Занятие 22
Тема: Волновая природа микрочастиц.
Цель: Волна де Бройля. Соотношения неопределенностей. Модель Бора атома водорода.

Краткая теория

• **Волна де Бройля.** Концепция корпускулярно-волнового дуализма, то есть двойственности природы микрочастиц, частице, обладающей импульсом p, сопоставляет плоскую волну с длиной волны $\lambda = h/p$ ($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка).

• **Соотношение неопределенностей.** Некоторые пары физических величин, относящиеся к описанию свойств частиц, не могут быть одновременно определены (измерены) точно, что является следствием волновой природы частиц. Неопределенности значений таких величин связаны произведением, которое имеет порядок постоянной Планка. К указанным выше парам относятся: неопределенности проекции импульса и координаты частицы: $\Delta x \cdot \Delta p_x \cong h$, неопределенности времени протекания некоторого процесса и соответствующей ему энергии: $\Delta E \cdot \Delta t \cong h$.

• **Теория Бора** относится к описанию свойств атомов водорода и водородоподобных, объединяя в себе классические и квантовые представления, почему носит название полуклассической. Она позволяет рассчитать радиусы стационарных орбит и частоты (или длины волн) спектральных линий, испускаемых или поглощаемых такими атомами.

В основе теории лежит **правило квантования Бора**, которое утверждает, что момент импульса электрона на стационарной орбите кратен постоянной Планка: $L = mvr_n = n\hbar$, где $\hbar = h/2\pi$ - постоянная Планка, $n = 1, 2, 3, \ldots$ - главное квантовое число, характеризующее номер орбиты электрона.

Кроме этого, Бором сформулированы два следующих постулата.

1. Электрон атома может находиться лишь на стационарных круговых орбитах, характеризуемых дискретными радиусами r_1, r_2, r_3, … и энергиями E_1, E_2, E_3, ... Радиус n-ой орбиты электрона

водородоподобного атома с зарядом ядра Z: $r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{Zme^2}$, энергия электрона: $E_n = -\frac{Z^2 me^4}{32\pi^2 \varepsilon_0{}^2 \hbar^2 n^2}$.

2. Поглощение или излучение энергии атомом может происходить только при переходе электрона с одной стационарной орбиты m на другую n. Энергия кванта: E_n - E_m = $h\nu_{nm}$, где ν_{nm} - частота кванта. Зная энергию электрона на стационарных орбитах, можно получить, что для атома водорода длина волны кванта составляет $1/\lambda_{nm} = R(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2})$, где постоянная Ридберга R = 1,097·10^7 м$^{-1}$.

Примеры решения задач

22-1. В некоторый момент времени область локализации свободного электрона задана характерным размером Δx = 0,1 нм. Оценить ее спустя время t = 1 с.

• Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга $\Delta x \Delta p_x \cong h$, при этом неопределенность импульса составляет: $\Delta p_x \cong h/\Delta x$. Соответствующая неопределенность скорости электрона: $\Delta v \cong h/m\Delta x$. Полагая ее сопоставимой по порядку с самой скоростью (неопределенность не превышает самого значения скорости), находим, что спустя Δt = 1 с электрон может пройти расстояние $\Delta s = \Delta v \Delta t \cong 10^3$ км. Это расстояние характеризует неопределенность координаты электрона.

Первоначально электрон был расположен в области порядка размера атома (10^{-10} м), однако спустя мгновение (что такое одна секунда?) он распределен на тысячах километров пространства. Полученный результат означает, что точная локализация свободной микрочастицы в принципе невозможна.

Ответ: $\Delta s \cong 10^3$ км.

22-2. Оценить характерный размер атома. (Использовать соотношение неопределенностей.)

• Воспользуемся соотношением неопределенностей для координаты электрона в атоме и его импульса: $\Delta r \Delta p \cong h$. Будем считать, что эти неопределенности сопоставимы со значениями координаты и импульса: $\Delta r \cong r$, $\Delta p \cong p$. Подставим эти величины в соотношение

неопределенностей и получим $rp \cong h$, откуда $p \cong h/r$. Полная энергия электрона в атоме складывается из двух частей: кинетической энергии движения $p^2/2m$ и потенциальной энергии электрона в электрическом поле ядра $-e^2/4\pi\varepsilon_0 r$ (для примера выбран атом водорода). Подставляя полученное выше выражение для импульса, можем записать полную энергию в виде $E = h^2/2mr^2 - e^2/4\pi\varepsilon_0 r$. Размеры атома оценим из условия минимума энергии системы ядро-электрон – атом является устойчивой системой, а значит, к нему можно применить известное из механики условие устойчивости системы. После дифференцирования и приравнивания нулю производной $\partial E/\partial r = 0$ имеем $-h^2/2mr^3 + e^2/4\pi\varepsilon_0 r^2 = 0$, откуда $r = 2\pi\varepsilon_0 h^2/me^2 \cong 1\cdot10^{-9}$ м. По порядку величины полученный размер соответствует известному газокинетическому размеру атомов.
Ответ: $r \cong 1\cdot10^{-9}$ м.

22-3. В телевизионной трубке длиной один метр электронный луч на экране имеет толщину 0,1 мм. К трубке приложено ускоряющее напряжение $U = 10$ кВ. Определить неопределенность координаты электрона, связанную с его волновыми свойствами.

• Конечная толщина луча означает, что наряду с импульсом $p_x = \sqrt{2meU}$, направленным вдоль оси трубки, у электрона имеется перпендикулярная составляющая импульса Δp_y. Исходя из геометрии луча, по условию задачи можно получить $\frac{\Delta p_y}{p_x} = \frac{0{,}0001}{1} = 10^{-4}$, откуда $\Delta p_y = 10^{-4} p_x$. Для поперечного по отношению к оси трубки направления соотношение неопределенностей дает $\Delta y = \frac{h}{\Delta p_y} = \frac{10^4 h}{p_x} \cong 10^{-17}$ м. Малое значение Δy, связанное с волновой природой электрона, свидетельствует о том, что траекторию электрона в данном случае можно считать вполне классической.
Ответ: $\Delta y \cong 10^{-17}$ м.

22-4. Плоский поток частиц падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, образуя на экране картину интерференции. Считая углы наблюдения малыми, показать, что попытка определить, в какую щель прошла конкретная частица, не имеет физического смысла.

• Пусть частица движется в направлении x, щели и экран расположены в перпендикулярном направлении y. Согласно де Бройлю, частице с импульсом p соответствует длина волны $\lambda = h/p$. Длина волны, как известно, определяет вид картины интерференции. Если расстояние между щелями d, первый интерференционный максимум виден под малым углом $\theta = \lambda/d$ – здесь использован результат описания опыта Юнга. С точки зрения корпускулярного представления о частице, как почти материальной точке, появление интерференционного максимума вызвано отклонением частицы от прямолинейного движения вдоль оси x - появляется вертикальная составляющая импульса $\Delta p_{у}^{кор} = p\theta = h\lambda/\lambda d = h/d$.
При попытке определить, в какую щель прошла частица, необходимо ограничить неопределенность в координате, задающей положение частицы вдоль оси y. Разделив щели на верхнюю и нижнюю, получим предельное значение необходимой точности $\Delta y = d/2$. Из-за волновых свойств частицы неопределенность в импульсе составит $\Delta p_{у}^{волн} \cong 2h/d$. Эта неопределенность оказывается больше вертикальной составляющей импульса $\Delta p_{у}^{кор}$, которая определяет картину интерференции, значит, последняя будет искажена, что лишает смысла предполагаемую попытку определения щели, в которую прошла конкретная частица.
Ответ: $\Delta p_{у}^{волн} > \Delta p_{у}^{кор}$.

22-5. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет $\Delta t = 10^{-8}$ с. При переходе в основное состояние атом испускает видимое излучение длиной волны $\lambda \cong 500$ нм. Оценить спектральную ширину линии (в спектроскопии она носит название «естественное уширение»), соответствующей этому переходу.
• Рассмотрим отдельный фотон, который испускается при переходе из верхнего возбужденного состояния с нижнее основное, его энергия составляет $E = h\nu$, где ν - частота перехода. Энергия возбужденного состояния, согласно соотношению неопределенностей, не определена абсолютно точно. Ее неопределенность связана со средним временем жизни, определяющем характерное время рассматриваемого процесса: $\Delta E\Delta t \cong h$, то есть $\Delta(h\nu)\Delta t \cong h$ или $\Delta\nu \cong 1/\Delta t$. Воспользуемся связью частоты и длины волны $\nu = 1/T = c/\lambda$, откуда $d\nu = -c(\mathrm{d}\lambda)/\lambda^2$. Переходя к абсолютному приращению $d\lambda$, находим $\Delta\lambda \cong d\lambda \cong \lambda^2/c\Delta t$ – это и есть оценка ширины линии. Для видимого света $\Delta\lambda \cong 8\cdot10^{-14}$ м.
Ответ: $\Delta\lambda = 8\cdot10^{-14}$ м.

22-6. Электрон находится в основном состоянии в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной l. С помощью соотношения неопределенностей оценить силу давления электрона на стенки.

• При изменении ширины ямы на dl необходимо совершить работу $dA = Fdl$, которая приведет к изменению энергии частицы на dE. Примем для оценки наименьшего значения импульса неопределенность импульса $p \cong \Delta p$. Неопределенность координаты электрона положим равной ширине ямы $\Delta x \cong l$. Из соотношения неопределенностей $\Delta p \Delta x \cong h$, то есть $p \cong \Delta p \cong h/l$. Энергия электрона $E = p^2/2m = h^2/2l^2m$. При изменении ширины ямы на dl абсолютное изменение энергии составит $dE = (h^2/l^3m)dl$. Оценкой искомой силы давления будет отношение $F \cong dA/dl = dE/dl = h^2/ml^3$.

Ответ: $F \cong h^2/ml^3$.

22-7. Частица массой m находится в бесконечно глубокой потенциальной яме шириной l. Оценить возможные значения энергии частицы, рассматривая ее как стоячую волну де Бройля.

• Вероятность реализации состояний частицы на стенках ямы равна нулю, так как энергия частицы ограничена. Следовательно, на стенках локализованы узлы стоячей волны. Другие узлы могут находиться в самой яме, но при условии, что на расстоянии l укладывается целое число полуволн: $l = n\dfrac{\lambda}{2}$, где n =1, 2, 3, … Выразим импульс частицы через ее длину волны, воспользовавшись $\lambda = h/p$, откуда $p = \dfrac{hn}{2l}$. Зная импульс частицы, можно найти ее кинетическую энергию $E = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{h^2n^2}{8ml^2}$. Основной вывод из полученного результата состоит в том, что энергия частицы не может принимать произвольные значения, она – «квантуется».

Ответ: $E = \dfrac{h^2n^2}{8ml^2}$, n =1, 2, 3, ….

22-8. Частица массой m движется по круговой орбите в центрально-симметричном поле. Потенциальная энергия частицы зависит от расстояния r до центра поля как $U = \frac{kr^2}{2}$. Используя принцип квантования Бора, найти радиусы орбит и полную энергию частицы.

• Сила, сообщающая частице нормальное ускорение, является консервативной, ее абсолютное значение может быть найдено через градиент потенциальной энергии: $F_n = \frac{dU}{dr} = kr$. Согласно классической механике $ma_n = m\frac{v^2}{r} = F_n = kr$, где v – скорость частицы. Правило квантования момента импульса по Бору: $rmv = \hbar n$, где n = 1, 2, 3, … Совместное решение уравнений дает радиусы орбит частицы $r_n = \sqrt{\frac{n\hbar}{\sqrt{km}}}$. Им соответствуют значения полной энергии, находимой как сумма кинетической и потенциальной составляющих: $E_n = \frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2} = n\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Ответ**:** $r_n = \sqrt{\frac{n\hbar}{\sqrt{km}}}$**,** $E_n = n\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$**.**

Задачи для самостоятельного решения

22-9. Определить энергию ΔE, которую необходимо сообщить электрону, чтобы соответствующая ему длина волны де Бройля уменьшилась от λ_1 до λ_2.

Ответ: $\Delta E = \frac{h}{2m}(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2})$.

22-10. На основе соотношения неопределенностей оценить ширину одномерной бесконечно глубокой потенциальной ямы, в которой наименьшая энергия электрона составляет E.

Ответ: $\Delta x \cong \frac{h}{\sqrt{2mE}}$.

22-11. Частица массой m движется в одномерном поле консервативных сил, где ее потенциальная энергия зависит от координаты как $U(x) = \frac{kx^2}{2}$. Оценить минимально возможную энергию частицы. (Использовать соотношение неопределенностей.)

Ответ: $E = h\sqrt{k/m}$.

22-12. Неопределенность координаты движущейся частицы равна длине волны де Бройля. Определить относительную неопределенность импульса.

Ответ: $1/2\pi$.

22-13. Внутри сферической полости радиусом R находится частица массой m. Состояние частицы характеризуется минимально возможной энергией. Используя соотношение неопределенностей, найти среднее давление p, которое частица оказывает на стенки полости.

Ответ: $p \cong \dfrac{\hbar^2}{4\pi m R^5}$.

22-14. Направленный поток электронов, имеющих одинаковую скорость, нормально падает на диафрагму с узкой щелью шириной b. Найти скорость электронов v, если на экране, отстоящем от щели на расстояние l, ширина центрального дифракционного максимума равна Δx.

Ответ: $v = \dfrac{2hl}{mb\Delta x}$.

Контрольные задачи

22-15. Альфа-частица (ядро атома гелия) находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Наименьшая энергия частицы составляет $E_{мин}$ =8 МэВ. Оценить размеры ямы. (Сокращение «эВ» читают как «электронвольт», его используют для обозначения внесистемной единицы измерения энергии: 1 эВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж.)

22-16. Используя соотношение неопределенностей, оценить наименьшие ошибки в определении скоростей электрона (m_e = $0{,}9\cdot10^{-31}$ кг) и протона (m_p = $1{,}6\cdot10^{-27}$ кг), если их координаты могут быть измерены с точностью до 1 мкм.

22-17. Оценить предельное линейное разрешение электронного микроскопа, в котором вместо света использован поток электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов 1 кВ.

22-18. Найти длину волны де Бройля протона, если в однородном магнитном поле с индукцией B он движется по траектории с радиусом кривизны R. Вектор скорости протона перпендикулярен вектору индукции.