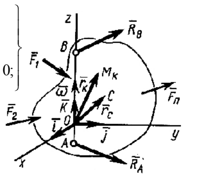
1. Определение реакций подшипников твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
В соответствии с принципом Даламбера:



$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k+\bar{R}_A+\bar{R}_B+\bar{\Phi}=0;\\&\sum_{k=1}^{N}\bar{M}_O\left(\bar{F}_k\right)+\bar{M}_O\left(\bar{R}_A\right)+\bar{M}_O\left(\bar{R}_B\right)+\bar{L}_O^{(\Phi)}=0;\end{aligned}\right\}$$

$$\bar{\Phi}=\sum_{k=1}^{N}\bar{\Phi}_k=\sum_{k=1}^{N}\left(-m_k\bar{a}_k\right)-M\bar{a}_C;$$

$$\bar{a}_k=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_k+\bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}_k\right);$$

$$\bar{\omega}\times\bar{r}_C=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&0&\omega\\x_C&y_C&z_C\end{vmatrix}=\bar{i}\left(-\omega y_C\right)+\bar{j}\left(\omega x_C\right)+\bar{k}0;$$

$$\bar{a}_C=\bar{\varepsilon}\times\bar{r}_C+\bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}_C\right)=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&0&\varepsilon\\x_C&y_C&z_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&0&\omega\\-\omega y_C&\omega x_C&0\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\left(-\varepsilon y_C-\omega^2x_C\right)+\bar{j}\left(\varepsilon x_C-\omega^2y_C\right)+\bar{k}0;$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_x&=-Ma_{Cx}=My_C\varepsilon+Mx_C\omega^2;\\\Phi_y&=-Ma_{Cy}=-Mx_C\varepsilon+My_C\omega^2;\\\Phi_z&=-Ma_{Cz}=0.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{kx}&=-m_ka_{kx}=m_ky_k\varepsilon+m_kx_k\omega^2;\\\Phi_{ky}&=-m_ka_{ky}=-m_kx_k\varepsilon+m_ky_k\omega^2;\\\Phi_{kz}&=-m_ka_{kz}=0.\end{aligned}\right\}$$

$$L_x^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N}\left(y_k\Phi_{kz}-z_k\Phi_{ky}\right)=\varepsilon\sum_{k=1}^{N}m_kx_kz_k-\omega^2\sum_{k=1}^{N}m_ky_kz_k=\varepsilon I_{xz}-\omega^2I_{yz};$$

$$L_x^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N}\left(z_k\Phi_{kx}-x_k\Phi_{kz}\right)=\varepsilon\sum_{k=1}^{N}m_ky_kz_k+\omega^2\sum_{k=1}^{N}m_kx_kz_k=\varepsilon I_{yz}+\omega^2I_{xz};$$

$$L_x^{(\Phi)}=\sum_{k=1}^{N}\left(x_k\Phi_{ky}-y_k\Phi_{kx}\right)=-\varepsilon\sum_{k=1}^{N}m_k\left(x_k^2+y_k^2\right)=-\varepsilon I_z;$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N}F_{kx}+X_A+X_B+My_C\varepsilon+Mx_C\omega^2=0\\&\sum_{k=1}^{N}F_{ky}+Y_A+Y_B-Mx_C\varepsilon+My_C\omega^2=0\\&\sum_{k=1}^{N}F_{kz}+Z_A+Z_B=0\\&\sum_{k=1}^{N}M_x\left(\bar{F}_k\right)+Y_Ah_A-Y_Bh_B+\varepsilon I_{xz}-\omega^2I_{yz}=0\\&\sum_{k=1}^{N}M_y\left(\bar{F}_k\right)-X_Ah_A+X_Bh_B+\varepsilon I_{yz}+\omega^2I_{xz}=0\\&\sum_{k=1}^{N}M_z\left(\bar{F}_k\right)-\varepsilon I_z=0\end{aligned}\right\}\quad(*)$$

$$\bar{R}_A=\bar{R}_A^{cm}+\bar{R}_A^{o};\quad\bar{R}_B=\bar{R}_B^{cm}+\bar{R}_B^{o};$$

Статистическими реакциями называет части полных реакций, которые статистически уравновешивают внешние силы. Уравнения для них получим из системы (*), положив в нее ε=0 и ω=0:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N}F_{kx}+X_A^{cm}+X_B^{cm}=0\\&\sum_{k=1}^{N}F_{ky}+Y_A^{cm}+Y_B^{cm}=0\\&\sum_{k=1}^{N}F_{kz}+Z_A^{cm}+Z_B^{cm}=0\\&\sum_{k=1}^{N}M_x\left(\bar{F}_k\right)+Y_A^{cm}h_A-Y_B^{cm}h_B=0\\&\sum_{k=1}^{N}M_y\left(\bar{F}_k\right)-X_A^{cm}h_A+X_B^{cm}h_B=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{в векторной форме}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k+\bar{R}_A^{cm}+\bar{R}_B^{cm}=0\\&\sum_{k=1}^{N}\bar{M}_O\left(\bar{F}_k\right)+\bar{M}_O\left(\bar{R}_A^{cm}\right)+\bar{M}_O\left(\bar{R}_B^{cm}\right)=0\end{aligned}\right\}$$

Части полных реакций, которые уравновешивают силы инерции называют динамическими реакциями. Уравнения для них мы получим из первых пяти уравнений системы (*), если учтем, что приложенные внешние силы уравновешены статическими реакциями:

$$\left.\begin{aligned}&X_A^o+X_B^o+My_C\varepsilon+Mx_C\omega^2=0\\&Y_A^o+Y_B^o-Mx_C\varepsilon+My_C\omega^2=0\\&Y_A^oh_A-Y_B^oh_B+\varepsilon I_{xz}-\omega^2I_{yz}=0\\&-X_A^oh_A+X_B^oh_B+\varepsilon I_{yz}+\omega^2I_{xz}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{в векторной форме}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\bar{R}_A^o+\bar{R}_B^o+\bar{\Phi}=0\\&\bar{M}_O\left(\bar{R}_A^o\right)+\bar{M}_O\left(\bar{R}_B^o\right)+\bar{L}_O^{(\Phi)}\end{aligned}\right\}$$

$$\bar{L}_0^{\Phi}=-\frac{d\bar{K}_0}{dt}=\ldots\quad\bar{K}_0=\left[I\right]\bar{\omega}=\begin{bmatrix}K_x\\K_y\\K_z\end{bmatrix}\quad\ldots\quad\frac{\tilde{d}\bar{K}_0}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{K}_0$$

2. Понятие статической и динамической уравновешенности твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
Тело, имеющее неподвижную ось вращения, называют *статически уравновешенным*, если ц.м. этого тела находится на оси вращения.
Т. о. для тела с осью вращения Oz координаты ц.м. $x_C=y_C=0$ и из первых двух уравнений системы

$$\left.\begin{aligned}&X_A^o+X_B^o+My_C\varepsilon+Mx_C\omega^2=0\\&Y_A^o+Y_B^o-Mx_C\varepsilon+My_C\omega^2=0\\&Y_A^oh_A-Y_B^oh_B+\varepsilon I_{xz}-\omega^2I_{yz}=0\\&-X_A^oh_A+X_B^oh_B+\varepsilon I_{yz}+\omega^2I_{xz}=0\end{aligned}\right\}(*)\quad\text{имеем:}$$

$$X_A^o+X_B^o=0;\quad Y_A^o+Y_B^o=0;(**)\text{ или }\bar{R}_A^o=-\bar{R}_B^o;$$

Динамические реакции для статически уравновешенного тела образуют пару сил. Пара сил может уравновешиваться только парой сил. Следовательно, силы инерции точек тела, уравновешивающие динамические реакции, в этом случае тоже приводят к одной паре сил. Используя ур-я (**), из двух последних уравнений системы (*) получим:

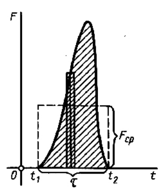
$$X_A^o=-X_B^o=\frac{\varepsilon I_{yz}+\omega^2I_{xz}}{h_A+h_B};\quad -Y_A^o=Y_B^o=\frac{\varepsilon I_{xz}-\omega^2I_{yz}}{h_A+h_B};\quad\text{и}$$

$$R_A^o=R_B^o=\frac{1}{h_A+h_B}\sqrt{\left(\varepsilon^2+\omega^4\right)\left(I_{yz}^2+I_{xz}^2\right)}\quad(***),\ \text{где}$$

$$R_A^o=\sqrt{\left(X_A^o\right)^2+\left(Y_A^o\right)^2}\ \text{ и }\ R_B^o=\sqrt{\left(X_B^o\right)^2+\left(Y_B^o\right)^2};$$

Динамической уравновешенностью называется случай обращения в нуль динамических реакций. Динамические реакции обратятся в нуль, как следует из (***), если равны нулю центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz}, т.е. дополнительно к статической уравновешенности ось вращения Oz должна быть главной осью инерции для любой точки О на этой оси. Т.к. центр масс в этом случае расположен на этой оси , то *ось вращения при динамической уравновешенности является главной центральной осью инерции.* Главный вектор и момент сил инерции $L_x^{(\Phi)}$ и $L_y^{(\Phi)}$ равны 0. Момент сил инерции $L_z^{(\Phi)}$ не обязательно равен нулю. Главную центральную ось вращения называют *свободной осью* вращения – свободной от динамических реакций опор.

3. Основные положения теории удара.
Ударом называют явление, при котором за малый промежуток времени (почти мгновенно) скорости части или всех точек системы изменяются на конечные величины по сравнению с их значениями непосредственно перед ударом или после него.



Изменение скоростей точек при ударе на конечные величины связано с большими ударными ускорениями этих точек, возникновение которых требует больших ударных сил. *Ударным импульсом* называют векторную величину $\bar{S}=\int_0^{\tau}\bar{F}dt$. На рисунке ударный импульс – заштрихованная область.
Средняя ударная сила – постоянная в течении удара сила, которая за время удара дает такой же импульс, как и переменная ударная сила. Ср. уд. Сила определяется из соотношения: $F_{cp}\tau=S$. Ср. уд. сила имеет величину порядка 1/τ. Импульс *неударной силы* за время удара имеет порядок величины τ, т.е. является величиной малой по сравнению с ударными силами. Поэтому *импульсами неударных сил можно пренебрегать по сравнению с ударными импульсами.*
Вследствие малости деформации по сравнению с перемещением точек тел за конечный промежуток времени, перемещения точек тела за время удара являются величинами малыми. Поэтому *перемещениями точек за время удара можно пренебречь.* Т.е. за время удара точки системы не успевают изменить свое положение => радиус-векторы и координаты не меняются.

4. Теорема об изменении количества движения точки и системы точек при ударе.
До удара точка М массой m двигалась по АМ со ск-тью v. Под действием ударной силы F и неударной F* точка изменила свою ск-ть на u. По теореме изменения движения для точки в интегральной форме имеем:

$$m\bar{u}-m\bar{v}=\int_0^{\tau}\bar{F}dt+\int_0^{\tau}\bar{F}^*dt\ =>m\bar{u}-m\bar{v}=\bar{S};\quad\text{Т.к. }\int_0^{\tau}\bar{F}^*dt\approx0$$

Т.е. *изменение количества движения точки за время удара равно ударному импульсу, приложенному к точке* – теорема об изменении количества движения точки при ударе.

$$m_k\bar{u}_k-m_k\bar{v}_k=\bar{S}_k^{(e)}+\bar{S}_k^{(i)}\Rightarrow\sum_k m_k\bar{u}_k-\sum_k m_k\bar{v}_k=\sum_k\bar{S}_k^{(e)}+\sum_k\bar{S}_k^{(i)};$$

$$\text{Пусть }\bar{Q}=\sum_k m_k\bar{u}_k\text{ и }\bar{Q}_0=\sum_k m_k\bar{v}_k;\ \sum_k\bar{S}_k^{(i)}=0\Rightarrow\bar{Q}-\bar{Q}_0=\sum_k\bar{S}_k^{(e)};$$

это есть теорема об изменении количества движения системы при ударе: *изменение количества движения системы за время удара равно векторной сумме внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.* Теорема о движении центра масс системы:

$$\text{Если }\bar{Q}=M\bar{u}_C\text{ и }\bar{Q}_0=M\bar{v}_C,\text{ то }M\left(\bar{u}_C-\bar{v}_C\right)=\sum_k\bar{S}_k^{(e)};$$

Частные случаи:
1. $\sum_k\bar{S}_k^{(e)}=0\Rightarrow\bar{Q}_0=\bar{Q}\Rightarrow\bar{u}_C=\bar{v}_C$, т.е. количество движения и скорость ц.м. не изменяются, если векторная сумма внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, равна 0.
2. $\sum_k\bar{S}_{kx}^{(e)}=0\Rightarrow\bar{Q}_{0x}=\bar{Q}_x\Rightarrow\bar{u}_{Cx}=\bar{v}_{Cx}$

5. Теорема об изменении кинетического момента точки и механической системы при ударе.
По теореме об изменении количества движения для точки имеем:

$$m\bar{u}-m\bar{v}=\bar{S}\Rightarrow\bar{r}\times m\bar{u}-\bar{r}\times m\bar{v}=\bar{r}\times\bar{S}$$

Это соотношение выражает теорему об изменении кинетического момента для точки при ударе.

$$\bar{r}_k\times m_k\bar{u}_k-\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k=\bar{r}_k\times\bar{S}_k^{(e)}+\bar{r}_k\times\bar{S}_k^{(i)}$$

$$\bar{K}_O-\bar{K}_O^{(0)}=\sum_k\bar{M}_O\left(\bar{S}_k^{(e)}\right),\ \text{т.к. }\bar{K}_O=\sum_k\bar{r}_k\times m_k\bar{u}_k;\ \bar{K}_O^{(0)}=\sum_k\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k;$$

$$\sum_k\bar{r}_k\times\bar{S}_k^{(e)}=\sum_k\bar{M}_O\left(\bar{S}_k^{(e)}\right);\ \sum_k\bar{r}_k\times\bar{S}_k^{(i)}=\sum_k\bar{M}_O\left(\bar{S}_k^{(i)}\right)=0\ \text{по св-ву}$$

внутренних сил.
Т.о., *изменение кинетического момента системы относительно точки за время удар равно векторной сумме моментов относительно той же точки внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.*
Частные случаи:
1. $\sum_k\bar{M}_O\left(\bar{S}_k^{(e)}\right)=0\Rightarrow\bar{K}_O=\bar{K}_O^{(0)}=\overline{const}$
2. $\sum_k\bar{M}_x\left(\bar{S}_k^{(e)}\right)=0\Rightarrow\bar{K}_x=\bar{K}_x^{(0)}=\overline{const}$

6. Изменение угловой скорости при ударе по вращающемуся твердому телу.
Если удар испытывает твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Oz, и ω_0 и ω – угловые скорости до и после удара, то:
$K_z=I_z\omega;\quad K_z^{(0)}=I_z\omega_0$, где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения. Из теоремы об изменении кинетического момента системы при ударе получим:

$$I_z\left(\omega-\omega_0\right)=\sum_k M_z\left(\bar{S}_k^{(e)}\right)\ \text{или}\ \left(\omega-\omega_0\right)=\sum_k M_z\left(\bar{S}_k^{(e)}\right)/I_z$$

В это уравнение не входят моменты ударных импульсов реакций закрепленных точек оси вращения, т.к. они пересекают ось вращения, если не возникают ударные импульсы сил трения в местах закрепления оси.

7. Центр удара. Условия отсутствия ударных реакций в опорах вращающегося тела.
Пусть тело закреплено в точка А и В и вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью до удара ω_0. Освободив тело от связей и заменив их импульсами реакций S_A и S_B, применим к явлению удара теоремы об изменении количества движения и кинетического момента:

$$\left.\begin{aligned}&\bar{Q}-\bar{Q}_0=\sum_k\bar{S}_k^{(e)}=\bar{S}+\bar{S}_A+\bar{S}_B;\\&\bar{K}-\bar{K}_0=\sum_k\bar{M}_0\left(\bar{S}_k^{(e)}\right)=\bar{M}_0\left(\bar{S}\right)+\bar{M}_0\left(\bar{S}_A\right)+\bar{M}_0\left(\bar{S}_B\right)\end{aligned}\right\}\quad(*)$$

Из формулы Эйлера имеем: $\bar{v}_k=\bar{\omega}\times\bar{r}_k\Rightarrow\bar{Q}=M\bar{v}_C=M\left(\bar{\omega}\times\bar{r}_C\right);$
Т.к. $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_0$ направлены по оси вращения, то:

$$\bar{Q}-\bar{Q}_0=M\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\0&0&\omega-\omega_0\\x_C&y_C&z_C\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\bar{i}\left[-y_C\left(\omega-\omega_0\right)\right]+\bar{j}\left[x_C\left(\omega-\omega_0\right)\right]+\bar{k}\cdot0\right\}M;\quad(**)$$

Проекции кинетического момента на оси координат можно определить по формулам для тела, имеэщего одну закрепленную точку, но при условии $\omega_x=\omega_y=0$ и $\omega_z=\omega$:

$$\left.\begin{aligned}K_x&=I_x\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z=-I_{xz}\omega_z;\\K_y&=-I_{yx}\omega_x+I_y\omega_y-I_{yz}\omega_z=-I_{yz}\omega_z;\\K_z&=-I_{zx}\omega_x-I_{zy}\omega_y+I_z\omega_z=I_z\omega_z;\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

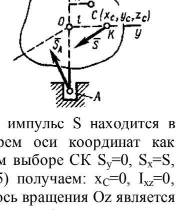
$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}K_x-K_{0x}&=-I_{xz}\left(\omega-\omega_0\right);\\K_y-K_{0y}&=-I_{yz}\left(\omega-\omega_0\right);\\K_z-K_{0z}&=I_z\left(\omega-\omega_0\right);\end{aligned}\right\}(***);\ \text{Проецируя (*) с учетом (**)}$$

и (***) получим:

$$\left.\begin{aligned}&-My_C\left(\omega-\omega_0\right)=S_x+S_{Ax}+S_{Bx};\\&Mx_C\left(\omega-\omega_0\right)=S_y+S_{Ay}+S_{By};\\&0=S_z+S_{Az};\\&-I_{xz}\left(\omega-\omega_0\right)=M_x\left(\bar{S}\right)+M_x\left(\bar{S}_A\right)+M_x\left(\bar{S}_B\right);\\&-I_{yz}\left(\omega-\omega_0\right)=M_y\left(\bar{S}\right)+M_y\left(\bar{S}_A\right)+M_y\left(\bar{S}_B\right);\\&I_z\left(\omega-\omega_0\right)=M_z\left(\bar{S}\right)+M_z\left(\bar{S}_A\right)+M_z\left(\bar{S}_B\right);\end{aligned}\right\}\quad(****)$$

Определим условия, при которых удар по телу не вызывает ударных реакций в подшипниках, т.е. $S_A=S_B=0$. Из (****):

$$\left.\begin{aligned}&-My_C\left(\omega-\omega_0\right)=S_x;\\&Mx_C\left(\omega-\omega_0\right)=S_y;\\&0=S_z;\\&-I_{xz}\left(\omega-\omega_0\right)=M_x\left(\bar{S}\right);\\&-I_{yz}\left(\omega-\omega_0\right)=M_y\left(\bar{S}\right);\\&I_z\left(\omega-\omega_0\right)=M_z\left(\bar{S}\right);\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

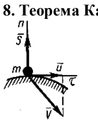


Из (5) следует: т.к. $S_z=0$, то ударный импульс S находится в плоскости, параллельной Oxy. Выберем оси координат как показано на рисунке (S||Ox). При таком выборе СК $S_y=0$, $S_x=S$, $M_x(S)=0$, $M_y(S)=0$. Учитывая это из (5) получаем: $x_C=0$, $I_{xz}=0$, $I_{yz}=0$, т.е. ц.м. находится в пл-ти Oyz и ось вращения Oz является главной осью инерции для точки О. Пусть OK=l, тогда:
$M_z\left(\bar{S}\right)=-lS$; Из 1го и 6го уравнения сис-мы (5) имеем:

$$l=OK=I_z/My_C;\quad\text{Пусть }y_C=h,\ \text{тогда: }l=I_z/\left(Mh\right);$$

Точка пересечения K линии действия ударного импульса с плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс при отсутствии ударных реакций в подшипниках, называется *центром удара*.

8. Теорема Карно.



Установим изменение кинетической энергии в случае абсолютно неупругого удара при мгновенном наложении связей для точки и системы в отсутствии ударного трения. По т. Об изм. кол-ва движ-я имеем: $m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}$ (*)

При отсутствии ударного трения ударный импульс направлен по нормали к поверхности. Ск-ть точки после такого удара направлена по касательной к пов-ти ($u_n=0$). В данном случае S и u взаимно перпендикулярны, поэтому $\bar{S}\cdot\bar{u}=0$.
Учитывая это умножим обе части (*) скалярно на u:
$-m\bar{v}\cdot\bar{u} + m\bar{u}^2 = 0$ При абсолютно неупругом ударе кин. эн-я точки уменьшится на

$$\frac{m\bar{v}^2}{2}-\frac{m\bar{u}^2}{2}=0;\Rightarrow \frac{m\bar{v}^2}{2}-\frac{m\bar{u}^2}{2}=\frac{m\bar{v}^2}{2}-\frac{m\bar{u}^2}{2}+\left(-m\bar{v}\cdot\bar{u}+m\bar{u}^2\right)=$$

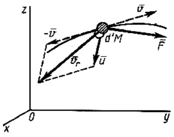
$$=\frac{m\bar{v}^2}{2}+\frac{m\bar{u}^2}{2}-m\bar{v}\cdot\bar{u}=\frac{m}{2}\left(\bar{v}-\bar{u}\right)^2;$$

Получена т. Карно для точки. Векторную вел-ну v-u называют *потерянной ск-тью.* Теорема Карно для точки: *потеря кинетической энергии точки при абсолютно неупругом ударе и отсутствии ударного трения в случае мгновенного наложения связей равна кинетической энергии от потерянной скорости.*

$$\frac{m_k\bar{v}_k^2}{2}-\frac{m_k\bar{u}_k^2}{2}=\frac{m_k}{2}\left(\bar{v}_k-\bar{u}_k\right)^2\Rightarrow T_0-T=\frac{1}{2}\sum_k m_k\left(\bar{v}_k-\bar{u}_k\right)^2$$

Теорема Карно для системы: *потеря кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе в случае мгновенного наложения связей и отсутствия ударного трения равна кинетической энергии от потерянных скоростей точек системы.*

9. Движение точки переменной массы. Дифуры движения.
В случае точки переменной массы кроме приложенной к точке силы F действуют силы, вызванные отделением от точки частицы массой d'M. Общее изменение скорости dv в течении времени dt равно сумме dv_1 (от силы F без учета изменения массв) и dv_2 (изменение массы без учета действия силы F).



$d\bar{v}_1 = \frac{\bar{F}}{M}dt;$

$d\bar{v}_2$ из теоремы об изменении количества движения: $\bar{Q}_t = \bar{Q}_{t+dt};$

$\bar{Q}_t = M\bar{v};$

$\bar{Q}_{t+dt} = \left(M-d'M\right)\left(\bar{v}+d\bar{v}_2\right)+\bar{u}d'M;$

$d'Md\bar{v}_2$ малое слагаемое второго порядка по сравнению со слагаемыми 1го порядка. $\Rightarrow d\bar{v}_2 = -\frac{d'M}{M}\left(\bar{u}-\bar{v}\right)$ $\left(d'M>0\right);$

или $d\bar{v}_2 = \frac{dM}{M}\left(\bar{u}-\bar{v}\right)$ $\left(dM<0\right);$

$$d\bar{v} = d\bar{v}_1 + d\bar{v}_2 = \frac{\bar{F}}{M}dt + \frac{dM}{M}\left(\bar{u}-\bar{v}\right)\Rightarrow \boxed{M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}+\frac{dM}{dt}\left(\bar{u}-\bar{v}\right)}$$

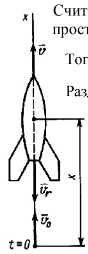
Получили дифференциальное уравнение Мещерского.
Если с точкой переменной массы связать подвижную СК, поступательно движущуюся отн. СК Oxyz, то
$\bar{u} = \bar{v}_e + \bar{v}_r;$ Т.к. в данном случае $\bar{v}_e = \bar{v}$, то относительная ск-ть отделившийся частицы $\bar{v}_r = \bar{u}-\bar{v}\Rightarrow M\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}+\frac{dM}{dt}\bar{v}_r;$

Пусть $\bar{\Phi}_r = \frac{dM}{dt}\bar{v}_r$ - реактивная сила $\left(\frac{dM}{dt}-\text{ск-ть изм. массы}\right)$.

Т.о. $\boxed{M\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}+\bar{\Phi}_r}$; $\bar{\Phi}_r \uparrow\downarrow \bar{v}_r;$

Из этого следует, что дифференциальные уравнения движения точки переменной массы имеют такой же вид, как и для точки постоянной массы, только кроме приложенных к точке сил действует дополнительно реактивная сила, обусловленная изменением массы точки.

10. 1-я и 2-я задачи К.Э. Циолковского.
1ая задача:



Считаем, что точка (ракета) движется в свободном пространстве под действием только реактивной силы.

Тогда: $M\frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt}v_r$ (проекция дифура движ-я на Ox)

Разделяя переменные и интегрируя обе части получим:

$$\frac{1}{v_r}\int_{v_0}^{v}dv = -\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}\Rightarrow v = v_0 + v_r\ln\frac{M_0}{M}\quad (*)$$

Пусть M_P - масса ракеты без топлива и m - масса топлива, то для ск-ти движ-я v_1 конца горения:

$$v_1 = v_0 + v_r\ln\left(1+\frac{m}{M_P}\right)\Rightarrow v_1 = v_0 + v_r\ln\left(1+Z\right),$$

где $Z-$ число Циолковского.

Т.о. скорость в конце горения не зависит от закона горения, т.е. закона изменения массы.

Из (*) имеем: $\frac{dx}{dt} = v_0 + v_r\ln\frac{M_0}{M}\Rightarrow x = v_0t + v_r\int_0^t\ln\frac{M_0}{M}dt;$

Для линейного закона изменения массы ($M = M_0\left(1-\alpha t\right)$) имеем:

$x = v_0t + \frac{v_r}{\alpha}\left[\left(1-\alpha t\right)\ln\left(1-\alpha t\right)+\alpha t\right];$ Для показательного закона изменения массы ($M = M_0e^{-\alpha t}$) имеем: $x = v_0t + \frac{\alpha v_rt^2}{2};$

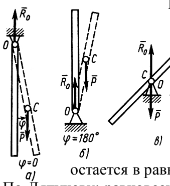
2ая задача:
Если точка переменной массы движется вертикально вверх вблизи пов-ти Земли, то считая поле Земли однородным (g=const) и пренебрегая сопротивл. воздуха, а также учитывая все предположения 1ой задачи, получаем дифур движения точки:

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg-\frac{dM}{dt}v_r\Rightarrow v = v_0 - gt + v_r\ln\frac{M_0}{M}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = v_0t-\frac{gt^2}{2}+v_r\int_0^t\ln\frac{M_0}{M}dt;\ \text{При } M = M_0e^{-\alpha t}: x = v_0t-\frac{gt^2}{2}+\frac{\alpha v_rt^2}{2};$$

$$\text{При } M = M_0\left(1-\alpha t\right): x = v_0t-\frac{gt^2}{2}+\frac{v_r}{\alpha}\left[\left(1-\alpha t\right)\ln\left(1-\alpha t\right)+\alpha t\right];$$

11. Устойчивость положения равновесия механической системы.



Если существует такое достаточно малое начальное отклонение стержня от положения равновесия, при котором силы стремятся вернуть стержень в положение равновесия, то такое положение равновесия считается *устойчивым;* Если силы отклоняют стержень еще сильнее – *неустойчивое*; если стержень после отклонения остается в равновесном положение – *безразличное*;

По Ляпунову: равновесие системы называется устойчивым, если для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ можно выбрать два других таких малых числа $\eta_1>0$ и $\eta_2>0$, что при удовлетворении начальными значениями обобщенных координат и скоростей неравенств $|q^0_i|<\eta_1$, $|\dot{q}^0_i|<\eta_2$ в любой момент времени все обобщенные координаты подчиняются условиям $|q_i(t)|<\varepsilon$.

Т. Лагранжа-Дирихле устанавливает достаточные условия устойчивости положения равновесия системы. Т. утверждает:

Для устойчивости положения равновесия системы, подчиненной голономным, идеальным, стационарным и неосвобождающим связям и находящейся в стационарном потенциальном силовом поле, достаточно, чтобы потенциальная энергия в положении равновесия имела изолированный относительный минимум.

Доказательство:

14. Влияние сил вязкого сопротивления на устойчивость положения механической системы.

Теорема Кельвина.

1) Наличие сил сопротивления в консервативной механической системе с устойчивым положением равновесия, не меняет устойчивого характера положения равновесия.

2) Учет сил сопротивления в консервативной механической системе усиливает устойчивость положения равновесия.

3) Добавление сил сопротивления к консервативной механической системе с неустойчивым положением равновесия не делает это положение устойчивым.

15. Дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы в случае малых отклонений от устойчивого положения равновесия.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q^{\Pi};\quad Q^{\Pi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q};\quad \Pi=\frac{1}{2}cq^2;\quad T=\frac{1}{2}a\dot q^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q}=a\dot q;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)=a\ddot q;\quad \frac{\partial T}{\partial q}=0;\quad \frac{\partial \Pi}{\partial q}=cq;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}\Rightarrow a\ddot q=-cq\Rightarrow a\ddot q+cq=0\Rightarrow \ddot q+k^2q=0,\text{ где } k-$$

круговая (цикличиская) частота колебаний: $k=\sqrt{\frac{c}{a}}$;

a – коэффициент инерции системы; c – жесткость.

16. Свободные колебания консервативной системы с одной степенью свободы. Элементы гармонических колебаний.

$Q^{\Phi}=0;\ Q^{B}=0;$

$a\ddot q+cq=0\Rightarrow \ddot q+k^2q=0\Rightarrow$ харак. ур-е $\Rightarrow \lambda^2+k^2=0\Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm ik$

Н.У.: $q(0)=q_0;\ \dot q(0)=\dot q_0;$

1) Тригонометрический:

$q=C_1\cos kt+C_2\sin kt;\quad \dot q=-k\left(C_1\sin kt-C_2\cos kt\right);$

$q_0=C_1;\ \dot q_0=kC_2\Rightarrow C_2=\frac{\dot q_0}{k};\ \Rightarrow\ q=q_0\cos kt+\frac{\dot q_0}{k}\sin kt;$

2) Амплитудный:

$$q=A\sin\left(kt+\alpha\right)=A\sin\alpha\cos kt+A\cos\alpha\sin kt\Rightarrow \left.\begin{matrix}C_1=A\sin\alpha\\ C_2=A\cos\alpha\end{matrix}\right\}$$

$A,\ \alpha=const;\ A$ - амплитуда колебаний; α - начальная фаза;

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{C_1}{C_2}=\frac{q_0k}{\dot q_0};\quad A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot q_0^2}{k^2}};\quad T_{св}=\frac{2\pi}{k};$$

17. Затухающее колебательное движение. Характеристики затухающих колебаний.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q^{\Pi}+Q^{\Phi}\Rightarrow a\ddot q+b\dot q+cq=0\Rightarrow \ddot q+\frac{b}{a}\dot q+\frac{c}{a}q=0\Rightarrow$$

$$\ddot q+2n\dot q+k^2q=0\Rightarrow \lambda^2+2n\lambda+k^2=0\Rightarrow \lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2};$$

Случай малого сопротивления $\left(n^2<k^2\right)$:

$\lambda_{1,2}=-n\pm ik_1$, где $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$ – условная част. собственных колеб.

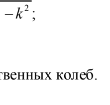
$\tau_1=\frac{2\pi}{k_1}$ – условный период собственных колебаний;

1) Тригонометрическая форма: Н.У.: $q(0)=q_0,\ \dot q(0)=\dot q_0;$

$q=e^{-nt}\left(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t\right);$

$\dot q=-ne^{-nt}\left(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t\right)+e^{-nt}\left(-k_1C_1\sin k_1t+k_1C_2\cos k_1t\right);$

$q_0=C_1;\ \dot q_0=-nC_1+k_1C_2\Rightarrow C_2=\frac{\dot q_0+nq_0}{k_1};$

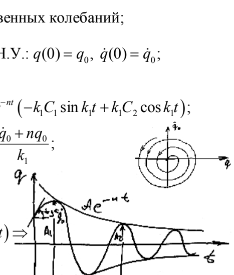


2) Амплитудная форма записи:

$q=Ae^{-nt}\sin\left(k_1t+\alpha\right)=$

$=e^{-nt}\left(A\sin\alpha\cos k_1t+A\cos\alpha\sin k_1t\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}C_1=A\sin\alpha\\ C_2=A\cos\alpha\end{matrix}\right\}$



Рассмотрим два последовательных значения:

$$\left.\begin{matrix}q_1:\ A_1=Ae^{-nt}\\ q_2:\ A_2=Ae^{-n(t+\tau_1)}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \Delta=\frac{A_1}{A_2}=\frac{Ae^{-nt}}{Ae^{-n(t+\tau_1)}}=e^{-n\tau_1}\text{ – декрем. затухания;}$$

$\ln\Delta=-n\tau_1$ – логарифмический декремент затухания;

$q_1=Ae^{-nt_1}\sin\left(k_1t_1+\alpha\right)\Rightarrow A_1=Ae^{-nt_1};\ A_1(0)=A;$ =

$q_2=Ae^{-nt_2}\sin\left(k_1t_2+\alpha\right)\Rightarrow A_2=Ae^{-nt_2};$ Пусть $t_2=t_0=\frac{1}{n}$, тогда $A_2=\frac{A}{e}$

$t_0=\frac{1}{n}$ – постоянная времени; Если время $=3t_0$, то считается, что колебания полностью затухли.

12. Выражения для кинетической и потенциальной энергии и диссипативной функции Рэлея в системе с одной степенью свободы.

Допущение: стационарное поле.

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\bar v_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\dot{\bar r}_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}\dot q\right)^2=\frac{1}{2}A\dot q^2,\text{ где}$$

$$A=\sum_{k=1}^{N}m_k\left(\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}\right)^2\Rightarrow A(q)=A_0+\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0q+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2}+...;$$

Индекс 0 означает, что эти величины следует считать при q=0;

Для получения в разложении кинетической энергии слагаемых не выше 2го порядка по отн. к q и $\dot q$ достаточно из разложения A(q) взять A_0, которое обозначим a:

$\boxed{T=\frac{1}{2}a\dot q^2}$; a – либо масса, либо момент инерции;

П для стационарного поля и стационарных связей является только функцией q.

$$\Pi(q)=\Pi_0+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q}\right)_0q+\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2!}+...$$

Π_0 в аоложении равновесия $(q=0)$ =0; $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q}\right)_0$ – значение обощ.

силы, в полож равн. =0; В этом случае вел-на $\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0$ - положит.

$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2}\right)_0=c$ - жесткость $\Rightarrow \Pi(q)=\frac{1}{2}cq^2$

Q^{Φ} -обощенная сила сопротивления.

$$\bar R_k=-\mu_k\bar v_k=-\mu_k\dot{\bar r}_k\Rightarrow Q^{\Phi}=\sum_{k=1}^{N}\bar R_k\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}=-\sum_{k=1}^{N}\mu_k\dot{\bar r}_k\frac{\partial\bar r_k}{\partial q};$$

$$\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}=\frac{\partial\dot{\bar r}_k}{\partial\dot q}\text{ - тождество Лагранжа}\Rightarrow Q^{\Phi}=-\sum_{k=1}^{N}\mu_k\dot{\bar r}_k\frac{\partial\dot{\bar r}_k}{\partial\dot q}=-\frac{\partial}{\partial\dot q}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar r}_k^2}{2};$$

Диссипативная ф-ия Рэлея: $\Phi=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar r}_k^2}{2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_kv_k^2}{2};\ Q^{\Phi}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q};$

$$\bar r_k=\bar r_k(q);\quad \dot{\bar r}_k=\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}\dot q\Rightarrow\Phi=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k\dot{\bar r}_k^2}{2}=\frac{\dot q^2}{2}\sum_{k=1}^{N}\mu_k\left(\frac{\partial\bar r_k}{\partial q}\right)^2=\frac{1}{2}B\dot q;$$

13. Связь между полной механической энергией и диссипативной функцией Рэлея.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q}-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q};\quad \dot q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q}-\dot q\frac{\partial T}{\partial q}=-\dot q\frac{\partial\Pi}{\partial q}-\dot q\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q};$$

$$T=\frac{1}{2}A(q)\dot q^2;\quad \frac{\partial T}{\partial\dot q}=A(q)\dot q;\quad \dot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}=A(q)\dot q^2=2T;$$

$$\Phi=\frac{1}{2}B(q)\dot q^2;\quad \frac{\partial\Phi}{\partial\dot q}=B(q)\dot q;\quad \dot q\frac{\partial\Phi}{\partial\dot q}=B(q)\dot q^2=2\Phi;$$

Пот. эн. для стац. поля зависит от вр. только через q: $\dot q\frac{\partial\Pi}{\partial q}=\frac{d\Pi}{dt};$

$$\dot q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q}=\frac{d}{dt}\left(\dot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)-\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}=\frac{d}{dt}(2T)-\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q};$$

$\frac{d}{dt}(2T)-\left(\dot q\frac{\partial T}{\partial q}+\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)=-\frac{d\Pi}{dt}-2\Phi;$ Т.к. $T=T(q,\dot q)$, то

$\dot q\frac{\partial T}{\partial q}+\ddot q\frac{\partial T}{\partial\dot q}=\frac{dT}{dt}$. Т.о., $\frac{d}{dt}(2T-T+\Pi)=-2\Phi\Rightarrow\frac{d}{dt}(T+\Pi)=-2\Phi\Rightarrow$

$\Rightarrow\boxed{\frac{dE}{dt}=-2\Phi}$

18. Затухающее неколебательное движение в случае "критического" сопротивления.

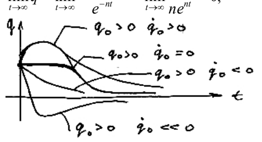
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q^{\Pi}+Q^{\Phi}\Rightarrow a\ddot q+b\dot q+cq=0\Rightarrow\ddot q+\frac{b}{a}\dot q+\frac{c}{a}q=0\Rightarrow$$

$$\ddot q+2n\dot q+k^2q=0\Rightarrow\lambda^2+2n\lambda+k^2=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2};$$

Случай критического сопротивления $\left(n^2=k^2\right)$: $\lambda_{1,2}=-n.$

$q=e^{-nt}\left(C_1t+C_2\right);$

$$\lim_{t\to\infty}q=\lim_{t\to\infty}\frac{C_1t+C_2}{e^{nt}}=\lim_{t\to\infty}\frac{C_1}{ne^{nt}}=0;$$



19. Затухающее неколебательное движение в случае большого сопротивления.

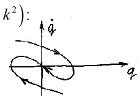
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q^{\Pi}+Q^{\Phi}\Rightarrow a\ddot q+b\dot q+cq=0\Rightarrow\ddot q+\frac{b}{a}\dot q+\frac{c}{a}q=0\Rightarrow$$

$$\ddot q+2n\dot q+k^2q=0\Rightarrow\lambda^2+2n\lambda+k^2=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2};$$

Случай большого сопротивления $\left(n^2>k^2\right)$:

$\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}.$

$q=e^{-nt}\left(C_1e^{k_2t}+C_2e^{-k_2t}\right);\quad k_2=\sqrt{n^2-k^2};$



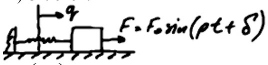
20. Вынужденные колебания в системе с одной степенью свободы. Способы возбуждения колебаний. Определение обобщенной силы.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q^{\Pi}+Q^{\Phi}+Q^{B}\Rightarrow a\ddot q+b\dot q+cq=Q^{B};$$

Способы возбуждения:

1) Силовой
2) Кинематический
3) Инерционный

1) Силовой:



p – частота возбужд.
δ – нач. фаза

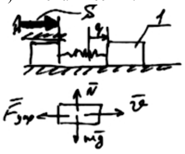
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q^{\Pi}+Q^{\Phi}+Q^{B}\Rightarrow a\ddot q+b\dot q+cq=Q^{B};$$

$Q^{B}=\frac{F\partial q}{\partial q}=F_0\sin\left(pt+\delta\right);$

В общем случае: $Q^{B}=\bar F\frac{\partial\bar r}{\partial q}=F\left|\frac{\partial r}{\partial q}\right|\cos\left(\bar F,d\bar r\right)=$

$=F_0\left|\frac{\partial r}{\partial q}\right|\cos\left(\bar F,d\bar r\right)\sin\left(pt+\delta\right)=H\sin\left(pt+\delta\right);$

2) Кинематический:



$S=S_0\sin\left(pt+\delta\right)$

$F_{упр}=c\left(q-S(t)\right)$

$\Pi'=-\int_q^0Fdq=-\int_q^0c\left(q-S\right)dq$

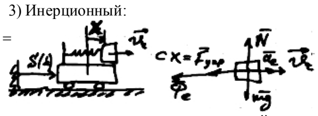
$=-\left.\frac{cq^2}{2}\right|_q^0+\left.cSq\right|_q^0=\frac{cq^2}{2}-cSq=$

$=\frac{cq^2}{2}-cS_0q\sin\left(pt+\delta\right);\quad Q^{\Pi}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q}=-cq+cS_0\sin\left(pt+\delta\right);$

$a\ddot q+b\dot q+cq=cS_0\sin\left(pt+\delta\right)=H\sin\left(pt+\delta\right);$

3) Инерционный:

=



$S=S_0\sin\left(pt+\delta\right);\quad \bar\Phi_e=-m\bar a_e;\quad \bar a_e=\ddot S=-p^2S_0\sin\left(pt+\delta\right);$

$Q^{B}=\frac{-\bar\Phi_e\partial x}{\partial x}=-mp^2S_0\sin\left(pt+\delta\right);$

$a\ddot x+b\dot x+cx=-mp^2S_0\sin\left(pt+\delta\right)=H\sin\left(pt+\delta\right);\quad H=H\left(p^2\right);$

21. Интегрирование дифференциального уравнения вынужденных колебаний в системе с одной степенью свободы при наличии линейно-вязкого сопротивления.

$\ddot q+2n\dot q+k^2q=h\sin\left(pt+\delta\right);$

$q=e^{-nt}\left(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t\right)+D\sin\left(pt+\delta-\varepsilon\right);$

$k_1=\sqrt{k^2-n^2}\quad\left(k>n\text{ - малое сопротивление}\right);$

$q_B=D\sin\left(pt+\delta-\varepsilon\right);\ \dot q_B=Dp\cos\left(pt+\delta-\varepsilon\right);$

$\ddot q_B=-Dp^2\sin\left(pt+\delta-\varepsilon\right);$

$-Dp^2\sin\left(pt+\delta-\varepsilon\right)+2Dnp\cos\left(pt+\delta-\varepsilon\right)+Dk^2\sin\left(pt+\delta-\varepsilon\right)=$

$=h\sin\left(pt+\delta\right);$

$D\left(k^2-p^2\right)\left(\sin A\cos\varepsilon-\cos A\sin\varepsilon\right)+2nDp\left(\cos A\cos\varepsilon+\sin A\sin\varepsilon\right)=$

$=h\sin A;$

$D\left(k^2-p^2\right)\cos\varepsilon+2nDp\sin\varepsilon=h;\quad (*)$

$-D\left(k^2-p^2\right)\sin\varepsilon+2nDp\cos\varepsilon=0;\quad (**)$

Из $(**)\ \Rightarrow\ tg\varepsilon=\frac{2np}{\left(k^2-p^2\right)}\Rightarrow\varepsilon=arctg\frac{2np}{\left(k^2-p^2\right)};$

Из $(*)\ \Rightarrow\ D=\frac{h}{\left(k^2-p^2\right)\cos\varepsilon+2np\sin\varepsilon};$

Константы C_1 и C_2 определяются из н.у. подстановкой ур-ий

$q_{OO}=e^{-nt}\left(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t\right),\ \dot q_{OO}=-nk_1e^{-nt}\left(C_1\sin k_1t-C_2\cos k_1t\right)$ и

$\ddot q_{OO}=-n^2k_1^2e^{-nt}\left(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t\right)$ в уравнение $\ddot q+2n\dot q+k^2q=0;$

22. Резонанс в консервативной механической системе с одной степенью свободы.

Сопротивление отсутствует.

$a\ddot{q}+cq = H\sin(pt+\delta)\ (*) \Rightarrow q = C_1\cos kt + C_2\sin kt + D\sin(pt+\delta)$;

$НУ:\ q(0)=q_0;\ \dot{q}(0)=\dot{q}_0$;

$\dot{q}=-k(C_1\sin kt - C_2\cos kt)+Dp\cos(pt+\delta)$;

$q_0 = C_1 + D\sin\delta \Rightarrow C_1 = q_0 - D\sin\delta$; D – амплитуда колебаний;

$\dot{q}_0 = kC_2 + Dp\cos\delta \Rightarrow C_2 = \frac{1}{k}(\dot{q}_0 - Dp\cos\delta)$;

$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$;

$$\left.\begin{aligned} q_B &= D\sin(pt+\delta);\\ \dot{q}_B &= Dp\cos(pt+\delta);\\ \ddot{q}_B &= -p^2 D\sin(pt+\delta); \end{aligned}\right\}(**);\qquad (*a):\ \ddot{q}+k^2q = h\sin(pt+\delta);$$

$(**)\to(*a):\ -Dp^2\cancel{\sin(pt+\delta)}+k^2D\cancel{\sin(pt+\delta)} = h\cancel{\sin(pt+\delta)}$

$D(k^2-p^2) = h \Rightarrow D=\frac{h}{k^2-p^2}$;

$k>p:\ D>0 \Rightarrow \varepsilon = 0$

$k<p:\ D<0;\ D = -\frac{h}{p^2-k^2} \Rightarrow q_B = -\frac{h}{p^2-k^2}\sin(pt+\delta) =$

$=\frac{h}{p^2-k^2}\sin(pt+\delta-\pi) \Rightarrow \varepsilon=\pi$

Резонанс – вынужденные колебания механической системы с частотой, равной собственной частоте колебаний. Условие: k=p.

$q_B = Dt\sin\left(\overbrace{pt+\delta}^{A}-\varepsilon\right);\ \dot{q}_B = D\sin(A-\varepsilon)+Dtp\cos(A-\varepsilon)$;

$\ddot{q}_B = Dp\cos(A-\varepsilon)+Dp\cos(A-\varepsilon)-Dtp^2\sin(A-\varepsilon)$;

$2Dp\cos(A-\varepsilon)-Dtp^2\sin(A-\varepsilon)+k^2Dt\sin(A-\varepsilon) = h\sin(pt+\delta)$;

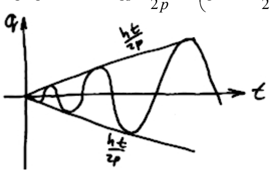
Т.к. $p=k$, то $2Dp\cos(A-\varepsilon) = h\sin(pt+\delta)$;

$2Dp(\cos A\cos\varepsilon+\sin A\sin\varepsilon)=h\sin A$;

$2Dp\cos\varepsilon = 0 \Rightarrow \cos\varepsilon=0 \Rightarrow \cos\varepsilon=\frac{\pi}{2}$;

$2Dp\sin\varepsilon = h \Rightarrow D=\frac{h}{2p}$;

При резонансе: $q_B=\frac{h}{2p}t\sin\left(pt+\delta-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{ht}{2p}\cos(pt+\delta)$;



АЧХ и ФЧХ:

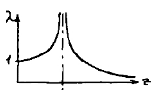
$\frac{D}{\frac{h}{k^2}}=\frac{1}{\frac{|k^2-p^2|}{k^2}} \Rightarrow \frac{D}{D_{cm}}=\frac{1}{|1-z^2|};\ D_{cm}=\frac{h}{k^2}$ – статическое смещение,

физ. смысл: отклонение системы при статическом нагружении амплитудным значением возмущающей силы.

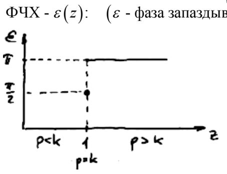
$z=\frac{p}{k}$ – коэффициент расстройки (показывает на сколько частота собств. колебаний отлична от частоты возмущ. силы)

$\lambda=\frac{D}{D_{cm}}$ – коэффициент динамичности.

АЧХ - $\lambda(z)=\frac{1}{|1-z^2|}$:



ФЧХ - $\varepsilon(z)$: (ε - фаза запаздывания)



23. Вынужденные колебания в системе с одной степенью свободы. АЧХ и ФЧХ системы.

Без учета сопротивления см. п.22. С учетом сопротивления:

Для силового возбуждения:

$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=h\sin(pt+\delta)$;

$q=e^{-nt}(C_1\cos k_1t+C_2\sin k_1t)+D\sin(pt+\delta-\varepsilon)$;

$k_1=\sqrt{k^2-n^2}$ ($k>n$ - малое сопротивление);

$q_B=D\sin(pt+\delta-\varepsilon);\ \dot{q}_B = Dp\cos(pt+\delta-\varepsilon)$;

$\ddot{q}_B=-Dp^2\sin(pt+\delta-\varepsilon)$;

$-Dp^2\sin(pt+\delta-\varepsilon)+2Dnp\cos(pt+\delta-\varepsilon)+Dk^2\sin(pt+\delta-\varepsilon)=$

$=h\sin(pt+\delta)$;

$D(k^2-p^2)(\sin A\cos\varepsilon-\cos A\sin\varepsilon)+2nDp(\cos A\cos\varepsilon+\sin A\sin\varepsilon)=$

$=h\sin A$;

$D(k^2-p^2)\cos\varepsilon+2nDp\sin\varepsilon=h$; $(*)$

$-D(k^2-p^2)\sin\varepsilon+2nDp\cos\varepsilon=0$; $(**)$

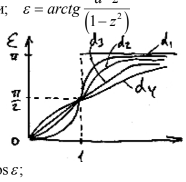
Из $(**) \Rightarrow tg\varepsilon = \frac{2np}{(k^2-p^2)} \Rightarrow \varepsilon = arctg\frac{2np}{(k^2-p^2)}$;

$\frac{2\frac{n}{k}\frac{p}{k}}{(1-z^2)}=\frac{2np}{(k^2-p^2)}=\frac{d\cdot z}{(1-z^2)};\ d=\frac{2n}{k}$ – безразм. коэф. затух.

$z=\frac{p}{k}$ – коэф-т расстройки; $\varepsilon = arctg\frac{d\cdot z}{(1-z^2)}$

$d_1<d_2<d_3<d_4$

$0\le\varepsilon\le\pi$



АЧХ: $(*)\cdot\sin\varepsilon$; $(**)\cdot\cos\varepsilon$;

$D(k^2-p^2)\cos\varepsilon\sin\varepsilon+2nDp\sin^2\varepsilon=h\sin\varepsilon$;

$-D(k^2-p^2)\sin\varepsilon\cos\varepsilon+2nDp\cos^2\varepsilon=0$;

Сложим эти выр-я: $2nDp=h\sin\varepsilon$ $(***)$; Теперь $(*)\cos\varepsilon;(**)\sin\varepsilon$;

$D(k^2-p^2)\cos^2\varepsilon+2nDp\sin\varepsilon\cos\varepsilon=h\cos\varepsilon$;

$-D(k^2-p^2)\sin^2\varepsilon+2nDp\sin\varepsilon\cos\varepsilon=0$;

Вычтем: $D(k^2-p^2)=h\cos\varepsilon$ $(****)$;

Теперь выражения $(***)$ и $(****)$ возведем в квадрат и сложим:

$D^2(k^2-p^2)^2+4n^2D^2p^2 = h^2 \Rightarrow D=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$;

$\frac{D}{\frac{h}{k^2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}{k^2}};\ \lambda = \frac{D}{D_{cm}} = \frac{D}{\frac{h}{k^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2+d^2z^2}}};\quad d=\frac{2n}{k};\ z=\frac{p}{k};\ Д=\frac{1}{d}=\frac{k}{2n}$;

Пусть $f=(1-z^2)^2+d^2z^2; f_z' = 2(1-z^2)(-2z)+2d^2z=$

$=z(4z^2-4+2d^2) \Rightarrow z_{1Э}=0$;

$4z^2-4+2d^2=0;\ 4z^2=4-2d^2 \Rightarrow z_{2Э}^2=1-\frac{d^2}{2}\ge 0 \Rightarrow d<\sqrt{2};\ d=\frac{2n}{k}$;

$z_{2Э}=\sqrt{1-\frac{d^2}{2}}\ (d<\sqrt{2})$; $f_z'' = -4+12z^2+2d^2$;

1) $z_{1Э}=0:\ f_z'' = 2d^2-4$; $a) f_z''>0;\ d^2>2;\ d>\sqrt{2}$ – большое сопр.

$f_z''>0 \Rightarrow f_{\min} \Rightarrow \lambda_{1Э}\to\max$;

$б) f_z''<0;\ d^2<2;\ d<\sqrt{2}$ – малое сопрот. $f_z''<0 \Rightarrow f_{\max} \Rightarrow \lambda_{1Э}\to\min$

2) $z_{2Э}=\sqrt{1-\frac{d^2}{2}}\ (d\le\sqrt{2});\ f_z'' = -4+12\left(1-\frac{d^2}{2}\right)+2d^2=8-4d^2\ge 0$

$f\to\min \Rightarrow \lambda_{2Э}\to\max$;

$\lambda_{2Э\,\max}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-1+\frac{d^2}{2}\right)^2+d^2\left(1-\frac{d^2}{2}\right)}}=\frac{1}{d\sqrt{1-\frac{d^2}{4}}}$;

$\lambda_{рез}=\frac{1}{\sqrt{d^2}}=\frac{1}{d}$ $Д$ – добротность равна коэф-ту динамичности при резонансном режиме; $d_1<d_2<d_3$;

24. Вынужденные колебания в системе с одной степенью свободы. Исследование коэффициента динамичности в случае вынужденного относительного движения.

Инерционное возбуждение:

$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=\frac{Q^B}{a}=\frac{m}{a}S_0p^2\sin(pt+\delta) = h\sin(pt+\delta) =$

$=h'p^2\sin(pt+\delta)$;

$q=q_{OO}+q_{ЧН}=q_{OO}+D\sin(pt+\delta-\varepsilon)$;

$q_{ЧН}=q_B = D\sin(pt+\delta-\varepsilon) = D\sin(A-\varepsilon)$;

$\dot{q}_B=Dp\cos(A-\varepsilon);\ \ddot{q}_B = -Dp^2\sin(A-\varepsilon)$;

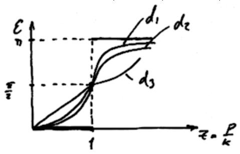
$-Dp^2\sin(A-\varepsilon)+2nDp\cos(A-\varepsilon)+k^2D\sin(A-\varepsilon)=$

$=h'p^2\sin(A-\varepsilon+\varepsilon) = h'p^2[\sin(A-\varepsilon)\cos\varepsilon+\cos(A-\varepsilon)\sin\varepsilon]$;

(1) $-Dp^2+k^2D=h'p^2\cos\varepsilon$;

(2) $2nDp=h'p^2\sin\varepsilon$;

$(1)/(2) \Rightarrow tg\varepsilon = \frac{2np}{|k^2-p^2|};\ tg\varepsilon = \frac{dz}{|1-z^2|};\ 0<\varepsilon<\pi;\ d_1<d_2<d_3$;



$(1)^2+(2)^2:\ D^2\left[(k^2-p^2)^2+4n^2p^2\right] = (h'p^2)^2(\cos^2\varepsilon+\sin^2\varepsilon) \Rightarrow$

$D=\frac{h'p^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}} \Rightarrow \lambda = \frac{D}{\frac{h'}{k^2}} = \frac{z^2}{\sqrt{(1-z^2)^2+d^2z^2}}$;

$z_1=\frac{1}{z} \Rightarrow z_1^2=\frac{1}{z^2} \Rightarrow z^2=\frac{1}{z_1^2}$;

$\lambda=\frac{1}{z_1^2\sqrt{\left(1-\frac{1}{z_1^2}\right)^2+d^2\frac{1}{z_1^2}}}=\frac{1}{\sqrt{(z_1^2-1)^2+d^2z_1^2}}$;

$z_1=0\ z\to\infty \Rightarrow \lambda=1$; $z_1\to\infty\ z=0 \Rightarrow \lambda=0$;

$f=(z_1^2-1)^2+d^2z_1^2;\ f_{z_1}' = 2(z_1^2-1)2z_1+2d^2z_1=4z_1^3-4z_1+2z_1d^2=$

$=z_1(4z_1^2-4+2d^2)$; $f_{z_1}' = 0$ при $z_{1(1)}=0 \Rightarrow z\to\infty$;

$4z_1^2-4+2d^2=0; = z_{1(2)}^2 = \frac{1}{4}(4-2d^2) = 1-\frac{d^2}{2}>0$;

$z_{(2)}^2=\frac{1}{1-\frac{d^2}{2}}>0 \to d^2<2 \to d<\sqrt{2}$; $f_{z_1}'' = 12z_1^2-4+2d^2$;

1) $z_{1(1)}=0$ $f_{z_1}''=2d^2-4$; $f_{z_1}''>0$ $d^2>2$ – большое сопр. $(\lambda_{\max})$;

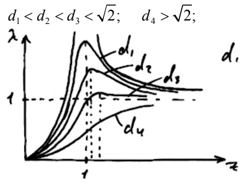
$f_{z_1}''<0$ $d^2<2$ – малое сопрот. $(\lambda_{\min})$;

2) $z_{1(2)}^2=1-\frac{d^2}{2}\ge 0$; $d^2<2 \to d<\sqrt{2}$; $z_{(2)}^2=\frac{1}{1-\frac{d^2}{2}}$

Вывод: 2ой экстремум АЧХ уходит вправо от резонансной точки в отличии от силового возмущения.

$f_{z_1}''=12\left(1-\frac{d^2}{2}\right)-4+2d^2=8-4d^2>0$; $f\to\min \Rightarrow \lambda\to\max$;

$d_1<d_2<d_3<\sqrt{2}$; $d_4>\sqrt{2}$;



25. Основные свойства установившихся вынужденных колебаний.

Из лекций:

1) Незатухающие колебания длятся столько, сколько длятся воздействие.

2) Вынужденные колебания не зависят от начальных условий

3) Вынужденные колебания происходят с частотой p возбуждающей силы (кинематического возмущения)

4) Отстают по фазе от возмущения на величину ε=arctg(dz/|1-z²|)

5) Резонансная величина коэф-та динамичности (λ) = добротности (Д)

Из учебника:

1) Вынужденные колебания являются незатухающими, т.е. их амплитуда постоянна как при отсутствии резонанса, так и при резонансе.

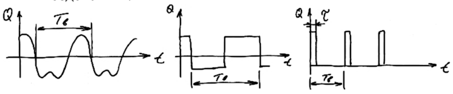
2) Линейное сопротивление не влияет на частоту вынужденных колебаний, которая совпадает с частотой возмущающей силы.

3) Вынужденные колебания при линейном сопротивлении не зависят от начальных условий, так же как они не зависят от них при отсутствии сопротивления.

4) Амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю быстрее при линейном сопротивлении с увеличением относительной частоты возмущающей силы, чем при отсутствии сопротивления.

26. Вынужденные колебания в системе с одной степенью свободы при действии периодического, но не гармонического воздействия.

Типы воздействий.



$a\ddot{q}+b\dot{q}+cq = Q(t) \quad (1); \quad Q(t) = Q_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos npt+b_n\sin npt\right);$

$Q(t)$ – ограничена;

– имеет разрыв 1го рода

– конечное число экстремумов на конечном интервале

$Q_0=\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_B}\int_0^{T_B}Q(t)\,dt; \; a_n = \frac{2}{T_b}\int_0^{T_b}Q(t)\cos nptdt;$

$b_n=\frac{2}{T_B}\int_0^{T_B}Q(t)\sin nptdt; \quad Q(t) = Q_0+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\sin\left(p_nt+\beta_n\right);$

β_n – фаза n-ой гармоники; $p_n = np; \quad \beta_n = arctg\frac{a_n}{b_n};$

$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\left(p_nt+\beta_n\right); \; f_0 = \frac{Q_0}{a}; \quad f_n = \frac{Q_n}{a};$

$q=q_{OO}+q_{ЧН}; \quad q_{ЧН} = \frac{Q_0}{c}+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\left(p_nt+\beta_n-\varepsilon_n\right);$

мех. система действует как фильтр: пропускает частоты, близкие к резонансной.

1) $p=\frac{2\pi}{T_B}<\omega$

$np=k \qquad n_0>n$

2) $p=\frac{2\pi}{T_B}>\omega$ малое число гармоник.

27. Вынужденные колебания в системе с одной степенью свободы в случае произвольного вынуждающего воздействия.

1) Без учета сопротивления.

$a\ddot{q}+cq = Q(t); \quad \ddot{q}+\frac{c}{a}q=\frac{Q(t)}{a}; \quad \ddot{q}+k^2q=\frac{Q(t)}{a};$

$q=C_1(t)\cos kt+C_2(t)\sin kt \qquad (0);$

$\dot{q}=\dot{C}_1(t)\cos kt-kC_1(t)\sin kt+\dot{C}_2(t)\sin kt+kC_2(t)\cos kt;$

$\dot{C}_1(t)\cos kt+\dot{C}_2(t)\sin kt=0 \qquad (1);$

Так как неизвестные ф-ии две – $C_1(t)$ и $C_2(t)$, то в соответствии с методом вариации произвольных постоянных их можно связать доп. условием, потребовав, чтобы выражение для $\dot{q}$ имело тот же вид, что и при постоянных C_1 и C_2, т.е.:

$\dot{C}_1\cos kt+\dot{C}_2\sin kt=0 \quad (1); \quad \dot{q} = -kC_1\sin kt+kC_2\cos kt;$

$\ddot{q}=-k\dot{C}_1\sin kt+k\dot{C}_2\cos kt-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt \quad (2);$

$(0)\,u\,(2)\rightarrow в\ исх: \; -k\dot{C}_1\sin kt+k\dot{C}_2\cos kt-\cancel{k^2\left(C_1\cos kt+C_2\sin kt\right)}+$

$+\cancel{k^2\left(C_1\cos kt+C_2\sin kt\right)}=\frac{Q(t)}{a}\Rightarrow k\left(\dot{C}_2\cos kt-\dot{C}_1\sin kt\right)=\frac{Q(t)}{a} \quad (3)$

$$\begin{cases}\dot{C}_1\cos kt+\dot{C}_2\sin kt=0\\ -\dot{C}_1\sin kt+\dot{C}_2\cos kt=\frac{Q(t)}{ak}\end{cases}$$

$\Delta = \begin{vmatrix}\cos kt & \sin kt\\ -\sin kt & \cos kt\end{vmatrix} = \cos^2 kt+\sin^2 kt=1;$

$\Delta_{\dot{C}_1}=\begin{vmatrix}0 & \sin kt\\ \frac{Q(t)}{ak} & \cos kt\end{vmatrix} = -\frac{1}{ak}Q(t)\sin kt\Rightarrow \dot{C}_1=\frac{\Delta_{\dot{C}_1}}{\Delta} = -\frac{1}{ak}Q(t)\sin kt;$

$C_1=H_1-\frac{1}{ak}\int_0^t Q(\tau)\sin k\tau\, d\tau;$

$\Delta_{\dot{C}_2}=\begin{vmatrix}\cos kt & 0\\ -\sin kt & \frac{Q(t)}{ak}\end{vmatrix}=\frac{1}{ak}Q(t)\cos kt\Rightarrow \dot{C}_2=\frac{\Delta_{\dot{C}_2}}{\Delta}=\frac{1}{ak}Q(t)\cos kt;$

$C_2=H_2+\frac{1}{ak}\int_0^t Q(\tau)\cos k\tau\, d\tau;$

$q=\left[H_1-\frac{1}{ak}\int_0^t Q(\tau)\sin k\tau\, d\tau\right]\cos kt+\left[H_2+\frac{1}{ak}\int_0^t Q(\tau)\cos k\tau\, d\tau\right]\sin kt$

$q=H_1\cos kt+H_2\sin kt-\frac{\cos kt}{ak}\int_0^t Q(\tau)\sin k\tau\, d\tau+\frac{\sin kt}{ak}\int_0^t Q(\tau)\cos k\tau\, d\tau$

$q_B=\frac{1}{ak}\int_0^t Q(\tau)\left(\sin kt\cos k\tau-\sin k\tau\cos kt\right)d\tau=$

$=\frac{1}{ak}\int_0^t Q(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau;$

$q=H_1\cos kt+H_2\sin kt+\frac{1}{ak}\int_0^t Q(\tau)\sin k(t-\tau)\,d\tau;$

$q(0)=q_0; \quad \dot{q}(0)=\dot{q}_0; \quad \Rightarrow \quad H_1 = q_0; \quad H_2 = \frac{\dot{q}_0}{k};$

2) С учетом сопротивления: $\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=\frac{Q(t)}{a};$

$q=e^{-nt}y = (1'); \quad \dot{q} = -ne^{-nt}y+e^{-nt}\dot{y} \quad (2');$

$\ddot{q}=n^2e^{-nt}y-ne^{-nt}\dot{y}-ne^{-nt}\dot{y}+e^{-nt}\ddot{y} \quad (3'); \; (1'),(2')\,u\,(3')\rightarrow$ в исход.:

$n^2e^{-nt}y-\cancel{2ne^{-nt}\dot{y}}+e^{-nt}\ddot{y}-2n^2e^{-nt}y+\cancel{2ne^{-nt}\dot{y}}+k^2e^{-nt}y=\frac{Q(t)}{a};$

$\ddot{y}+\left(k^2-n^2\right)y = \frac{1}{a}Q(t)e^{nt}; \quad k_1^2 = k^2-n^2; \quad \ddot{y}+k_1^2y=\frac{1}{a}Q(t)e^{nt};$

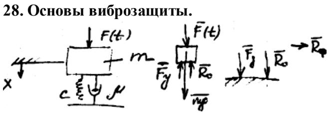
$y=H_1\cos k_1t+H_2\sin k_1t+\frac{1}{ak_1}\int_0^t Q(\tau)e^{n\tau}\sin k_1(t-\tau)\,d\tau;$

$q=e^{-nt}y\Rightarrow y=qe^{nt};$

$q=e^{-nt}\left(H_1\cos k_1t+H_2\sin k_1t\right)+\frac{1}{ak_1}\int_0^t Q(\tau)e^{-n(t-\tau)}\sin k_1(t-\tau)\,d\tau;$

$q(0)=q_0$ и $\dot{q}(0)=\dot{q}_0$ – начальные условия для H_1 и H_2;

28. Основы виброзащиты.



$F(t)$ – силовое гармоническое возмущение.

$F_y=c\left(x+\Delta_{cm}\right); \; R_Ф = cx+\mu\dot{x}; \quad m\ddot{x}+\mu\dot{x}+cx=F(t);$

$\beta=\frac{R_Ф}{F(t)} = \frac{cx+\mu\dot{x}}{m\ddot{x}+\mu\dot{x}+cx} = \ldots =$

$x=Ge^{ipt}; \; G = const; \quad \dot{x} = Gipe^{ipt}; \quad \ddot{x} = Gi^2p^2e^{ipt} = -Gp^2e^{ipt};$

$\ldots=\frac{cGe^{ipt}+\mu Gipe^{ipt}}{-mGp^2e^{ipt}+\mu Gipe^{ipt}+cGe^{ipt}} = \frac{c+\mu pi}{c-mp^2+\mu pi} = \frac{\frac{c}{m}+\frac{\mu pi}{m}}{\left(\frac{c}{m}-p^2\right)+\frac{\mu pi}{m}}=$

$=\frac{k^2+2npi}{\left(k^2-p^2\right)+2npi};$ Для амплитудных значений R, $F(t)$:

$\beta=\frac{\sqrt{k^4+4n^2p^2}}{\sqrt{\left(k^2-p^2\right)^2+4n^2p^2}};$ Разделим на k^2, тем самым обезразмерим

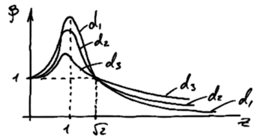
и выведем коэф-т расстройки: $\beta=\frac{\sqrt{1+d^2z^2}}{\sqrt{\left(1-z^2\right)^2+d^2z^2}};$

Для эффективной защты $\beta<1$: $\sqrt{\left(1-z^2\right)^2+d^2z^2}>\sqrt{1+d^2z^2};$

$\left(1-z^2\right)^2+d^2z^2>1+d^2z^2; \quad а)\; 1-z^2>1; \; z^2<0$ - не имеет смысла;

$б)\; z^2-1>1; \quad z^2>2; \quad z>\sqrt{2};$

$d_1<d_2<d_3;$



29. Устойчивость положения равновесия консервативной системы с двумя степенями свободы. Критерий Сильвестра.

$$T=\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\overline{v}_k^2}{2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k\dot{\overline{r}}_k^2}{2};\quad \dot{\overline{r}}_k=\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2;$$

$$T=\frac{1}{2}\left[\dot{q}_1^2\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{2}\left(\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_1}\right)^2+2\dot{q}_1\dot{q}_2\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{2}\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_1}\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_2}+\dot{q}_2^2\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{2}\left(\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_2}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(A_{11}\dot{q}_1^2+2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+A_{22}\dot{q}_1^2\right);$$

$$A_{11}(q_1,q_1)=(A_{11})_0+\left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_1}\right)_0 q_1+\left(\frac{\partial A_{11}}{\partial q_2}\right)_0 q_2+\ldots\approx(A_{11})_0=a_{11};$$

$$T=\frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2+2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+a_{22}\dot{q}_1^2\right)=\frac{1}{2}\dot{\overline{q}}^T[A]\dot{\overline{q}};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}+Q(t);\quad [A]\ddot{\overline{q}}+[B]\dot{\overline{q}}+[C]\overline{q}=\overline{Q}$$

$$[A]=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix};\quad [B]=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{vmatrix};$$

Матрица [A] согласно критерию Сильвестра, имеет все положительные миноры (определенно положительные), как и матрица [C].

Если положение равновесия является устойчивым для механической системы, то квадратичная форма потенциальной энергии определенно положительная, поэтому:

$\det[C]>0;\quad \det[A]>0;$

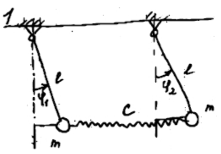
$c_{11}>0;\quad c_{22}>0;\quad a_{11}>0;\quad a_{22}>0;$

30. Дифференциальные уравнения малых колебаний в консервативной системе с двумя степенями свободы. Парциальные системы и парциальные частоты.

$[A]\ddot{\overline{q}}+[C]\overline{q}=0$ – векторно матричная форма; $\quad \overline{q}=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix};$

Если $a_{12}=0$, а $c_{12}\neq 0$ – система называется системой с упругой связью 2х координат.

Если $a_{12}\neq 0$, а $c_{12}=0$ – система с инерционной связью.



Пример 1:

$\varphi_1,\ \varphi_2$ - обобщенные коор-ты

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=$$

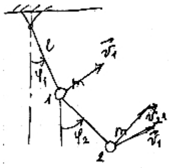
$$=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_1^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_2^2;$$

$a_{12}=0;\ a_{11}=ml^2=a_{22};$

$$\Pi=ml(1-\cos\varphi_1)g+ml(1-\cos\varphi_2)g+\frac{1}{2}cl^2(\varphi_2-\varphi_1)^2=$$

$$=mgl\frac{\varphi_1^2}{2}+mgl\frac{\varphi_2^2}{2}+\frac{1}{2}cl^2\left(\varphi_2^2-2\varphi_1\varphi_2+\varphi_1^2\right);$$

$c_{12}=2cl^2;\quad c_{11}=mgl+cl^2=c_{22};\ c_{12}\neq 0$ и $a_{12}=0$ - упругая связь.



Пример 2:

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2;\quad \overline{v}_2=\overline{v}_1+\overline{v}_{21};$$

$$v_2^2=v_1^2+v_{21}^2+2v_1v_{21}\cos\left(\overline{v}_1,\overline{v}_{21}\right)=$$

$$T=\frac{1}{2}m(l\dot{\varphi}_1)^2+\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\varphi}_1^2+l^2\dot{\varphi}_2^2+2l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\overbrace{\cos(\varphi_2-\varphi_1)}^{1}\right);$$

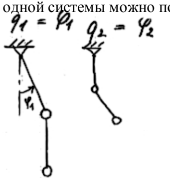
$a_{11}=2ml^2;\ a_{22}=ml^2;\ a_{12}=2ml^2;$

$$\Pi=mgl(1-\cos\varphi_1)+mgl(1-\cos\varphi_1+1-\cos\varphi_2)=$$

$$=mgl\frac{\varphi_1^2}{2}+mgl\left(\frac{\varphi_1^2}{2}+\frac{\varphi_2^2}{2}\right);\ c_{11}=2mgl;\ c_{22}=mgl;\ c_{12}=0$$

$a_{12}\neq 0;\ c_{12}=0;\ \Rightarrow$ система с инерционной связью.

Парциальные – это такие механические системы, которые получаются из исходной, если наложить запрет на изменение всех обобщенных координат, кроме одной. Это значит, что из одной системы можно получить n парциальных систем.



$[A]\ddot{\overline{q}}+[C]\overline{q}=0$

$$\begin{cases}a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=0\\a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+c_{21}q_1+c_{22}q_2=0\end{cases}$$

Для замкнутой сис-мы получаем:

$a_{11}\ddot{q}_1+c_{11}q_1=0;$

$n_1^2=\dfrac{c_{11}}{a_{11}}$ - первая парциальная частота колебаний исходной мех. системы.

$a_{22}\ddot{q}_2+c_{22}q_2=0;$

$n_2^2=\dfrac{c_{22}}{a_{22}}$ - вторая парциальная частота исходной мех. системы.

31. Интегрирование дифференциальных уравнений свободных колебаний в консервативной системе с двумя степенями свободы. Уравнение частот, исследование его корней.

$$[A]\ddot{\overline{q}}+[C]\overline{q}=0\Rightarrow\begin{cases}a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=0\\a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+c_{21}q_1+c_{22}q_2=0\end{cases}\quad(*)$$

$$\begin{cases}q_1=A_1\sin(\omega t+\alpha)&(1а)\\q_2=A_2\sin(\omega t+\alpha)&(1б)\end{cases}$$ - вид решения для q_1 и q_2;

$\dot{q}_1=\omega A_1\cos(\omega t+\alpha);\ \dot{q}_2=\omega A_2\cos(\omega t+\alpha);$

$\ddot{q}_1=-\omega^2A_1\sin(\omega t+\alpha);\ \ddot{q}_2=-\omega^2A_2\sin(\omega t+\alpha);$

Подставим в $(*)$:

$$\begin{cases}-a_{11}\omega^2A_1\sin(\omega t+\alpha)-a_{12}\omega^2A_2\sin(\omega t+\alpha)+\\ \qquad +c_{11}A_1\sin(\omega t+\alpha)+c_{12}A_2\sin(\omega t+\alpha)=0\\-a_{21}\omega^2A_1\sin(\omega t+\alpha)-a_{22}\omega^2A_2\sin(\omega t+\alpha)+\\ \qquad +c_{21}A_1\sin(\omega t+\alpha)+c_{22}A_2\sin(\omega t+\alpha)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A_1\left(c_{11}-a_{11}\omega^2\right)+A_2\left(c_{12}-a_{12}\omega^2\right)=0\\A_1\left(c_{21}-a_{21}\omega^2\right)+A_2\left(c_{22}-a_{22}\omega^2\right)=0\end{cases}\qquad \overline{A}_K=\begin{bmatrix}A_1\\A_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}c_{11}-a_{11}\omega^2&c_{12}-a_{12}\omega^2\\c_{21}-a_{21}\omega^2&c_{22}-a_{22}\omega^2\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow$$

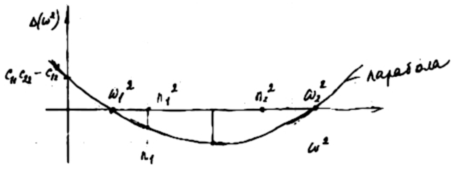
$\Rightarrow\quad \left(c_{11}-a_{11}\omega^2\right)\left(c_{22}-a_{22}\omega^2\right)-\left(c_{12}-a_{12}\omega^2\right)^2=0$ - частотное биквадратное уравнение.

$$c_{11}c_{22}-c_{22}a_{11}\omega^2-c_{11}a_{22}\omega^2+a_{11}a_{22}\omega^4-c_{12}^2+2c_{12}a_{12}\omega^2-a_{12}^2\omega^4=0$$

$$\omega^4\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)-\omega^2\left(c_{11}a_{22}-2c_{12}a_{12}+c_{22}a_{11}\right)+\left(c_{11}c_{22}-c_{12}^2\right)=0$$

Исследуем уравнение:

1) $\omega^2=0:\quad c_{11}c_{22}-c_{12}^2=\Delta(\omega^2)>0=[C]\ \left\|\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix}\right\|>0$ - условие устойчивого равновесия.



2) $\omega^2=n_1^2=\dfrac{c_{11}}{a_{11}};\qquad$ Пусть $n_1^2<n_2^2$.

$$\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right)^2\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)-\left(\frac{c_{11}}{a_{11}}\right)\left(c_{11}a_{22}-2c_{12}a_{12}+c_{22}a_{11}\right)+\left(c_{11}c_{22}-c_{12}^2\right)=$$

$$=\cancel{\frac{c_{11}^2a_{22}}{a_{11}}}-\frac{c_{11}^2a_{12}^2}{a_{11}^2}-\cancel{\frac{c_{11}^2a_{22}}{a_{11}}}+2\frac{c_{11}c_{12}a_{12}}{a_{11}}-\cancel{c_{11}c_{22}}+\cancel{c_{11}c_{22}}-c_{12}^2=$$

$$=-c_{12}^2+2c_{12}\frac{c_{11}a_{12}}{a_{11}}-\frac{c_{11}^2a_{12}^2}{a_{11}^2}=-\left(c_{12}-\frac{c_{11}a_{12}}{a_{11}}\right)^2<0$$

2) $\omega^2=n_1^2=\dfrac{c_{11}}{a_{11}};\ \Delta(\omega^2)=-\left(c_{12}-\dfrac{c_{22}a_{12}}{a_{22}}\right)^2<0$ - по аналогии.

4) при $n_1=n_2$;

$\omega_2^2-n_2^2=n_1^2-\omega_1^2\qquad \omega_1^2>0;\quad \omega_2^2>0;$

32. Свободные колебания в линейной консервативной системе с двумя степенями свободы. Главные колебания. Коэффициенты распределения амплитуд. Формы главных колебаний. Понятие о нормальных координатах.

$$[A]\ddot{\overline{q}}+[C]\overline{q}=0\Rightarrow\begin{cases}a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=0\\a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+c_{21}q_1+c_{22}q_2=0\end{cases}\quad(*)$$

$$\begin{cases}q_1=A_1\sin(\omega t+\alpha)&(1а)\\q_2=A_2\sin(\omega t+\alpha)&(1б)\end{cases}$$ - вид решения для q_1 и q_2;

$\overline{q}=\overline{A}_m\sin(\omega t+\alpha)$ - векторная запись решения.

$$\left.\begin{aligned}&\omega_1\to 1а),\,1б):\quad q_{11}=A_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)\\&\qquad\qquad\qquad\ \ q_{21}=A_{21}\sin(\omega_1t+\alpha_1)\\&\omega_2\to 1а),\,1б):\quad q_{12}=A_{12}\sin(\omega_2t+\alpha_2)\\&\qquad\qquad\qquad\ \ q_{22}=A_{22}\sin(\omega_2t+\alpha_2)\end{aligned}\right\}$$ главные колебания (части решения для ω_1 и ω_2)

$$\left.\begin{aligned}q_1&=q_{11}+q_{12}=\underline{A_{11}}\sin(\omega_1t+\underline{\alpha_1})+\underline{A_{12}}\sin(\omega_2t+\underline{\alpha_2});\\q_2&=q_{21}+q_{22}=\underline{A_{21}}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+\underline{A_{22}}\sin(\omega_2t+\alpha_2);\end{aligned}\right]$$ 6 нейзв.

$$a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+c_{11}q_1+c_{12}q_2=-a_{11}\omega_1^2A_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+$$
$$+c_{11}A_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)-\omega_1^2a_{12}A_{21}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+c_{12}A_{21}\sin(\omega_1t+\alpha_1)=0$$

$$A_{11}\left(c_{11}-a_{11}\omega_1^2\right)+A_{21}\left(c_{12}-a_{12}\omega_1^2\right)=0\qquad(2а)$$

$$a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+c_{21}q_1+c_{22}q_2=-a_{21}\omega_1^2A_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+$$
$$+c_{21}A_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)-\omega_1^2a_{22}A_{21}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+c_{22}A_{21}\sin(\omega_1t+\alpha_1)=0$$

$$A_{11}\left(c_{21}-a_{21}\omega_1^2\right)+A_{21}\left(c_{22}-a_{22}\omega_1^2\right)=0\qquad(2б)$$

Система уравнений $(2а-2б)$

$\eta_{21}=\dfrac{A_{21}}{A_{11}}=-\dfrac{c_{11}-a_{11}\omega_1^2}{c_{12}-a_{12}\omega_1^2}=-\dfrac{c_{21}-a_{21}\omega_1^2}{c_{22}-a_{22}\omega_1^2}$ – частотное биквадратное уравнение. η_{21} – показывает соотношение амплитуд главных колебаний для 1ой и 2ой координаты (коэф-т распределения амплитуд или коэф-т формы)

Форма гл. колебаний $N1$ (соотв. 1ой частоте ω_1).

Подставим $q_{12},\ q_{22}$ в исходной ур-е:

$$-a_{11}\omega_2^2A_{12}-a_{12}\omega_2^2A_{22}+c_{11}A_{12}+c_{12}A_{22}=0$$

$$A_{12}\left(c_{11}-a_{11}\omega_2^2\right)+A_{22}\left(c_{12}-a_{12}\omega_2^2\right)=0\qquad(3а)$$

По сравнению с $(2а)$ изменились только индексы у амплитуд.

$$-a_{21}\omega_1^2A_{12}-a_{22}\omega_1^2A_{22}+c_{21}A_{12}+c_{22}A_{22}=0$$

$$A_{12}\left(c_{21}-a_{21}\omega_1^2\right)+A_{22}\left(c_{22}-a_{22}\omega_1^2\right)=0\qquad(3б)$$

$$\eta_{22}=\frac{A_{22}}{A_{12}}=-\frac{c_{11}-a_{11}\omega_2^2}{c_{12}-a_{12}\omega_2^2}=-\frac{c_{21}-a_{21}\omega_2^2}{c_{22}-a_{22}\omega_2^2};$$

Общее решение:

$$\begin{cases}q_1=A_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+A_{12}\sin(\omega_2t+\alpha_2);\\q_2=\eta_{21}A_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+\eta_{22}A_{12}\sin(\omega_2t+\alpha_2);\end{cases}$$

$A_{11},\ A_{12},\ \alpha_1,\ \alpha_2$ - неизвестные находятся из НУ:

$q_1(0)=q_{10};\ \dot{q}_1(0)=\dot{q}_{10};\ q_2(0)=q_{20};\ \dot{q}_2(0)=\dot{q}_{20};$

Нормальные координаты. Способы перехода к нормальным координатам от обычных.

1. Ограничение начальных условий.

$\overline{q}=\begin{bmatrix}q_1\\q_2\end{bmatrix}$ – простые координаты; $\quad \begin{matrix}q_{20}=\eta_{21}q_{10}\\ \dot{q}_{20}=\eta_{21}\dot{q}_{10}\end{matrix}$ – $НУ$

В результате имеем гарм. колебания с одной частотой ω_1.

Аналогично - $q_{10}=\eta_{22}q_{20}$

2. $q_1=\overbrace{A_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)}^{\theta_1}+\overbrace{A_{12}\sin(\omega_2t+\alpha_2)}^{\theta_2}$

$\quad q_2=\eta_{21}A_{11}\sin(\omega_1t+\alpha_1)+\eta_{22}A_{12}\sin(\omega_2t+\alpha_2)$

Нормальные коор-ты изменяются во времени с одной частотой $\theta_1,\ \theta_1$ - нормальные координаты.

$q_1=\theta_1+\theta_2;\quad q_2=\eta_{21}\theta_1+\eta_{22}\theta_2;$

$$\overline{q}=\underbrace{[P]}_{\text{матрица перехода}}\overline{\theta};\quad \overline{\theta}=\begin{bmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{bmatrix};\quad [P]=\begin{bmatrix}1&1\\\eta_{21}&\eta_{22}\end{bmatrix}$$

$$T=\frac{1}{2}\overline{q}^T[A]\overline{q}=\frac{1}{2}\theta^T\underbrace{[P]^T[A][P]}_{\text{лин. преобр. матр. квадр. формы даст нормир. базис (диаг.форма)}}\theta;$$

$$[P]^T[A][P]=[A_D]=\begin{bmatrix}a'_{11}&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots\\0&\ldots&a'_{nn}\end{bmatrix};$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\overline{q}^T[C]\overline{q}=\frac{1}{2}\theta^T[P]^T[C][P]\theta;\quad [C_D]=\begin{bmatrix}c'_{11}&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots\\0&\ldots&c'_{11}\end{bmatrix};$$

Кин. и пот. эн-я выражаются в канон. форме при выборе норм. коор-т. Уравнения получаются в следущем виде:

$$\begin{cases}a'_{11}\ddot{\theta}_1+c'_{11}\theta_1=0\\a'_{22}\ddot{\theta}_2+c'_{22}\theta_2=0\end{cases}$$

33. Вынужденные колебания в консервативной системе отсчета с двумя степенями свободы в случае гармонического вынуждающего воздействия.

$\textit{вводим}: \ \bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}; \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \ C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix};$

$A\ddot{\bar{q}} + C\bar{q} = \bar{Q}$ ($\bar{Q}$ – *вектор возмущения*); $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \sin pt;$

Рассмотрим след. случай:

Ограничение: $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin pt = Q_0 \sin pt;$

Частное решение: $\bar{q}_r = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \sin pt;$

Подставим его в исх. ур-е и найдем G_1 и G_2.

$\bar{q}_r = \bar{G} \sin pt;$ $\bar{G}$ – вектор амплитуд вынужд. колеб.

$\left(-p^2 A\bar{G} + C\bar{G}\right)\sin pt = \bar{Q}_0 \sin pt \Rightarrow -p^2 A\bar{G} + C\bar{G} = \bar{Q}_0;$

$-p^2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ G_1 = \frac{\Delta_{G_1}}{\Delta}; \ G_2 = \frac{\Delta_{G_2}}{\Delta};$

$-p^2\left(a_{11}G_1 + a_{12}G_2\right) + c_{11}G_1 + c_{12}G_2 = Q_1;$

$-p^2\left(a_{21}G_1 + a_{22}G_2\right) + c_{21}G_1 + c_{22}G_2 = 0;$

$G_1\left(c_{11} - a_{11}p^2\right) + G_2\left(c_{12} - a_{12}p^2\right) = Q_1;$

$G_1\left(c_{21} - a_{21}p^2\right) + G_2\left(c_{22} - a_{22}p^2\right) = 0;$

$c_{21} = c_{12}; \ a_{21} = a_{12};$

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}p^2 & c_{12} - a_{12}p^2 \\ c_{21} - a_{21}p^2 & c_{22} - a_{22}p^2 \end{vmatrix} = \left(c_{11} - a_{11}p^2\right)\left(c_{22} - a_{22}p^2\right) - \left(c_{12} - a_{12}p^2\right)^2$$

$$\Delta_{G_1} = \begin{vmatrix} Q_1 & c_{12} - a_{12}p^2 \\ 0 & c_{22} - a_{22}p^2 \end{vmatrix} = Q_1\left(c_{22} - a_{22}p^2\right);$$

$$\Delta_{G_2} = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}p^2 & Q_1 \\ c_{21} - a_{21}p^2 & 0 \end{vmatrix} = -Q_1\left(c_{21} - a_{21}p^2\right);$$

$$G_1 = \frac{\Delta_{G_1}}{\Delta} = \frac{Q_1\left(c_{22} - a_{22}p^2\right)}{\left(c_{11} - a_{11}p^2\right)\left(c_{22} - a_{22}p^2\right) - \left(c_{12} - a_{12}p^2\right)^2} =$$

$$= \frac{Q_1\left(c_{22} - a_{22}p^2\right)}{\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)\left(p^2 - \omega_1^2\right)\left(p^2 - \omega_2^2\right)};$$

$$G_2 = \frac{\Delta_{G_1}}{\Delta} = -\frac{Q_1\left(c_{12} - a_{12}p^2\right)}{\left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)\left(p^2 - \omega_1^2\right)\left(p^2 - \omega_2^2\right)};$$

Допущения: $a_{12} = 0$ (без инерционной связи)

c_{12} *остается* (остается упругая связь); $c_{12} < 0;$

$$G_1 = \frac{Q_1\left(\frac{c_{22}}{a_{22}} - p^2\right)}{a_{11}\left(p^2 - \omega_1^2\right)\left(p^2 - \omega_2^2\right)} = \frac{Q_1\left(n_2^2 - p^2\right)}{a_{11}\left(p^2 - \omega_1^2\right)\left(p^2 - \omega_2^2\right)};$$

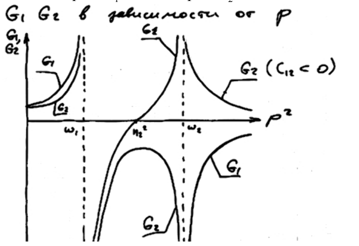
n_2 - парциальная частота координаты q_2;

$$G_2 = \frac{-c_{12}Q_1}{a_{11}a_{22}\left(p^2 - \omega_1^2\right)\left(p^2 - \omega_2^2\right)};$$

$\frac{G_1}{G_2} = -\frac{c_{22}a_{22}p^2}{c_{12} - a_{12}p^2}$ (в общем случае);

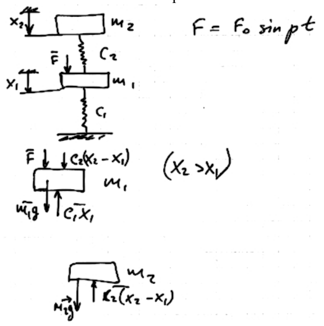
Форма этого отношения остается постоянной и оно зависит только от p^2. $G_1 = 0$ когда $p^2 = n_2^2$.

G_1 G_2 в зависимости от p



34. Вынужденные колебания в консервативной системе с двумя степенями свободы. Эффект динамического гашения колебаний.

Эффект наблюдается тогда, когда амплитуда по одной из обоб. корд-т равна 0 при определенной частоте, а др. $\neq 0$. Иначе это явление называется антирезонансом.



Силы тяжести уходят из урав-ий за счет статич. упруг. силы.

$m_1\ddot{x}_1 = -c_1x_1 + c_2\left(x_2 - x_1\right) + F; \ m_1\ddot{x}_1 + \left(c_1 + c_2\right)x_1 - c_2x_2 = F_0 \sin pt \quad (1);$

$m_2\ddot{x}_2 = -c_2\left(x_2 - x_1\right); \ m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 = 0 \quad (2)$

$a_{11} = m_1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{22} = m_2; \quad a_{21} = 0;$

$c_{11} = \left(c_1 + c_2\right); \ c_{21} = -c_2; \quad c_{12} = -c_2; \quad c_{22} = c_2; \quad Q_1 = F_0;$

m_1 - объект гашения колебаний; m_2 - гаситель колебаний.

Особенности динамического гашения колебаний:

m_2 выбирается по частоте n_2 (с графиков)

есть p, тогда $p^2 = n_2^2 = \frac{c_{22}}{a_{22}} = \frac{c_2}{m_2};$

1) настройка гасителя только по частоте недостаточна: нельзя с помощью объекта малой массы погасить колебания тела большой массы, т.к. необходимая для гашения амплитуда гасителя будет слишком велика и технически нереализуема.

2) полное гашение в реальной системе невозможно т.к. есть диссипативные силы.