7.6.3. *Примеры решения задач по квантовой физике*

Задача 1. Найти длину волны де Бройля для электрона, кинетическая энергия которого равна:
1) 10 кэВ, 2) 1 МэВ.

$$W_1 = 10\,\text{кэВ} = 10 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\ \text{Дж}$$

Дано: $$W_2 = 1\,\text{Мээ} = 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{Дж}$$

$$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{кг}$$

Найти: $\lambda_1,\ \lambda_2$

Решение: Длина волны де Бройля связана с импульсом:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}$ - постоянная Планка;
p - импульс частицы.

Импульс частицы зависит от ее скорости. Если скорость движения частицы много меньше скорости света в вакууме ($v \ll c$), то это случай нерелятивистский. Если скорость движения частицы соизмерима со скоростью света в вакууме, то это случай релятивистский. Импульс частицы связан с энергией. Поэтому, чтобы выяснить, какой это случай, вычислим энергию покоя частицы и сравним ее с энергией движущейся частицы. Вычислим энергию покоя электрона:

$$E_0 = mc^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2 = 8{,}16 \cdot 10^{-14}\ \text{Дж}$$

Сравним кинетическую энергию электрона с энергией покоя E_0 . В первом случае $W_1 \ll E_0$, значит это случай нерелятивистский и импульс равен: $p = mv$. Импульс связан с кинетической энергией соотношением:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Отсюда: $p = \sqrt{2mW}$

Тогда:

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mW_1}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-15}}} = 1{,}22 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

Во втором случае $W_2 > E_0$, значит это случай релятивистский. Импульс равен: $p = \frac{1}{c}\sqrt{W(W + 2E_0)}$, где c - скорость света. Тогда:

$$\lambda_2 = \frac{hc}{\sqrt{W_2(W_2 + 2E_0)}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-13}(1{,}6 \cdot 10^{-13} + 2 \cdot 8{,}16 \cdot 10^{-14})}} = 8{,}7 \cdot 10^{-13} \text{ м}$$

Ответ: $\lambda_1 = 1{,}22 \cdot 10^{-10}$ м, $\lambda_2 = 8{,}7 \cdot 10^{-13}$ м

Задача 2. Частица находится в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной *l* на втором энергетическом уровне. В каких точках ямы плотность вероятности обнаружения частицы совпадает с классической плотностью вероятности?

Дано: $l, \quad W_п = W_{кл}, \quad n = 2$

Найти: x.

Решение: Волновая функция ?, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной *l*, имеет вид:

$$\Psi_п = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (1)$$

где n - номер энергетического уровня (n = 1,2,3...),
x - координата частицы в яме (0 ≤ x ≤ l).

Согласно физическому смыслу волновой функции:

$$|\Psi|^2 = w \qquad (2)$$

где w - плотность вероятности обнаружения частицы в точке с координатой x.

Если частица находится на втором энергетическом уровне (n = 2), т.е.:

$$w_2 = \frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \tag{3}$$

Выражение для классической плотности вероятности имеет вид:

$$w_{кл} = \frac{1}{l} \tag{4}$$

Приравнивая по условию выражения (3) к (4), получим:

$$\sin^2\left(\frac{2\pi x}{l}\right) = \frac{1}{2} \tag{5}$$

Решая уравнение (5), найдем:

$$x = \left(k \pm \frac{1}{4}\right)\frac{l}{2}, \quad k = 0,\pm1,\pm2...$$

В пределах ямы ($0 \le x \le l$) таких точек четыре:

$$x = \left(\frac{l}{8}, \frac{3l}{8}, \frac{5l}{8}, \frac{7l}{8}\right)$$

Ответ: $x = \left(\frac{l}{8}, \frac{3l}{8}, \frac{5l}{8}, \frac{7l}{8}\right)$

Задача 3. Некоторый примесный полупроводник имеет решетку типа алмаза и обладает только дырочной проводимостью. Определить концентрацию дырок n_p и их подвижность u_p, если постоянная Холла $R_x = 3{,}8\cdot10^{-4}$ м^3/Кл. Удельная проводимость полупроводника ? =110 (Ом·м)$^{-1}$.

Дано:

$$R_x = 3{,}8\cdot10^{-4} \text{ м}^3/\text{КК}$$

$$n_n = 0$$

$$\sigma = 110 \, \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$$

Найти: n_p, u_p.

Решение: Концентрация дырок n_p связана с постоянной Холла, которая для полупроводников с решеткой типа алмаза, обладающих носителями только одного знака, выражается формулой:

$$R_x = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{en_p} \qquad (1)$$

где e - элементарный заряд.

Отсюда:

$$n_p = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{eR_x} \qquad (2)$$

Подставим числовые значения величин в формулу (2) и проведем вычисления:

$$n_p = \frac{3 \cdot 3{,}14}{8} \cdot \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-4}} = 1{,}9 \cdot 10^{22}\ \text{м}^{-3}$$

Удельная проводимость полупроводников выражается формулой:

$$\sigma = e(n_n u_n + n_p u_p) \qquad (3)$$

где n_n и n_p - концентрации электронов и дырок,
u_n и u_p - их подвижности.

При отсутствии электронной проводимости первое слагаемое в скобках равно нулю, и формула (3) примет вид:

$$\sigma = en_p u_p$$

Отсюда искомая подвижность:

$$u_p = \frac{\sigma}{en_p} \qquad (4)$$

Подставим в (4) выражение n_p, описываемое формулой (2):

$$u_p = \frac{8}{3\pi}\sigma R_x \qquad (5)$$

Подставим в (5) численные значения и проведем вычисления:

$$u_p = \frac{8}{3 \cdot 3{,}14} \cdot 110 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-4} = 3{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{м/(В} \cdot \text{с)}$$

Ответ: $n_p = 1{,}9 \cdot 10^{22}\ \text{м}^{-3}$, $u_p = 3{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{м/(В} \cdot \text{с)}$