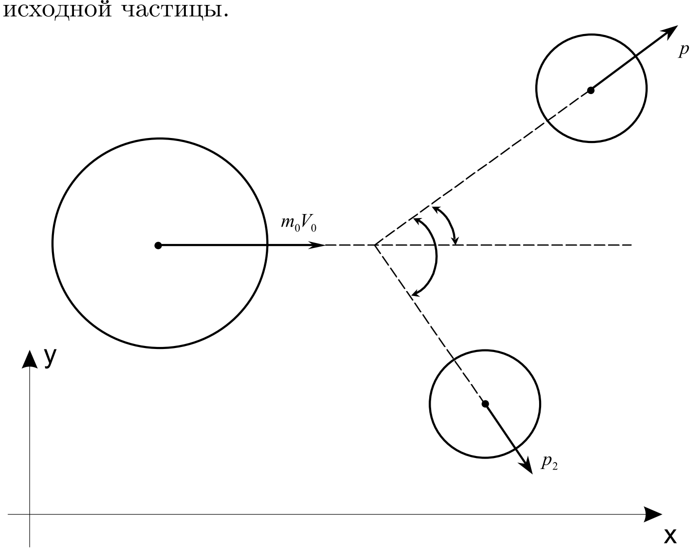
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 21 вариант

Задача 1-3

Условие

Нерелятивистская частица с внутренней энергией E_0 и массой m_0, летящая со скоростью $\vec{V_0}$ распадается на две нерелятивистские частицы, скорости которых $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$, массы m_1 и m_2. Импульсы $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$, кинетические энергии E_1 и E_2. При этом часть внутренней энергии E_0 исходной частицы в количестве ηE_0 расходуется на увеличение кинетической энергии образовавшихся частиц. φ - Угол разлета частиц, θ - угол отклонения первой частицы от первоначального направления полета исходной частицы.



$m_0 = 10^{-2}$кг,
$V_0 = 10$м/с,
$\varphi = \frac{\pi}{2}$,
$m_1 = \frac{1}{4}m_0$,
$m_2 = \frac{3}{4}m_0$,
$p_1 = p_2$,

Необходимо определить следующие величины:

$$\theta, V_1, V_2, p_1, p_2, \eta E_0$$

Так как $p_2 = \frac{mV_0}{2}$, а $m_2 = \frac{m}{3}$, то $V_2 = \frac{p_2}{m_2} = \frac{3V_0}{2}$
По закону сохранения импульса:

$$m_0\vec{V_0} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2}.$$

Так как частицы разлетелись под прямым углом, их импульсы также расходятся под прямым углом. Импульсы двух образовавшихся частиц равны между собой по модулю. Обозначим его как p. Обозначим также $\beta = \varphi - \theta$.
Рассмотрим закон сохранения импульса в проекциях на координатные оси:

$$p \cdot \sin\theta - p \cdot \sin\beta = 0 \Rightarrow \theta = \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда $p_{1x} = p_{2x} = \frac{m_0V_0}{2}, p_1 = p_2 = \frac{m_0V_0}{\sqrt{2}}$, а $\quad V_1 = \frac{m_0V_0}{m_1\sqrt{2}}, V_2 = \frac{m_0V_0}{m_2\sqrt{2}}$.
По закону сохранения энергии:

$$\frac{m_0V_0^2}{2} + \eta E_0 = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}$$

Тогда

$$\eta E_0 = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} - \frac{m_0V_0^2}{2}.$$

Найдем искомые величины:

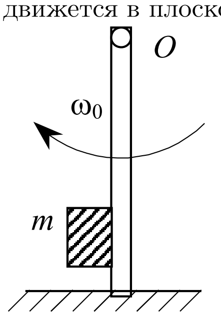
$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4}, \\ p_1 = p_2 = \frac{m_0V_0}{\sqrt{2}} \approx 0.071\text{кг} \cdot \text{м/с}, \\ V_1 = \frac{m_0V_0}{m_1\sqrt{2}} = \frac{4V_0}{\sqrt{2}} \approx 28.284\text{м/с}, \\ V_2 = \frac{m_0V_0}{m_2\sqrt{2}} = \frac{4V_0}{3\sqrt{2}} \approx 9.428\text{м/с}, \\ \eta E_0 = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} - \frac{m_0V_0^2}{2} \approx 0.833\text{Дж}. \end{cases}$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 21 вариант

Задача 2-3

Условие

Жесткий стержень длиной $l = 0.5$м и массой М = 1кг может свободно без трения вращаться вокруг горизонтальной оси О. При прохождении стержнем вертикального положения с угловой скоростью ω_0 , он своим нижним концом ударяет по кубику массой $m = 0.1$кг, который после удара движется в плоскости рисунка.



Тип удара: **абсолютно неупругий**
$\omega_0 = 2\omega_{0m}$
Определить: $\omega_{0m}, \omega_k, V_0, \Delta E$

Обозначим $I_0 = \frac{Mgl^2}{3}$, $\quad I = I_0 + mgl^2$.
При столкновении стержня и шарика при угловой скорости стержня ω_0 стержень с присоединившимся к нему шариком приобретает угловую скорость ω_1, причем по закону сохранения момента импульса:

$$I_0\omega_0 = I\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{I_0}{I}\omega_0$$

Потенциальная энергия системы в таком положении равна $-W = -(\frac{Mgl}{2} + mgl)$. В верхнем положении потенциальная энергия равна W. Таким образом, энергия системы после соударения для критического случая должна быть равна $2W$:

$$\frac{I\omega_1^2}{2} = 2W \Rightarrow \frac{I_0^2\omega_0^2}{I} = 4W \Rightarrow \omega_{0m} = \sqrt{\frac{4IW}{I_0^2}}$$

В случае, когда $\omega_0 = 2\omega_{0m}$ энергия системы после соударения в 4 раза больше, чем в критическом случае. Тогда $\frac{1}{4}$ этой энергии расходуется на поднятие системы, а $\frac{3}{4}$ переходит в кинетическую энергию в верхней точке. Тогда $W_k = \frac{3}{2}W$. Из определения кинетической энергии получим:

$$\frac{I\omega_k^2}{2} = \frac{3}{2}W \Rightarrow \omega_k = \sqrt{\frac{W}{I}}.$$

Вычислим потерю энергии при соударении:

$$\Delta E = \frac{I_0\omega_0^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = \frac{I_0\omega_0^2}{2} - \frac{I_0^2\omega_0^2}{2I}$$

Так как удар абсолютно неупругий, то скорость кубик будет иметь скорость $V_0 = \omega_1 l = \frac{I_0}{I}\omega_0 l$. Запишем искомые величины:

$$\begin{cases} W = mgl + \frac{Mgl}{2}, \\ \omega_{0m} = \sqrt{\frac{4IW}{I_0^2}} \approx 11.517\text{с}^{-1}, \\ \omega_k = \sqrt{\frac{W}{I}} \approx 4.429\text{с}^{-1}, \\ V_0 = \frac{I_0}{I}\omega_0 l \approx 8.859\text{м/с}, \\ \Delta E = \frac{I_0\omega_0^2}{2} - \frac{I_0^2\omega_0^2}{2I} \approx 5.101\text{Дж}. \end{cases}$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 21 вариант

Задача 3-2

Условие

Для данной колебательной системы необходимо:

1) Вывести дифференнциальное уравнение свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -r\vec{V}$, где r - коэффициент сопротивления.

2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.

3) Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.

4) Вычислить логарифмический декремент затухания.

5) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.

6) Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний.

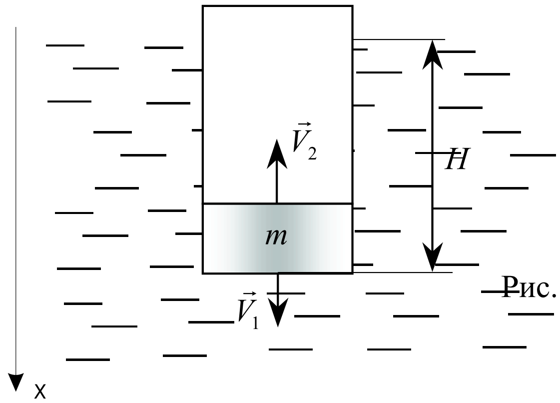


Рис. 14

Исходные данные:
$\rho = 10^3$кг/м^3,
$S = 10^{-3}$м^2,
$m = 0.1$кг,
$r = 0.5$кг/с,
$H = 0.11$м,
$V_1 = 0.02$м/с.

В положении равновесия сила тяжести компенсирует силу Архимеда: $mg - \rho g V = 0$. Примем положение равновесия за положение, где $x = 0$. При отклонении пробирки на величину x. Изменится объем погруженной в воду части и, следовательно, сила Архимеда. Равнодействующая всех сил в таком случае будет равна $F_\Sigma = mg - \rho g(V + Sx) = -\rho g S x$. Данное соотношение будет справедливо только тогда, когда пробирка погружена в воду не полностью, в противном случае сила Архимеда не будет зависеть от глубины.

1) По Второму Закону Ньютона:
$$\vec{F} = m\vec{a}.$$
Рассмотрим это соотношение в проекции на ось x:
$$-\rho g S x - rV_x = ma_x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{\rho g S}{m}x = 0.$$
Получено дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

2) При отсутствии силы rV_x имело бы место соотношение:
$$-\rho g S x = ma \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\rho g S}{m}x = 0.$$
Полученное уравнение является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний, причем $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} \approx 9.905c^{-1}$, а $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}} \approx 0.634$с.

3) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 2.271$с$^{-1}$, где $\quad \beta = \frac{r}{2m}, T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx 2.309$с

4) $\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{r} \approx 0.4$с

5) $\frac{\rho g S H^2}{2} + \frac{mV_1^2}{2} = \frac{\rho g S A_0^2}{2}, \Rightarrow A_0 = \sqrt{H^2 + \frac{m}{\rho g S}V_1^2} \approx 0.19$м;
$\varphi = \arcsin\left(\frac{H}{A_0}\right) \approx 1.56.$

6) Уравнение имеет вид: $x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$.

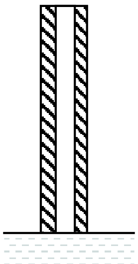
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 21 вариант

Задача 4-1

Условие

Для волновода длиной L, закрепленного, как указано на рисунке, необходимо:

1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна,
2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам),
3) определить частоту и длину волны i-ой гармоники,
4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и давлений.



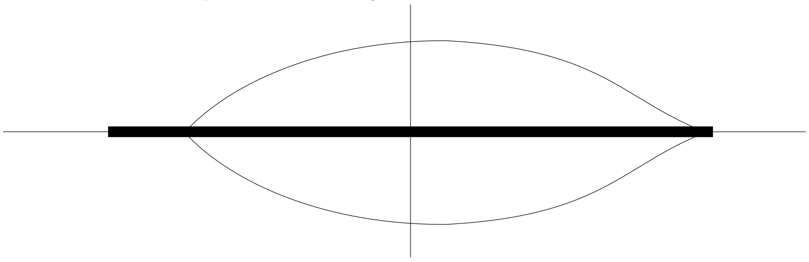
Среда: воздух,
$c = 340$м/с,
$L = 1.02$м,
$i = 2$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_1 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

$$\xi = A\cos(\omega t + \widetilde{\varphi_1})\cos(kx + \widetilde{\varphi_2})$$

На конце, прикрепленном к поверхности будет находится узел, на свободном - пучность. На длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{4L}{i}, \quad i \in \mathbb{N}$ Найдем последовательно искомые величины:

1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:
$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{\pi c i}{2L}, \quad i \in \mathbb{N}$$
2) Частота $\omega_0 = \frac{\pi c}{2L} \approx 523$Гц является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам.
3) Частота i-ой гармони ки: $\omega_i = \frac{\pi c i}{2L} \approx 1.047 \cdot 10^3$Гц, длина волны: $\lambda_i = \frac{4L}{i} = 2.04$м.
4) Качественная картина амплитуд смещений:



5) Качественная картина амплитуд давлений: