{\varphi}\ , \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}) = a\ddot{\varphi}\ , \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

Обобщенная сила $Q = Q^{П} + Q^{Ф} + Q^{в}(t)$

Обобщенная потенциальная сила $Q^{П} = -\frac{\partial П}{\partial \varphi}$

Потенциальная энергия механической системы $П = 2П_1 + П_2 + П_3$

Потенциальная энергия силы тяжести кривошипа 1

$$П_1 = -m_1 g(OC_1 - OC_1\cos\varphi) = -m_1 g\frac{l}{2}(1-\cos\varphi)$$

Ввиду малости координаты φ $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, $1 - \cos\varphi = \frac{\varphi^2}{2}$

$$П_1 = -m_1 g\frac{l}{2}\frac{\varphi^2}{2}$$

Потенциальная энергия силы тяжести спарника 2

$$П_2 = -m_2 g(OA - OA\cos\varphi) = -m_2 gl(1-\cos\varphi)$$

$П_3 = \frac{1}{2}c_3\Delta^2$ потенциальная энергия силы упругости пружины 3.

$\Delta = \varphi$ деформация пружины.

$$П = 2П_1 + П_2 + П_3 = -(m_1 + m_2)gl\frac{\varphi^2}{2} + \frac{1}{2}c_3\varphi^2 = \frac{1}{2}[c_3 - (m_1 + m_2)gl]\varphi^2 = \frac{1}{2}c\varphi^2$$

$$c = c_3 - (m_1 + m_2)gl = 244{,}1 - 9\cdot 9{,}8\cdot 0{,}5 = 200 \text{ Нм}$$

Обобщенный коэффициент жесткости c = 200 Нм

$$Q^{П} = -\frac{\partial П}{\partial \varphi} = -c\varphi$$

Обобщенная диссипативная сила $Q^{Ф} = -\frac{\partial Ф}{\partial \dot{\varphi}}$

Диссипативная функция Рэлея $Ф = \frac{1}{2}\mu_4 v_A^2 = \frac{1}{2}\mu_4(l\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}b\dot{\varphi}^2$

$b = \mu_4 l^2 = 96\cdot 0{,}5^2 = 24$ Нсм

Обобщенный коэффициент сопротивления б =24 Нсм

$$Q^{Ф} = -\frac{\partial Ф}{\partial \dot{\varphi}} = -b\dot{\varphi}$$

Обобщенная возмущающая сила

$$Q^{в}(t) = \frac{F(t)\cdot \delta r_B}{\delta\varphi} = \frac{F(t)\cdot l\delta\varphi}{\delta\varphi} = F(t)\cdot l = F_0 l\sin pt = H\sin pt$$

$Q^{в}(t) = H\sin pt$, где $H = F_0 l = 20\cdot 0{,}5 = 10$ Нм

Амплитуда обобщенной возмущающей силы H = 10 Нм

Получаем дифференциальное уравнение движения механической системы

$a\ddot{\varphi} = -c\varphi - b\dot{\varphi} + H\sin pt$, или $a\ddot{\varphi} + в\dot{\varphi} + c\varphi = H\sin pt$

Разделив на a, получим канонический вид дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = h\sin pt \quad (1)$$

$n = b/2a = \frac{24}{4} = 6 \ \frac{рад}{с}$ коэффициент затухания колебаний

$k = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \ \frac{рад}{с}$ собственная частота колебаний

/ без учета сопротивления /

$h = \frac{H}{a} = \frac{10}{2} = 5 \ \frac{рад}{с^2}$

$n < k$ имеем случай малого сопротивления

Решение неоднородного дифференциального уравнения (1) ищем в виде

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

φ_1 - общее решение однородного дифференциального уравнения

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$

Корни характеристического уравнения

$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm ik_1$ комплексные

k_1 условная частота затухающих колебаний

$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \ \frac{рад}{с}$

Для комплексных корней вид общего решения однородного уравнения

$$\varphi_1 = e^{-nt}(c_1\cos k_1 t + c_2\sin k_1 t)$$

Частное решение неоднородного уравнения $\varphi_2 = D\sin(pt - \varepsilon)$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$D = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{5}{\sqrt{(10^2 - 8^2)^2 + 4\cdot 6^2\cdot 8^2}} = 0{,}0488 \text{ рад}$$

Сдвиг фаз между фазой силы F(t) и фазой вынужденных колебаний (отставание фазы вынужденных колебаний от фазы возмущающей силы F(t))

$$\varepsilon = arctg\frac{2np}{k^2-p^2} = arctg\frac{2\cdot 6\cdot 8}{10^2-8^2} = 1{,}212 \text{ рад}$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\varphi = e^{-nt}(c_1\cos k_1t + c_2\sin k_1t) + D\sin(pt-\varepsilon)$$

$$\dot\varphi = -ne^{-nt}(c_1\cos k_1t + c_2\sin k_1t) + k_1e^{-nt}(-c_1\sin k_1t + c_2\cos k_1t) + Dp\cos(pt-\varepsilon)$$

Начальные условия: $t = 0$ с; $\varphi(0) = \varphi_0 = 0{,}1$ рад; $\dot\varphi(0) = \dot\varphi_0 = 1$ рад/с

$$\varphi_0 = c_1 + D\sin(-\varepsilon)\ ,\ c_1 = \varphi_0 + D\sin\varepsilon = 0{,}1 + 0{,}0488\cdot 0{,}936 = 0{,}1457 \text{ рад}$$

$$\dot\varphi_0 = -n\cdot c_1 + k_1\cdot c_2 + Dp\cos(-\varepsilon)$$

$$c_2 = \frac{\dot\varphi_0 + n\cdot c_1 - Dp\cos\varepsilon}{k_1} = \frac{1 + 6\cdot 0{,}1457 - 0{,}0488\cdot 8\cdot 0{,}351}{8} = 0{,}2171 \text{ рад}$$

Кинематическое уравнение движения механической системы в амплитудном виде

$$\varphi = Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha) + D\sin(pt-\varepsilon)$$

$$A = \sqrt{c_1^2+c_2^2} = \sqrt{0{,}1457^2+0{,}2171^2} = 0{,}2615 \text{ рад}$$

Ae^{-nt} - *условная амплитуда затухающих колебаний*

$$\alpha = arctg\frac{c_1}{c_2} = arctg\frac{0{,}1457}{0{,}2171} = 0{,}591 \text{ рад}$$

$$\varphi = 0{,}261e^{-6t}\sin(8t+0{,}591) + 0{,}0488\sin(8t-1{,}212) \quad (\text{рад})$$

условный период затухающих колебаний $\tau_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{6{,}2832}{8} = 0{,}785$ с

постоянная времени для затухающих колебаний $\tau_0 = \frac{1}{n} = \frac{1}{6} = 0{,}167$ с

логарифмический декремент колебаний $\delta = n\tau_1 = 6\cdot 0{,}785 = 4{,}712$

добротность системы $Д = \frac{k}{2n} = \frac{10}{12} = 0{,}833$

период установившихся вынужденных колебаний $\tau_в = \frac{2\pi}{p} = \frac{6{,}2832}{8} = 0{,}785$ с

время переходного процесса к установившимся вынужденным колебаниям

$$t^* \approx 3\tau_0 + 2\tau_в = 3\cdot 0{,}167 + 2\cdot 0{,}785 = 2{,}071 \text{ с}$$

Для конца первого этапа имеем:

$$\varphi(t^*) = Ae^{-nt^*}\sin(k_1t^*+\alpha) + D\sin(pt^*-\varepsilon)$$

$$\dot\varphi(t^*) = Ae^{-nt^*}[-n\cdot\sin(k_1t^*+\alpha) + k_1\cdot\cos(k_1t^*+\alpha)] + Dp\cos(pt^*-\varepsilon)$$

$$\varphi(t=t^*) = 0{,}261e^{-6t^*}\sin(8t^*+0{,}591) + 0{,}0488\sin(8t^*-1{,}212) = 0{,}0168 \text{ рад}$$

$$\dot\varphi(t=t^*) = 0{,}261e^{-6t^*}[-6\sin(8t^*+0{,}591) + 8\cos(8t^*+0{,}591) + 0{,}3904\cos(8t^*-1{,}212) = -0{,}36646 \text{ рад/с}$$

Второй этап движения механической системы.

Начало второго этапа $t = t^* = 2{,}071$ с ($t_1 = t - t^* = 0$). *Для времени* $t_1 = t - t^*$ *амплитуда вынужденных колебаний возрастает в два раза* $D^* = 2D = 0{,}097534$ рад.

Начальные условия второго этапа: при $t = t^* = 2{,}071$ с ($t_1 = 0$)

Начальные условия:

$$t_1 = 0\ \ (t = t^*)\ с;\ \ \varphi(t=t^*) = \varphi_{01} = 0{,}0168 \text{ рад};\ \ \dot\varphi(t^*) = \dot\varphi_{01} = -0{,}3665 \text{ рад/с}$$

$$\varphi_{01} = c_{12} + D^*\sin(-\varepsilon)\ ,\ c_{12} = \varphi_{01} + D^*\sin\varepsilon = 0{,}0168 + 0{,}0976\cdot 0{,}936 = 0{,}10815 \text{ рад}$$

$$\dot\varphi_{01} = -n\cdot c_{12} + k_1\cdot c_{22} + D^*p\cos(-\varepsilon)$$

$$c_{22} = \frac{\dot\varphi_{01} + n\cdot c_{12} - D^*p\cos\varepsilon}{k_1} = \frac{-0{,}3665 + 6\cdot 0{,}10815 - 0{,}0976\cdot 8\cdot 0{,}351}{8} = 0{,}00105 \text{ рад}$$

$$A_2 = \sqrt{c_{12}^2 + c_{22}^2} = 0{,}10816 \text{ рад} \qquad \alpha_2 = arctg\frac{c_{12}}{c_{22}} = 1{,}561 \text{ рад}$$

$$\varphi(t_1) = 0{,}10816e^{-6t_1}\sin(8t_1+0{,}591) + 0{,}0976\sin(8t_1-1{,}212) \quad (\text{рад})$$

Окончание второго этапа $t_1 = t^*$ ($t = 2t^*$)

$$\varphi(t_1=t^*) = 0{,}10816e^{-6t^*}\sin(8t^*+1{,}561) + 0{,}0976\sin(8t^*-1{,}212) = 0{,}03365 \text{ рад}$$

$$\dot\varphi(t_1=t^*) = 0{,}10816e^{-6t^*}[-6\sin(8t^*+1{,}561) + 8\cos(8t^*+1{,}561)] + 0{,}7808\cos(8t^*-1{,}212) = -0{,}733 \text{ рад/с}$$

Третий этап движения механической системы.

Начало третьего этапа $t_1 = t^* = 2{,}071$ с ($t_2 = t_1 - t^* = t - 2t^* = 0$). *Для времени* $t_2 = t_1 - t^*$ *вынужденные колебания прекращаются. Имеем собственные колебания с сопротивлением. Амплитуда вынужденных колебаний равна нулю.*

$$\varphi(t_2) = e^{-nt_2}(c_{13}\cos k_1t_2 + c_{23}\sin k_1t_2)$$

$$\dot\varphi(t_2) = e^{-nt_2}[-n(c_{13}\cos k_1t_2 + c_{23}\sin k_1t_2) + k_1(-c_{13}\sin k_1t_2 + c_{23}\cos k_1t_2)]$$

Начальные условия: при $t_1 = t^*$, *или* $t = 2t^* = 4{,}142$ с ($t_2 = 0$)

$$\varphi(t_2=0) = \varphi_{02} = 0{,}03365 \text{ рад};\quad \dot\varphi(t_2=0) = \dot\varphi_{02} = -0{,}733 \text{ рад/с}$$

$$\varphi_{02} = c_{13}\ ,\ c_{13} = \varphi_{02} = 0{,}03365 \text{ рад}$$

$$\dot\varphi_{02} = -n\cdot c_{13} + k_1\cdot c_{23}$$

$$c_{23} = \frac{\dot\varphi_{02} + n\cdot c_{13}}{k_1} = \frac{-0{,}733 + 6\cdot 0{,}03365}{8} = -0{,}0664 \text{ рад}$$

$$A_3 = \sqrt{c_{13}^2 + c_{23}^2} = 0{,}0744 \text{ рад} \qquad \alpha_3 = arctg\frac{c_{13}}{c_{23}} = 2{,}6725 \text{ рад}$$

$$\varphi(t_2) = 0{,}0744e^{-6t_2}\sin(8t_2+2{,}6725) \quad (\text{рад})$$

Строим графики $\varphi(t)$ *для интервала времени* $0 \le t \le 3t^*$

Исследование установившихся вынужденных колебаний.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$\lambda = \dfrac{D}{D_{cm}}$, *где* $D = \dfrac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$ *амплитуда вынужденных колебаний*

при переменной частоте возмущения p

$D_{cm} = D(p = 0) = \dfrac{h}{k^2}$

$\lambda = \dfrac{k^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \lambda(p)$

Обозначим

$d = \dfrac{2n}{k} = \dfrac{12}{10} = 1{,}2$ *безразмерный коэффициент сопротивления*

$z = \dfrac{p}{k}$ *коэффициент расстройки, где p – частота возмущения, она*

переменная $(0 \le p \le 6k)$ $k = 10\ \dfrac{рад}{c}$ *собственная частота колебаний*

$\lambda(z) = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}}$

при $z = 0$ $\lambda = 1$

так как $d < \sqrt{2}$, *то* $\lambda_{\max} = \dfrac{Д}{\sqrt{1 - d^2/4}} = \dfrac{0{,}875}{\sqrt{1 - 1{,}2^2/4}} = 1{,}042$

при $z = z^* = \sqrt{1 - d^2/2} = \sqrt{1 - 1{,}2^2/2} = 0{,}529$

при $z = 1$ *(*$p = k$*, резонанс)* $\lambda = Д = 0{,}833$

при $z \to \infty$ $\lambda \to 1$

Строим график $\lambda(z)$ *для* $0 \le z \le 3$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$\varepsilon(p) = arctg\dfrac{2np}{k^2 - p^2}$ *или* $\varepsilon(z) = arctg\dfrac{d \cdot z}{1 - z^2}$

при $z = 0$ $\varepsilon = 0$

при $z = 1$ *(резонанс* $k = p$*)* $\varepsilon = \pi/2 = 1{,}5708$ *рад*

при $z \to \infty$ $\varepsilon \to \pi$

Строим график $\varepsilon(z)$ *для* $0 \le z \le 3$