Занятие 21
Тема: Равновесное тепловое излучение. Квантовая природа излучения.
Цель: Законы Стефана-Больцмана, Вина. Фотоны. Формула Планка. Давление излучения. Плотность потока фотонов.

Краткая теория

• Нагретое тело излучает в окружающее пространство электромагнитную волну – тепловое излучение, находящееся в термодинамическом равновесии с самим телом. К тепловому излучению, как материальному объекту, применимы законы макроскопической термодинамики. Наряду с испусканием энергии, тело поглощает энергию излучения, идущего извне и падающего на его поверхность. В качестве физической модели при изучении свойств теплового излучения используют **модель абсолютно черного тела** (АЧТ), полностью поглощающего излучение любых длин волн, попадающее на его поверхность. Все другие тела носят название «**серых**», так как частично отражают излучение.
Согласно квантовым представлениям, любое электромагнитное излучение – это поток частиц, **квантов**, двигающихся со скоростью света. Каждый квант (в видимой области спектра он имеет название «**фотон**») обладает энергией и импульсом, зависящими от частоты кванта.
• Поток энергии с единицы площади поверхности излучающего тела по всем направлениям (в пределах телесного угла 2π стерадиан) в единицу времени называют **энергетической светимостью** R. **Закон Стефана-Больцмана** определяет связь R с температурой абсолютно черного тела $R = \sigma T^4$, где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^{2}К^4) - постоянная Стефана-Больцмана. Полная мощность излучения с поверхности: $\Delta \Phi = R \Delta S$, где ΔS – площадь излучающей поверхности.
Объемная плотность энергии u теплового излучения, находящегося в равновесии с испускающим его телом, связана с энергетической светимостью следующим образом: $R = cu/4$, где c – скорость света.
• **Испускательная способность.** Электромагнитное излучение состоит из волн различных длин волн λ (или циклических частот ω). Полный поток энергии с единицы площади поверхности в узком спектральном интервале $d\lambda$ (или $d\omega$) имеет вид: $dR_\lambda = r_\lambda d\lambda$ (или $dR_\omega = r_\omega d\omega$). Коэффициенты r_λ и r_ω называют испускательной

способностью тела, причем коэффициенты зависят от длины волны (или частоты). Суммирование испускательной способности по всему спектральному диапазону, в котором излучает тело, приводит к энергетической светимости: $R = \int r_\lambda d\lambda$ (или $R = \int r_\omega d\omega$).

Классическая **формула Релея-Джинса** определяет испускательную способность АЧТ в области малых частот (или больших длин волн):
$$r_\omega = f_{\omega,T} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT .$$

Формула Планка определяет испускательную способность АЧТ на основе квантовых представлений либо через длины волн:
$$r_\lambda = f_{\lambda,T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1} ,$$
либо через циклическую частоту излучения:
$$r_\omega = f_{\omega,T} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1} .$$

В оба последних выражения входит **постоянная Планка**, в одном случае $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, в другом $\hbar = h/2\pi = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Различие в формах записи и значениях постоянной связано с тем, что в первом случае она соотнесена с частотами, во втором – с циклическими частотами. Постоянная $\hbar$ носит название «аш с чертой».

Закон смещения Вина. При заданной температуре T тела спектральный максимум энергии теплового излучения приходится на длину волны λ_m, определяемую из соотношения $\lambda_m \cdot T = b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К.

Фотоны. Излучение может быть представлено в виде потока частиц – квантов. Энергия отдельного кванта $E = h\nu = \hbar\omega$. Импульс кванта $p = E/c = h/\lambda = hk/2\pi = \hbar k$, где k – волновое число.

Давление, производимое светом (потоком квантов - фотонов) при их нормальном падении на плоскую поверхность:

$P = u(1 + \rho) = I(1 + \rho)/c$, где u - объемная плотность энергии световой волны, I – плотность потока энергии световой волны (**интенсивность** световой волны, или модуль вектора Пойнтинга-Умова), ρ - энергетический коэффициент отражения от поверхности.

Примеры решения задач

21-1. Абсолютно черный шар радиусом ρ имеет температуру *T*. Определить: энергетическую светимость *R*, полный поток излучаемой тепловой энергии *Ф*, плотность потока энергии на расстояниях $r >> \rho$, массу полной энергии, излучаемой за время *t*.

• Энергетическая светимость, то есть полный поток энергии с единицы площади излучающей поверхности, может быть найдена с помощью закона Стефана-Больцмана: $R = \sigma T^4$. Полный поток энергии, излучаемой поверхностью шара: $\Phi = \sigma T^4 \cdot 4\pi\rho^2$. При отсутствии потерь энергии плотность потока энергии $j_E = \Phi / S$ на расстоянии $r >> \rho$ будет меньше, так как один и тот же поток энергии распределен по сфере большей площади: $j_E = R\dfrac{4\pi\rho^2}{4\pi r^2} = \sigma T^4 \dfrac{\rho^2}{r^2}$. Излученной за время *t* энергии Φt соответствует эквивалентное количество массы, которое можно найти из соотношения $mc^2 = \Phi t$, откуда $m = \dfrac{\Phi t}{c^2}$.

Ответ: $R = \sigma T^4$, $\Phi = \sigma T^4 \cdot 4\pi\rho^2$, $j_E = \sigma T^4 \dfrac{\rho^2}{r^2}$, $m = \dfrac{\Phi t}{c^2}$.

21-2. Найти мощность теплового излучения с единицы поверхности АЧТ с температурой *T*, приходящуюся на малый интервал длин волн $\Delta\lambda$ вблизи максимума спектральной плотности энергии излучения. (использовать формулу Планка.)

• Мощность излучения, или поток энергии, с единицы площади поверхности тела есть его энергетическая светимость. Энергетическая светимость ΔR, приходящаяся на спектральный интервал $\Delta\lambda$: $\Delta R_\lambda = f_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda$, где $f_{\lambda,T} = \dfrac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \dfrac{1}{\exp(\dfrac{hc}{\lambda kT}) - 1}$ - функция распределения Планка.

Энергетическую светимость в конечном интервале длин волн находят интегрированием $f_{\lambda,T}$ по этому интервалу. Ввиду того, что заданный в задаче интервал длин волн $\Delta\lambda$ мал, приближенное значение интеграла можно получить, как произведение значения функции $f_{\lambda,T}$ в окрестности промежутка интегрирования на ширину промежутка $\Delta\lambda$. Из закона Вина длина волны λ в максимуме спектральной плотности излучения: $\lambda = \lambda_m = b/T$. Окончательно: $\Delta R_\lambda = \frac{2\pi\, hcT^5}{b^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{bk}} - 1}\Delta\lambda$.

Ответ: $\Delta R_\lambda = \frac{2\pi\, hcT^5}{b^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{bk}} - 1}\Delta\lambda$.

21-3. Замкнутая полость объемом V заполнена равновесным тепловым излучением соответствующим температуре T. Найти объемную теплоемкость c_v излучения.

• Воспользуемся связью энергетической светимости R и объемной плотности равновесного излучения: $R = \frac{cu}{4}$, где R и u имеют смысл интегральных величин, то есть вычислены по всему спектру теплового излучения. Энергия излучения в полости: $U = u \cdot V = \frac{4R}{c}V = \frac{4\sigma T^4}{c}V$. Отсюда объемная теплоемкость: $c_v = \frac{1}{V}\frac{dU}{dT} = \frac{16\sigma T^3}{c}$.

Ответ: $c_v = \frac{16\sigma T^3}{c}$.

21-4. Точечный изотропный источник мощностью P излучает свет длиной волны λ. Найти среднюю плотность потока фотонов на расстоянии r от источника, а также расстояние от источника до точки пространства, в которой средняя концентрация фотонов равна n.

• Количество фотонов, испускаемых источником в единицу времени, можно найти делением мощности на энергию отдельного фотона $\hbar\omega$: $\frac{dN}{dt} = \frac{P}{\hbar\omega} = \frac{P\lambda}{2\pi\hbar c}$, поскольку циклическая частота $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{c}{\lambda}$.

Поток фотонов, то есть их количество, проходящее через единицу площади сферической поверхности радиуса r в единицу времени:

$j = \frac{dN}{dt} / 4\pi r^2 = \frac{P\lambda}{8\pi^2 \hbar c r^2}$. Поток частиц j связан с их концентрацией n известным соотношением: $j = nv$, где $v = c$ – скорость фотонов. Следовательно, концентрация фотонов: $n = \frac{j}{c} = \frac{P\lambda}{8\pi^2 \hbar c^2 r^2}$, то есть искомое расстояние $\rho = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{P\lambda}{2\hbar n}}$.

Ответ: $j = \frac{P\lambda}{8\pi^2 \hbar c r^2}$, $\rho = \frac{1}{2\pi c}\sqrt{\frac{P\lambda}{2\hbar n}}$.

21-5. Лазер, или оптический квантовый генератор, в световом импульсе длительностью τ излучает энергию E. Найти среднее давление света импульса, если его сфокусировать на зеркальную поверхность (коэффициент отражения ρ) в небольшое пятно диаметром d.

• Энергия импульса равна полной энергии испущенных фотонов: $E = N\hbar\omega$. Полный импульс фотонов: $P = Np = N\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{E}{c}$, где p - импульс одного фотона. Импульс отраженных фотонов: $P_{отр} = \frac{\rho E}{c} = \rho P = \rho\frac{E}{c}$. Полное изменение импульса фотонов при отражении: $\Delta P = P + P_{отр} = (1+\rho)\frac{E}{c}$. Согласно второму закону Ньютона изменение импульса равно импульсу силы: $\Delta P = F\tau = P_{давл} S\tau$, откуда давление: $P_{давл} = \frac{\Delta P}{S\tau} = \frac{4(1+\rho)E}{\pi d^2 \tau c}$.

Ответ: $P_{давл} = \frac{4(1+\rho)E}{\pi d^2 \tau c}$.

21-6. Плоская световая волна белого света интенсивностью I падает под углом ϑ к нормали на плоскую поверхность площадью S. Коэффициент отражения от поверхности равен ρ. Найти силу давления, оказываемого светом на поверхность.

• Рассмотрим фотоны в узком интервале частот $d\omega$ вблизи частоты ω, попадающие на поверхность единичной площади. Импульс

каждого фотона $p = \frac{\hbar\omega}{c}$. При отражении от площадки импульс фотона меняется на сумму проекций вектора импульса падающего и отраженного фотонов на нормаль к поверхности *n*. Для падающего фотона $p_n^{пад} = p\cos\theta$, для отраженного $p_n^{отр} = \rho\, p\cos\theta$, полное изменение импульса составляет $\Delta p = p_n{}^{пад} + p_n{}^{отр} = (1+\rho)\frac{\hbar\omega}{c}\cos\vartheta$ - такой импульс один фотон передает стенке. Обозначим через dN_ω плотность потока фотонов в пучке света, то есть их количество в интервале частот $d\omega$, проходящих через единичное поперечное сечение пучка за единицу времени. Этому потоку соответствует интенсивность dI_ω светового потока, которая складывается из энергии всех фотонов, оказавшихся в интервале $d\omega$, значит, $dI_\omega = dN_\omega \hbar\omega$.
Поток движется под углом к поверхности, поэтому единичная площадка $\Delta S_\perp$ в поперечном сечении светового пучка приходится на площадку большей площади $\Delta S = \Delta S_\perp / \cos\theta$ на рассматриваемой поверхности. Один и тот же поток $dN_\omega = dI_\omega / \hbar\omega$ фотонов распределен по ней с меньшей плотностью, а именно, $dN_\omega{}^{пов} = (dI_\omega / \hbar\omega)\cos\theta$. Для плоской волны эта плотность будет постоянной по всей поверхности.
По второму закону Ньютона, изменение импульса в единицу времени равно действующей силе: $\Delta p \cdot dN_\omega{}^{пов}$. Эта сила приходится на единицу площади поверхности, то есть является давлением dP_ω. Полная сила, с которой световой поток в интервале частот $d\omega$ действует на всю поверхность, находится умножением давления на площадь:

$$dF_\omega = dP_\omega S = \Delta p \cdot dN_\omega{}^{пов} S = (1+\rho)\frac{\hbar\omega}{c}\cos\theta \cdot \frac{dI_\omega}{\hbar\omega}\cos\theta \cdot S = (1+\rho)\frac{\cos^2\theta}{c} S \cdot dI_\omega$$

.

Суммирование найденных сил по всем частотам спектра дает полную силу давления $F = \int dF_\omega = (1+\rho)\frac{S\cos^2\vartheta}{c}\int dI_\omega = (1+\rho)\frac{I\,S\cos^2\vartheta}{c}$.

Ответ: $F = \frac{(1+\rho)IS\cos^2\vartheta}{c}$.

Задачи для самостоятельного решения

21-7. Оценить температуру, до которой нагрелась бы освещенная часть поверхности Земли, если бы она поглощала солнечное излучение, как абсолютно черное тело. Считать, что в результате суточного вращения Земли температура поверхности всюду одинакова. Температура поверхности Солнца $T_0 = 5800$ К, радиус Солнца $R_0 = 700 \cdot 10^3$ км, радиус земной орбиты $r = 150 \cdot 10^6$ км.

Ответ: $T \cong \sqrt{\frac{R_0}{\sqrt{2} \cdot r}} T_0$; около 300 К.

21-8. Испускательная способность некоторого тела не равна нулю только в интервале частот от ω_1 до ω_2, в котором она составляет r. Определить энергетическую светимость тела.

Ответ: $R = r(\omega_2 - \omega_1)$.

21-9. Медный шарик диаметром d, нагретый до температуры T_0, поместили в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к нулю по шкале Кельвина. Считая шарик абсолютно черным телом, найти через какое время его температура уменьшится в η раз. Удельная теплоемкость c и плотность ρ меди известны.

Ответ: $t = \frac{(\eta^3 - 1)c\rho\, d}{18\sigma T_0^3}$.

21-10. Поток света длиной волны λ падает нормально на зеркальную поверхность. Поток энергии световой волны равен Φ. Определить силу давления света, а также количество фотонов, попадающих на поверхность за одну секунду.

Ответ: $F = \frac{2\Phi}{c}$, $N = \frac{\Phi\lambda}{hc}$.

21-11. Поток энергии, излучаемый электрической лампой, равен $\Phi = 600$ Вт. На расстоянии $r = 1$м от лампы перпендикулярно падающим лучам расположено маленькое зеркало диаметром $d = 2$ см. Полагая, что излучение лампы одинаково распространяется во всех направлениях, найти силу его давления на зеркало.

Ответ: $F = \frac{\Phi d^2}{8cr^2} \cong 10^{-10}$ Н.

Контрольные задачи

21-12. Считая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, найти его энергетическую светимость и температуру поверхности. Солнечный диск виден с Земли под углом $\alpha = 32'$. Плотность потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца составляет $C = 1{,}4$ кДж/м^{2}с (эта величина носит название «солнечная постоянная»).

21-13. У двух абсолютно черных источников теплового излучения максимумы испускательной способности приходятся на длины волн, отличающиеся на $\Delta\lambda$. Температура одного источника T_1. Найти температуру другого источника.

21-14. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела длина волны, соответствующая максимуму испускательной способности, сместилась с λ_1 до λ_2 . Во сколько раз изменилась энергетическая светимость?

21-15. Излучение Солнца по своему спектральному составу достаточно близко к излучению АЧТ с максимумом испускательной способности на длине волны 0,48 мкм. Найти массу, теряемую Солнцем за одну секунду.

21-16. Замкнутая полость заполнена тепловым равновесным излучением, соответствующим температуре T. Найти объемную плотность энтропии излучения.

21-17. Параллельный пучок света длиной волны λ нормально падает на зачерненную поверхность, создавая давление p. Определить концентрацию фотонов в пучке.

21-18. Определить длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, имеющего скорость v.

21-19. Монохроматический свет длиной волны λ нормально падает на зеркальную поверхность, создавая давление p. Определить количество фотонов, попадающих на единицу площади поверхности за секунду.