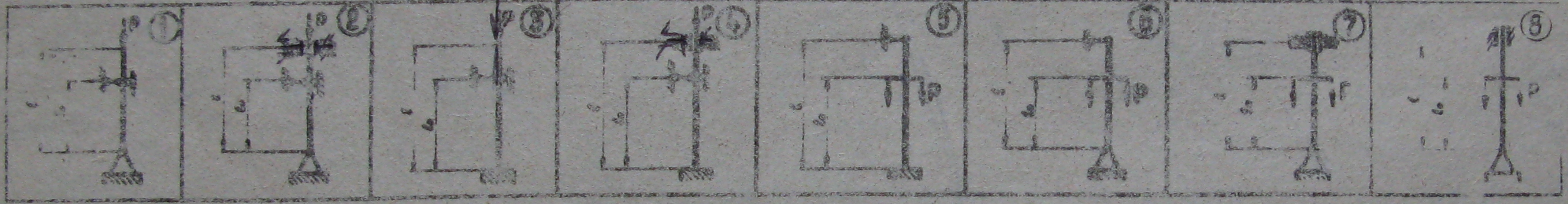
МВТУ Кафедра „Сопротивление материалов"	Расчетно-проектировочное задание № 6 Задача № 1	**УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ**	Лист Всего листов

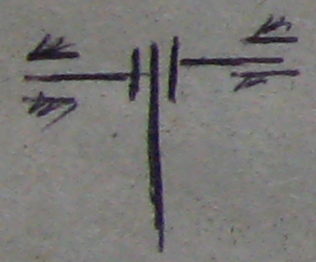
1. Энергетическим способом или способом интегрирования дифференциальных уравнений изгиба определить коэффициент приведения длины стойки постоянного поперечного сечения.
2. Определить размеры поперечного сечения стойки с помощью коэффициентов понижения φ, если:
   $P=200$ кН; $l=3$ м; материал стойки – сталь 3; допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma]_{сж}=160$ МПа.

Примечание: Задания задаются трехзначным числом. Первая цифра обозначает номер закрепления и нагружения стойки, вторая цифра – номер поперечного сечения, третья – величину отношения l_0/l.

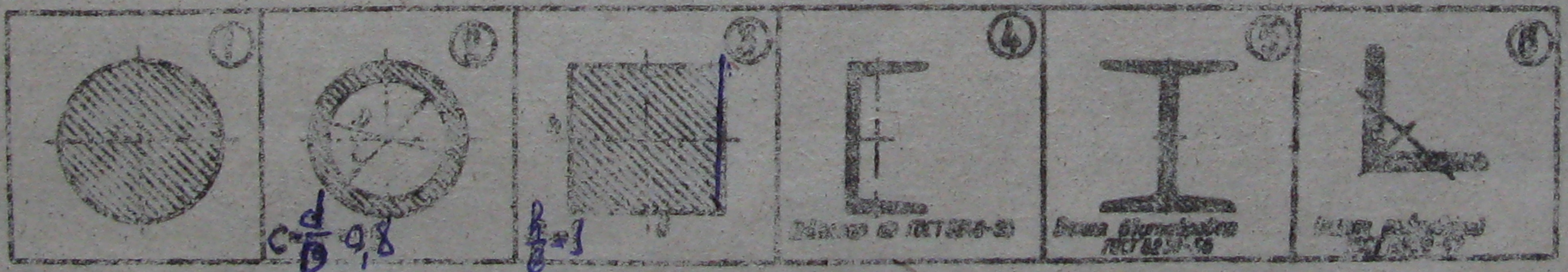
СХЕМА ЗАКРЕПЛЕНИЯ И НАГРУЖЕНИЯ СТОЙКИ



ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ СТОЙКИ



2, 4, 7

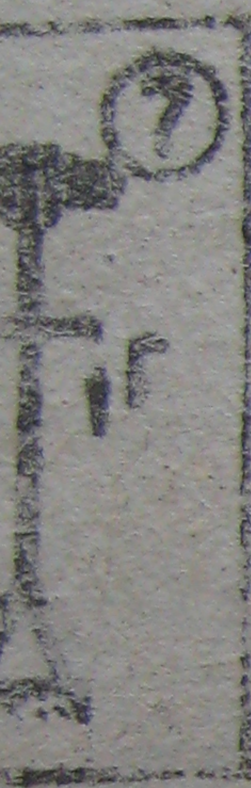


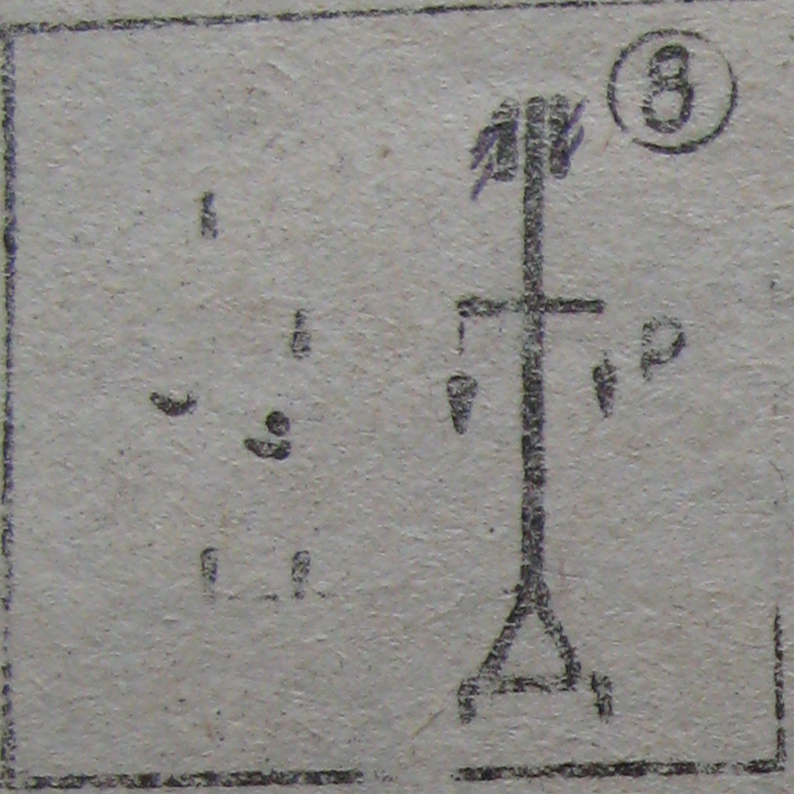
ВЕЛИЧИНЫ ОТНОШЕНИЯ l_0/l

N	1	2	3	4	5	6
l_0/l	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	3	4
6	1	5
7	2	6
8	2	6
2	1	5
3	3	4
4	3	3
5	2	2
6	1	1
7	3	1
8	2	2

2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	3	4
6	1	5
7	2	6
8	2	6
2	1	5
3	3	4
4	3	3
5	2	2
6	1	1
7	3	1
8	2	2





Министерство высшего и среднего специального образования СССР

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

И. Д. КИСЕНКО, В. И. ФОМИН

Утверждены редсоветом МВТУ

РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Методические указания по курсу
«Сопротивление материалов»
для студентов вечернего факультета

Под редакцией Н. А. Суховой

Москва 1987

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом.

Рассмотрены и одобрены кафедрой К-5 12.12.86 г., методической комиссией факультета К 18.12.86 г. и учебно-методическим управлением 04.01.87 г.

Рецензент д. т. н. проф. Стасенко И. В.

Оглавление

Редактор Н. Г. Ковалевская Корректор Л. И. Малютина

Заказ 688 Объем 0,75 п. л. (0,75 уч.-изд. л.) Тираж 300 экз.

Бесплатно Подп. в печать 12.05.87 г. План 1987 г., № 81.

Типография МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

Обозначения

P - сосредоточенная сила, Н;
$P_{кр}$ - критическое значение силы, Н;
σ - нормальное напряжение, Па;
$\sigma_{кр}$ - критическое напряжение, Па;
$\sigma_{пц}$ - предел пропорциональности, Па;
$\sigma_{тс}$ - предел текучести при сжатии, Па;
$\sigma_{вс}$ - предел прочности при сжатии, Па;
$[\sigma]$ - допускаемое напряжение при сжатии, Па;
φ - коэффициент снижения допускаемого напряжения;
$n_у$ - коэффициент запаса устойчивости;
E - модуль упругости первого рода, Па;
l, a - длина, м;
F - площадь поперечного сечения, м^2;
I - наименьший осевой момент инерции сечения, м^4;
i - наименьший ралиус инерции сечения, м;
K - коэффициент формы сечения;
μ - коэффициент приведения длины;
λ - гибкость стержня;
N - продол.ная (нормальная) сила, Н;
Q - поперечная сила, Н;
M - изгибающий момент, Н·м;
θ - угловое перемещение, рал;
V - линейное перемещение, м;

Основные зависимости

Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i}$, где $i = \sqrt{\frac{I}{F}}$.

Критическая сила $P_{кр} = \frac{\pi^2 E I}{(\mu l)^2}$.

Критическое напряжение $\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$.

Формулы для $P_{кр}$ и $\sigma_{кр}$ применимы только при упругих деформациях, т.е. при $\lambda \geq \lambda_п$, где $\lambda_п = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$ - предельная гибкость стержня, при которой $\sigma_{кр} = \sigma_п$. При $\lambda < \lambda_п$ критическое напряжение $\sigma_{кр} = \sigma_{тс} - (\sigma_{тс} - \sigma_{пц})\left(\frac{\lambda}{\lambda_п}\right)^2$; для хрупкого материала следует в этой формуле заменить $\sigma_т$ на $\sigma_{вс}$. Условие устойчивости $\frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]$.

Умножением обеих частей равенства на λ^2 условие устойчивости приводится к виду

$$\frac{\lambda^2}{\varphi} = \frac{[\sigma]\cdot(\mu l)^2}{P} K,$$

где $K = \frac{F^2}{I}$.

Критическая сила может быть вычислена энергетическим методом:

$$P_{кр} = \frac{U}{\Delta} = \frac{\int_0^l EI(V'')^2 dz}{\int_0^l (V')^2 dz},$$

где $U = \frac{1}{2}\int_0^l EI(V'')^2 dz$ - потенциальная энергия деформации изгиба стержня, $\Delta = \int_0^l (V')^2 dz$ - осевое перемещение силы P (рис.I), определяемое формой оси стержня между сечением, в котором приложена сила, и неподвижной опорой; $V = f(z)$ - предварительно выбранная функция, соответствующая форме оси стержня.

В табл. I даны коэффициенты приведения длины, в табл. 2 - коэффициенты снижения допускаемого напряжения при сжатии.

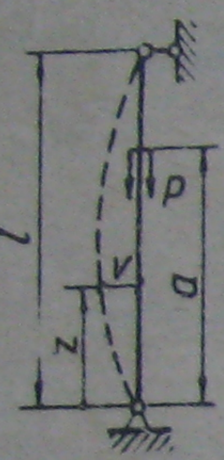
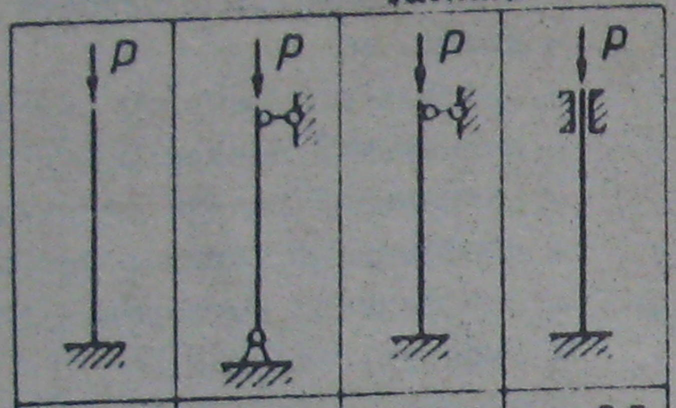


Рис. I

Таблица I



$\mu = 2,0$	$\mu = 1,0$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,5$

Таблица 2

Значения коэффициента φ

Сталь (Ст.2,Ст.3,Ст.4)			Сталь (Ст. 5)		
λ	φ	λ^2/φ	λ	φ	λ^2/φ
I	2	3	4	5	6
I0	0,99	$0,I0I \cdot I0^3$	I0	0,98	$0,I02 \cdot I0^3$
20	0,96	$0,4I7 \cdot I0^3$	20	0,95	$0,42I \cdot I0^3$
30	0,95	$0,957 \cdot I0^3$	30	0,92	$0,978 \cdot I0^3$
40	0,92	$0,I74 \cdot I0^4$	40	0,89	$0,I80 \cdot I0^4$
50	0,89	$0,28I \cdot I0^4$	50	0,86	$0,29I \cdot I0^4$
60	0,86	$0,4I9 \cdot I0^4$	60	0,82	$0,439 \cdot I0^4$
70	0,8I	$0,605 \cdot I0^4$	70	0,76	$0,645 \cdot I0^4$
80	0,75	$0,853 \cdot I0^4$	80	0,70	$0,9I4 \cdot I0^4$
90	0,69	$0,II7 \cdot I0^5$	90	0,62	$0,I3I \cdot I0^5$
I00	0,60	$0,I67 \cdot I0^5$	I00	0,5I	$0,I96 \cdot I0^5$
II0	0,52	$0,233 \cdot I0^5$	II0	0,43	$0,28I \cdot I0^5$

Окончание табл. 2

I	2	3	4	5	6
I20	0,45	$0,320 \cdot I0^5$	I20	0,36	$0,400 \cdot I0^5$
I30	0,40	$0,423 \cdot I0^5$	I30	0,33	$0,5I2 \cdot I0^5$
I40	0,36	$0,544 \cdot I0^5$	I40	0,29	$0,676 \cdot I0^5$
I50	0,32	$0,703 \cdot I0^5$	I50	0,26	$0,865 \cdot I0^5$
I60	0,29	$0,883 \cdot I0^5$	I60	0,24	$0,I07 \cdot I0^6$
I70	0,26	$0,III \cdot I0^6$	I70	0,2I	$0,I38 \cdot I0^6$
I80	0,23	$0,I4I \cdot I0^6$	I80	0,I9	$0,I7I \cdot I0^6$
I90	0,2I	$0,I72 \cdot I0^6$	I90	0,I7	$0,2I2 \cdot I0^6$
200	0,I9	$0,2II \cdot I0^6$	200	0,I5	$0,267 \cdot I0^6$
2I0	0,I7	$0,259 \cdot I0^6$	2I0	0,I4	$0,3I5 \cdot I0^6$
220	0,I6	$0,303 \cdot I0^6$	220	0,I3	$0,372 \cdot I0^6$

Примеры расчетов стержней на устойчивость

Пример I. Определить коэффициенты запаса устойчивости для стержней I и 2 (рис. 2).

Дано: P = I90 кН, l = 4,3 м, d = 95 мм,
δ = 8 мм. Материал - сталь Ст.5,
$E = 2,I \cdot I0^5$ МПа, $\sigma_{пц}$ = 240 МПа,
$\sigma_{тс}$ = 280 МПа.

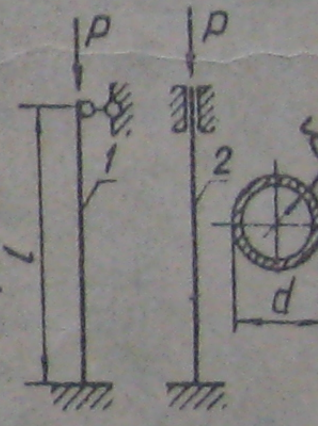


Рис. 2

Решение. Коэффициент запаса устойчивости $n_у = \frac{P_{кр}}{P}$.

Для определения критической силы $P_{кр}$ предварительно находим гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}, \text{ где } i = \sqrt{\frac{I}{F}}.$$

Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi d^2}{4}(1 - c^2),$$

где

$$c = \frac{d - 2\delta}{d} = \frac{95 - 2 \cdot 8}{95} = 0,83;$$

$$F = \frac{\pi \cdot 9,5^2}{4}(1 - 0,83^2) = 22 \text{ см}^2.$$

Осевой момент инерции

$$I = \frac{\pi d^2}{64}(1 - c^4) = \frac{\pi \cdot 9,5^4}{64}(1 - 0,83^4) = 210 \text{ см}^4.$$

Радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{210}{22}} = 3,09 \text{ см}.$$

Стержень I. Учитывая, что μ = 0,7 (табл. I), находим гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 4,3}{3,09 \cdot 10^{-2}} = 97.$

Предельная гибкость для стержня из стали Ст.5

$$\lambda_п = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}} = \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11}}{240 \cdot 10^6}} = 93.$$

Так как $\lambda > \lambda_п$, то критическое значение силы P определяем по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 210 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 4,3)^2} = 4,80 \cdot 10^5 \, Н.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_у = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{4,80 \cdot 10^5}{190 \cdot 10^3} = 2,5.$$

<u>Стержень 2</u>. Учитывая, что $\mu = 0,5$ (табл. I), находим

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,5 \cdot 4,3}{3,09 \cdot 10^{-2}} = 69.$$

В этом случае $\lambda < \lambda_п$, следовательно,

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot F = \left[\sigma_{тс} - (\sigma_{тс} - \sigma_{пц})\left(\frac{\lambda}{\lambda_п}\right)^2\right] F = 10^6 \left[280 - (280 - 240)\left(\frac{69}{93}\right)^2\right] \cdot 22 \cdot 10^{-4} = 5,68 \cdot 10^5 \, Н.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_у = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{5,68 \cdot 10^5}{190 \cdot 10^3} = 3,0.$$

<u>Пример 2</u>. Выполнить поверочный расчет на устойчивость стержней I и 2 (рис. 2), используя данные примера I. Для стали Ст.5 принять $[\sigma] = 180$ МПа.

<u>Решение</u>. Поверочный расчет состоит в сопоставлении фактического напряжения σ и допускаемого напряжения $\varphi[\sigma]$. Фактическое напряжение $\sigma = \frac{P}{F} = \frac{190 \cdot 10^3}{22 \cdot 10^{-4}} = 86$ МПа.

Чтобы определить допускаемые напряжения при расчете на устойчивость, следует вычислить соответствующие коэффициенты φ.

<u>Стержень I</u>. Гибкость стержня $\lambda = 97$ (см. пример I). В табл. 2 для стали Ст.5 $\varphi = 0,62$ при $\lambda = 90$ и $\varphi = 0,51$ при $\lambda = 100$. Значение φ при $\lambda = 97$ получаем линейной интерполяцией $\varphi = 0,62 - \frac{0,62 - 0,51}{100 - 90} \cdot (97 - 90) = 0,543.$

Допускаемое напряжение $\varphi[\sigma] = 0,543 \cdot 180 = 98$ МПа. Условие устойчивости $\sigma \le \varphi[\sigma]$ выполнено: 86 < 98.

<u>Стержень 2</u>. Гибкость стержня $\lambda = 69$ (см. пример I). По табл. 2, вновь прибегая к линейному интерполированию, находим

$$\varphi = 0,82 - \frac{0,82 - 0,76}{70 - 60} \cdot (69 - 60) = 0,766.$$

Допускаемое напряжение $\varphi[\sigma] = 0,766 \cdot 180 = 138$ МПа. Условие устойчивости $\sigma \le \varphi[\sigma]$ выполнено: 86 < 138.

<u>Пример 3</u>. Какую наибольшую силу P может передать шток (рис. 3), для которого нормы предусматривают шестикратный запас устойчивости?

Дано: $l = 1,9$ м, $d = 120$ мм.
Материал – сталь 30ХГС,
$E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{тс} = 500$ МПа,
$\sigma_{пц} = 350$ МПа.
Концы штока считать шарнирно опертыми.

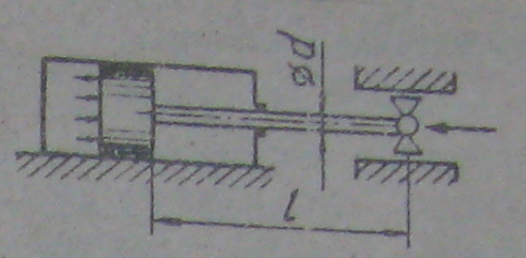


Рис. 3

<u>Решение</u>. Наибольшая допустимая сила $P = \frac{P_{кр}}{n_у}$, где $n_у = 6$.

Чтобы определить критическую силу $P_{кр}$, найдем предварительно гибкость штока. Радиус инерции

$$i = \sqrt{I/F} = d/4 = 120/4 = 30 \text{ мм}.$$

При шарнирных концевых опорах $\mu = 1$ (см. табл. I) и

$$\lambda = \mu l / i = \frac{1 \cdot 1,9}{30 \cdot 10^{-3}} = 63.$$

Предельная гибкость стержня из стали 30ХГС

$$\lambda_п = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}} = \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{350}} = 77.$$

Фактическая гибкость λ меньше предельной, следовательно, критическую силу находим по формуле

$$P_{кр} = \left[\sigma_т - (\sigma_т - \sigma_{пц})\left(\frac{\lambda}{\lambda_п}\right)^2\right] \cdot F = 10^6 \left[500 - (500 - 350)\left(\frac{63}{77}\right)^2\right] \frac{\pi \cdot 0,12^2}{4} = 4,51 \cdot 10^6 \, Н.$$

Наибольшая допускаемая сила

$$P = \frac{P_{кр}}{n_у} = \frac{4,51 \cdot 10^6}{6} = 7,52 \cdot 10^5 \, Н = 752 \, кН.$$

<u>Пример 4</u>. Определить номер профиля стойки по ГОСТ 8239-72 при $P = 400$ кН и $l = 1$ м (рис. 4). Материал – сталь Ст.4, $[\sigma] = 160$ МПа.

<u>Решение</u>. Из условия устойчивости $\frac{P}{F} = \varphi[\sigma]$ нельзя непосредственно вычислить площадь поперечного сечения $F = P/(\varphi[\sigma])$, так как неизвестен коэффициент φ, зависящий от гибкости λ и, следовательно, от F. Задача решается методом последовательных приближений. Выбираем произвольно некоторое начальное значение коэффициента φ, например $\varphi = 0,5$. При этом значении требуемая площадь поперечного сечения стойки

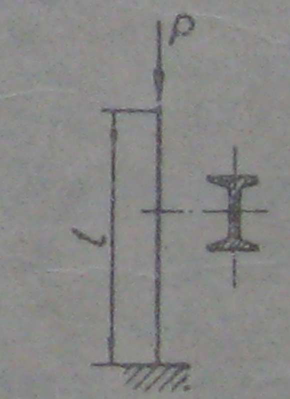


Рис. 4

$$F = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-3} \, м^2 = 50 \, см^2.$$

По ГОСТ 8239-72 этому значению F соответствует двутавр № 30а ($F = 49,2$ см^2, $i = 2,95$ см). Находим гибкость стойки, учитывая, что $\mu = 2$ (см. табл. I)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 1}{2,95 \cdot 10^{-2}} = 68,$$

и по табл. 2, интерполируя, находим

$$\varphi = 0,86 - \frac{68 - 60}{70 - 60}(0,86 - 0,81) = 0,82.$$

Допускаемое напряжение для стойки из двутавра № 30а

$$\varphi[\sigma] = 0{,}82 \cdot 160 = 131 \text{ МПа}.$$

Фактическое напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{400 \cdot 10^3}{49{,}2 \cdot 10^{-4}} = 80 \cdot 10^6 \text{ Па} = 80 \text{ МПа}.$$

Это напряжение существенно отличается от допускаемого и, следовательно, необходим пересчет. Заметим, что необходимость перерасчета диктуется здесь не нарушением условия устойчивости, которое заведомо выполнено, так как $\sigma < \varphi[\sigma]$, а стремлением уменьшить расход материала, заменив двутавр № 30а более легким профилем. Новое значение коэффициента φ выбираем как среднее арифметическое двух предшествующих значений

$$\varphi = \frac{0{,}5 + 0{,}82}{2} = 0{,}66.$$

Требуемая площадь поперечного сечения

$$F = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0{,}66 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3{,}77 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 37{,}7 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239-79 этому значению F соответствует двутавр № 24а (F = 37,5 см², i = 2,63 см).

Гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 1}{2{,}63 \cdot 10} = 76.$$

По табл. 2 находим

$$\varphi = 0{,}81 - \frac{76 - 70}{80 - 70}(0{,}81 - 0{,}75) = 0{,}77$$

и вычисляем допускаемое напряжение

$$\varphi[\sigma] = 0{,}77 \cdot 160 = 123 \text{ МПа}.$$

Фактическое напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{400 \cdot 10^3}{37{,}5 \cdot 10^{-4}} = 107 \cdot 10^6 \text{ Па} = 107 \text{ МПа}.$$

Фактическое и допускаемое напряжения отличаются друг от друга более чем на 10 %, поэтому проведем второй перерасчет.

Выбираем $\varphi = \frac{0{,}66 + 0{,}77}{2} = 0{,}72$, определяем площадь

$$F = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0{,}72 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3{,}47 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 34{,}7 \text{ см}^2,$$

по ГОСТ 8239-72 находим двутавр № 24 (F = 34,8 см², i = 2,37 см), вычисляем гибкость

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 1}{2{,}37 \cdot 10} = 84$$

и по табл. 2 получаем

$$\varphi = 0{,}75 - \frac{84 - 80}{90 - 80}(0{,}75 - 0{,}69) = 0{,}73.$$

Допускаемое напряжение $\varphi[\sigma] = 0{,}73 \cdot 160 = 117$ МПа.

Фактическое напряжение

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{400 \cdot 10^3}{34{,}8 \cdot 10^{-4}} = 115 \cdot 10^6 \text{ Па} = 115 \text{ МПа}.$$

Итак, выбираем двутавр № 24, для которого расхождение между фактическим и допускаемым напряжениями оказалось менее 2 %.

Пример 5. Определить размер a поперечного сечения стержня (сталь Ст.4), найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости (рис. 5).

Дано: P = 200 кН, l = 640 мм, $[\sigma]$ = 160 МПа, $\sigma_{пц}$ = 200 МПа, $\sigma_{тс}$ = 240 МПа, E = $2 \cdot 10^5$ МПа.

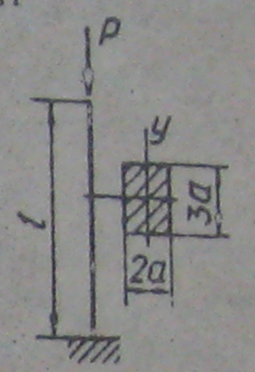


Рис. 5

Решение. Определение размера сечения.

Размер сечения может быть найден не только рассмотренным в примере 4 методом последовательных приближений, но и непосредственно из условия устойчивости

$$\frac{\lambda^2}{\varphi} = \frac{(\mu l)^2 [\sigma]}{P} K,$$

если коэффициент формы сечения $K = \frac{F^2}{I}$ постоянен. Заметим, что условие $K = const$ для сечений двутавровой формы по ГОСТ 8239-72 не выполняется, что и заставило нас использовать в примере 4 метод последовательных приближений. Для заданного сечения прямоугольной формы (рис. 5) площадь $F = 2a \cdot 3a = 6a^2$, наименьший осевой момент инерции $I = I_y = \frac{3a \cdot (2a)^3}{12} = 2a^4$, коэффициент формы сечения $K = \frac{36a^4}{2a^4} = 18$.

Учитывая, что μ = 2 (табл. I), вычисляем

$$\frac{\lambda^2}{\varphi} = \frac{(\mu l)^2 [\sigma]}{P} \cdot K = \frac{(2 \cdot 0{,}64)^2 \cdot 160 \cdot 10^6}{200 \cdot 10^3} \cdot 18 = 23590$$

и по табл. 2 находим $\varphi = 0{,}52$. Условие устойчивости $\frac{P}{F} \le \varphi[\sigma]$ здесь имеет вид $\frac{P}{6a^2} \le \varphi[\sigma]$, следовательно,

$$a \geq \sqrt{\frac{P}{6\varphi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{200 \cdot 10^3}{6 \cdot 0{,}52 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0{,}02 \text{ м} = 20 \text{ мм}$$

Определение критической силы.

Предварительно находим радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{2a^4}{6a^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

и затем вычисляем гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l \sqrt{3}}{a} = \frac{2 \cdot 640 \cdot \sqrt{3}}{20} = 110.$$

Предельная гибкость

$$\lambda_п = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

следовательно, $\lambda > \lambda_п$, т.е. условие применимости формулы Эйлера выполнено. Критическая сила

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E 2a^4}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 0{,}02^4}{(2 \cdot 0{,}64)^2} = 385 \cdot 10^3 \, Н = 385 \, кН.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{385}{200} = 1{,}9.$$

Энергетический метод определения коэффициента приведения длины

Коэффициент приведенной длины μ стержня постоянного сечения находят из уравнения

$$\frac{EI \int_0^l (V'')^2 dz}{\int_0^l (V')^2 dz} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2},$$

в котором левая часть представляет собой критическую силу, определяемую энергетическим способом, а в правой части эта же сила представлена формулой Эйлера. Для определения

$$P_{кр} = \frac{EI \int_0^l (V'')^2 dz}{\int_0^l (V')^2 dz}$$

следует выбрать функцию V, т.е. задаться формой оси стержня. Не обсуждая здесь достоинств различных вариантов выбора функции V, заметим лишь, что энергетический метод дает значение критической силы, которое всегда не ниже точного значения, полученного интегрированием дифференциального уравнения оси стержня. Удобно представить V в виде полинома $V = C_0 + C_1 Z + C_2 Z^2 + \ldots + C_n Z^n$. Значения коэффициентов $C_0, C_1, \ldots, C_n$ следует выбрать так, чтобы функция V удовлетворяла условиям закрепления стержня (граничным условиям).

Степень n полинома, содержащего $n+1$ членов, должна быть равна числу этих условий. Известно, что линейное перемещение V, угловое перемещение θ, изгибающий момент M и поперечная сила Q (рис. 6) связаны соотношениями $\theta = V'$, $M = EIV''$, $Q = EIV'''$. Для стержня, показанного на рис. 6, линейное и угловое перемещения в опоре равны нулю, отсутствуют изгибающий момент в верхнем сечении и поперечная сила в нижнем сечении. Эти граничные условия в выбранной системе координат имеют вид:

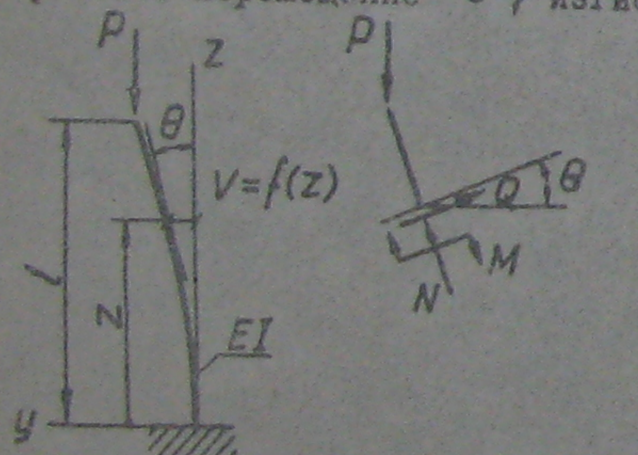


Рис. 6

I) $V = 0$ при $Z = 0$, 2) $V' = 0$ при $Z = 0$,
3) $V'' = 0$ при $Z = l$, 4) $V''' = 0$ при $Z = l$.

Выбирая $V = C_0 + C_1 Z + C_2 Z^2 + C_3 Z^3 + C_4 Z^4$, получают систему линейных уравнений для вычисления коэффициентов C_i полинома. Например, для стержня, представленного на рис. 7, уравнения составляются на основе следующих соображений. Нижняя опора препятствует линейному и угловому перемещениям, на средней опоре отсутствует только линейное перемещение, на верхней опоре отсутствует только угловое перемещение, поперечная сила в верхнем сечении стержня равна нулю. Соответственно этому можно записать:

I) $V = 0$ при $Z = 0$, 2) $V' = 0$ при $Z = 0$,
3) $V = 0$ при $Z = a$ 4) $V' = 0$ при $Z = l$,
5) $V''' = 0$ при $Z = l$.

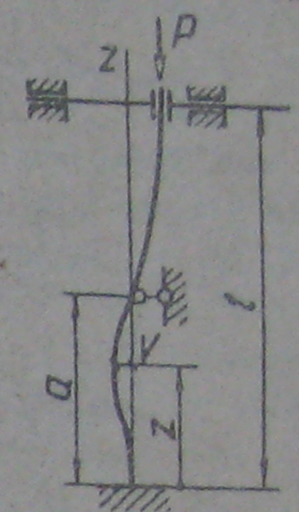


Рис. 7

Функция $V = f(Z)$ в первую очередь должна удовлетворять условиям закрепления стержня, т.е. ограничениям, наложенным на V и V'. От этого зависит точность решения. Если же дополнительно использовать условия, касающиеся V'' и V''', то точность решения повышается.

Рассмотрим пример, который по содержанию и объему соответствует расчетно-графическому заданию № 6.

Пример 6. Энергетическим способом определить коэффициент приведения длины стержня постоянного поперечного сечения (рис. 8). Вычислить размер поперечного сечения при P = 320 кН и $l = 2$ м. Найти критическое значение силы и определить коэффициент запаса устойчивости.

Материал - сталь Ст.3, E = $2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{тс} = 240$ МПа, $\sigma_{пц} = 200$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.

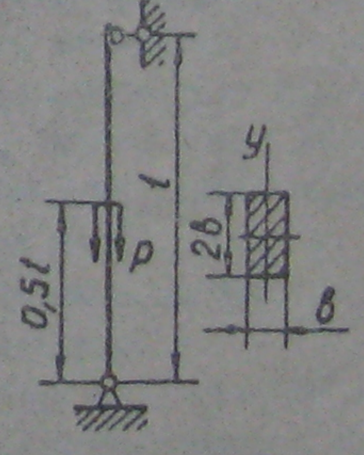


Рис. 8

Решение. Определение коэффициента приведенной длины стержня. Критическая сила

$$P_{кр} = EI \frac{\int_0^l (V'')^2 dz}{\int_0^{l/2} (V')^2 dz}.$$

Изобразим форму оси стержня после потери устойчивости и выберем систему координат (рис. 9). В концевых сечениях стержня отсутствуют линейные перемещения и изгибающие моменты:

I) $V = 0$ при $Z = 0$, 2) $V = 0$ при $Z = l$,
3) $V'' = 0$ при $Z = 0$, 4) $V'' = 0$ при $Z = l$.

Имея четыре граничных условия, представим упругую линию стержня полиномом четвертой степени, содержащим пять неизвестных коэффициентов: $V = C_0 + C_1 Z + C_2 Z^2 + C_3 Z^3 + C_4 Z^4$.

Тогда $V' = C_1 + 2C_2 Z + 3C_3 Z^2 + 4C_4 Z^3$, $V'' = 2C_2 + 6C_3 Z + 12 C_4 Z^2$.

Из условий (I) и (3) следует, что $C_0 = C_2 = 0$. Условия (2) и (4) дают уравнения $C_1 \ell + C_3 \ell^3 + C_4 \ell^4 = 0$, $6C_3 \ell + 12 C_4 \ell^2 = 0$, решая которые относительно C_1 и C_3, получим $C_1 = C_4 \ell^3$, $C_3 = -C_4 \cdot 2\ell$. Уравнение упругой линии $V_0 = 0 + C_4 \ell^3 Z + 0 - C_4 \cdot 2\ell Z^3 + C_4 Z^4 = C_4(\ell^3 Z - 2\ell Z^3 + Z^4)$. Итак, с учетом граничных условий функция V имеет вид $V = C_4(Z^4 - 2\ell Z^3 + \ell^3 Z)$ и, следовательно,

$$V' = C_4(4Z^3 - 6\ell Z^2 + \ell^3), \quad V'' = C_4(12Z^2 - 12\ell Z).$$

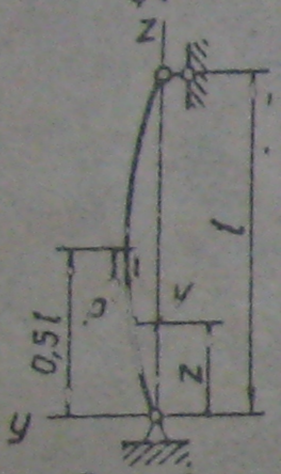


Рис. 9

Числитель

$$\int_0^{\ell} (V'')^2 dZ = C_4^2 \int_0^{\ell} (12Z^2 - 12\ell Z)^2 dZ = 144 C_4^2 \int_0^{\ell} (Z^4 - 2\ell Z^3 + \ell^2 Z^2) dZ = \frac{24}{5} \ell^5 C_4^2.$$

Знаменатель

$$\int_0^{\ell/2} (V')^2 dZ = C_4^2 \int_0^{1/2\ell} (4Z^3 - 6\ell Z^2 + \ell^3)^2 dZ = C_4^2 \int_0^{1/2\ell} (16Z^6 + 36\ell^2 Z^4 + \ell^6 -$$

$$- 48\ell Z^5 + 8\ell^3 Z^3 - 12\ell^4 Z^2) dZ = \frac{17}{70} \ell^7 C_4^2.$$

Критическая сила

$$P_{кр} = EI \frac{24/5 \cdot \ell^5}{17/70 \cdot \ell^7} = 19{,}76 \frac{EI}{\ell^2}.$$

Из уравнения $19{,}76 \dfrac{EI}{\ell^2} = \dfrac{\pi EI}{(\mu \ell)^2}$ находим коэффициент приведения длины

$$\mu = \sqrt{\pi^2 / 19{,}76} = 0{,}707.$$

Отметим, что точное решение задачи методом интегрирования дифференциального уравнения оси стержня дает μ = 0,727. Следовательно, приближенный результат, полученный нами энергетическим методом, имеет погрешность менее 3 %, т.е. отличается достаточной точностью. Если при решении задачи вместо полинома четвертой степени ограничиться полиномом второй степени $V = C_0 + C_1 Z + C_2 Z_2^2$, т.е. удовлетворить лишь условиям закрепления (I) и (2), то результат будет менее точным (μ = 0,64I) и погрешность составит около I2 %.

Вычисление размеров сечения.

Условие устойчивости $P/F = \varphi[\sigma]$. Учитывая, что $F = 2b^2$ (см. рис. 8), получим $b = \sqrt{\dfrac{P}{2\varphi[\sigma]}}$. Для определения φ найдем вначале отношение $\dfrac{\lambda^2}{\varphi} = \dfrac{(\mu \ell)^2 [\sigma]}{P} K$.

Здесь $K = \dfrac{F^2}{I} = \dfrac{(2b^2)^2}{\frac{b^4}{6}} = 24$, где $I = \dfrac{2b \cdot b^3}{12} = \dfrac{b^4}{6}$.

Следовательно,

$$\frac{\lambda^2}{\varphi} = \frac{(0{,}707 \cdot 2)\, 160 \cdot 10^6}{320 \cdot 10^3} = 24000.$$

По табл. 2 находим φ = 0,5I. Размер сечения

$$b = \sqrt{\frac{P}{2\varphi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{320 \cdot 10^3}{2 \cdot 0{,}51 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 44{,}7 \cdot 10^{-3} м = 45 мм.$$

Определение критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Радиус инерции поперечного сечения

$$i = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{b^4/6}{2b^2}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}.$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i} = \frac{0{,}707 \cdot \ell \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{b} = \frac{0{,}707 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3}}{45 \cdot 10^{-3}} = 109.$$

Предельная гибкость

$$\lambda_п = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_п}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

Условие применимости формулы Эйлера $\lambda > \lambda_п$ выполнено.

Критическая сила

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E b^4}{(\mu \ell)^2 6} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}045^4}{(0{,}707 \cdot 2)^2 \cdot 6} = 674 \cdot 10^3 Н = 674 кН.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{674}{320} = 2{,}1.$$

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №6
"РАСЧЕТ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ"

I. Энергетическим методом определить коэффициент приведения длины стержня постоянного поперечного сечения.

2. Вычислить размер поперечного сечения стержня при P = 200 кН и ℓ = 3 м.

3. Найти критическое значение силы P и определить коэффициент запаса устойчивости.

Материал – сталь Ст.3, E = $2 \cdot 10^5$ МПа, $\sigma_{тс}$ = 240 МПа, $\sigma_{пц}$ = 200 МПа, $[\sigma]$ = 160 МПа.

Таблица I

Схема закрепления и нагружения стержня

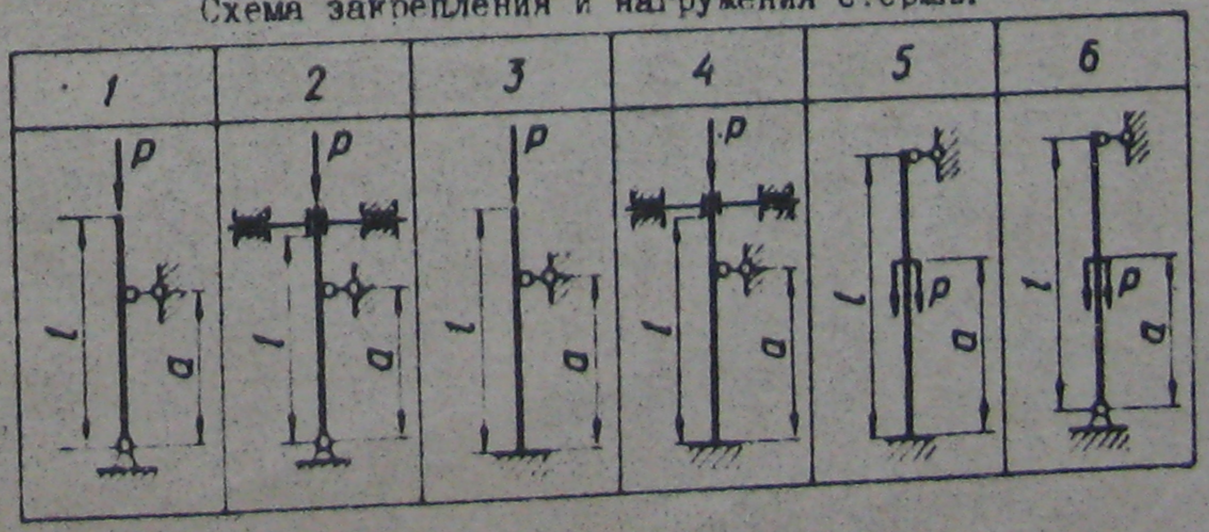


Таблица 2

Форма поперечного сечения

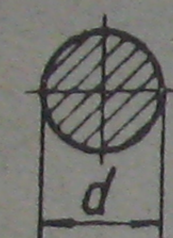
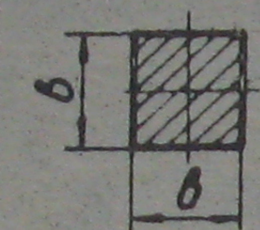
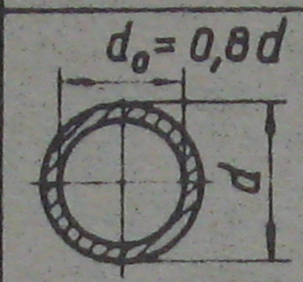
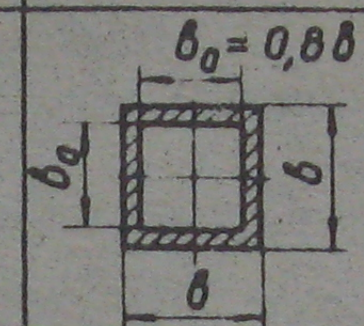
1	2	3	4
			

Таблица 3

Значение отношения

1	2	3	4	5	6
0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

d=20мм	d=25мм	d=30мм

Материал плунжера–сталь $\sigma_т$=300МПа

Вариант A	Вариант B	Вариант C
p=80МПа	p=60МПа	p=40МПа
M=12,8Нм	M=0,9Нм	M=0,6Нм
d=20мм	d=18мм	d=15мм

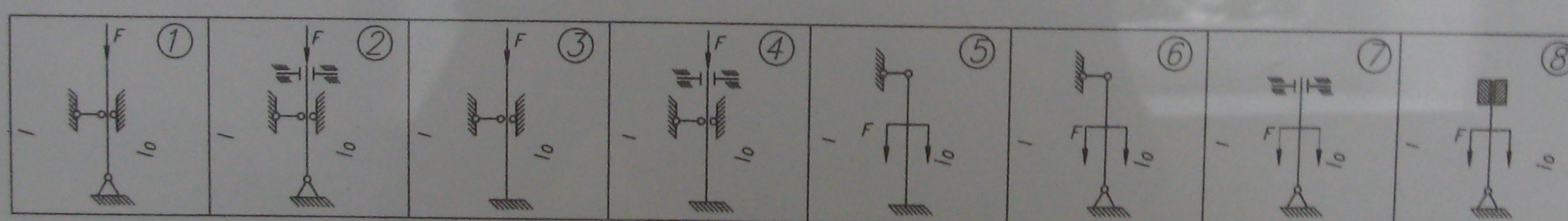
Материал образца–сталь $\sigma_т$=300МПа

МГТУ кафедра "Прикладная механика"	Расчетно-проектировочное задание №8	УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ	Лист 1 Всего листов 1

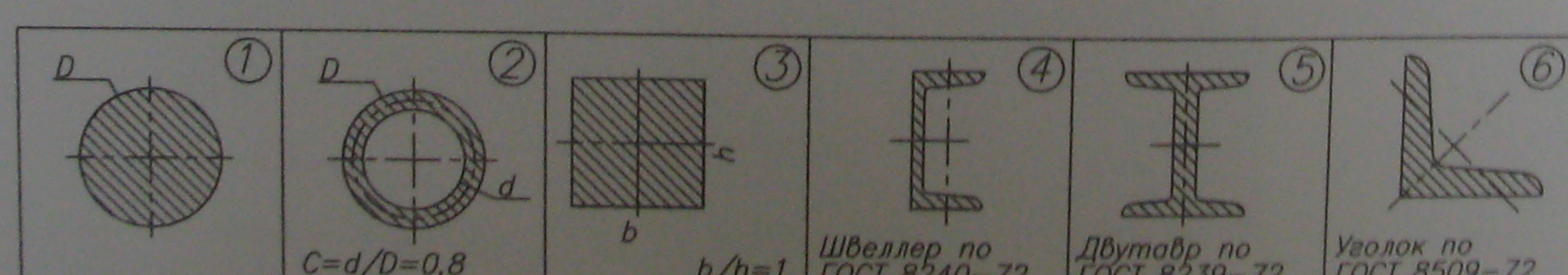
1. Энергетическим методом или путем интегрирования дифференциального уравнения изгиба определить коэффициент приведения длины стойки постоянного поперечного сечения.
2. Определить размеры поперечного сечения стойки с помощью коэффициентов понижения φ, если F=200 кН, l=3 м, материал стойки – сталь 3. Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma]_{сж}$=160 МПа.

Примечание. Задание задается трехзначным числом. Первая цифра определяет номер закрепления и нагружения стойки, вторая цифра – номер поперечного сечения, третья – величину соотношения l_0/l.

Схема закрепления и нагружения стойки



Поперечное сечение стойки



Величины отношения l_0/l.

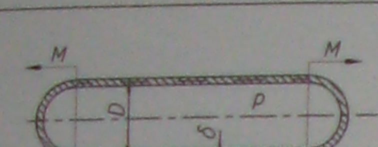
N	1	2	3	4	5	6
l_0/l	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

РК-5

МГТУ кафедра "Прикладная механика"	Расчетно-проектировочное задание №7 задача №2	Общий случай напряженного состояния	Лист 3 Всего листов 3

Для деталей, изображенных на чертежах и указанных в тексте задач, требуется:
1. Определить напряженное состояние в наиболее нагруженных точках
2. Исследовать напряженное состояние в этих точках аналитически и графически
3. Определить коэффициент запаса.

(9)

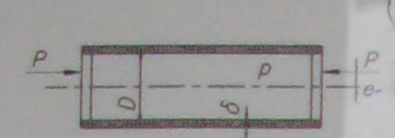


Тонкостенная замкнутая трубка подвергается действию внутреннего давления p и моментов M, изгибающих трубку. Изучить напряженное состояние трубки в области, достаточно удаленной от ее концов.

Вариант A	Вариант B	Вариант C
p=3МПа	p=3МПа	p=4МПа
M=60Нм	M=40Нм	M=30Нм
δ=1,5мм	δ=1,2мм	δ=1мм
D=25мм	D=20мм	D=15мм

Материал трубки–сталь σ_T=300МПа

(10)

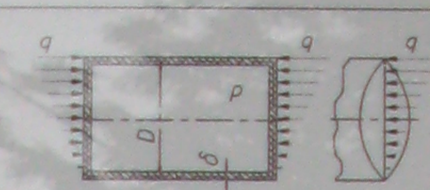


Тонкостенная замкнутая трубка подвергается действию внутреннего давления p и сил P, представленных на схеме. Изучить напряженное состояние трубки в области, достаточно удаленной от ее концов.

Вариант A	Вариант B	Вариант C
p=2МПа	p=3МПа	p=4МПа
P=8кН	P=7кН	P=6кН
δ=1мм,e=3мм	δ=1,1мм,e=4мм	δ=1,2мм,e=5мм
D=25мм	D=22мм	D=20мм

Материал трубки–сталь незакаленная У8 σ_T=250МПа

(11)

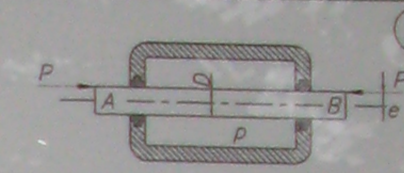


Тонкостенная замкнутая трубка подвергается действию внутреннего давления p и внешних сил, распределенных по торцам так, как указано на чертеже. Изучить напряженное состояние трубки в области, достаточно удаленной от ее концов.

Вариант A	Вариант B	Вариант C
p=2МПа	p=2,4МПа	p=2МПа
q=500кН/м	q=550кН/м	q=500кН/м
D=20мм	D=22мм	D=24мм
δ=1мм	δ=0,9мм	δ=0,8мм

Материал трубки–дюраль σ_T=340МПа

(12)

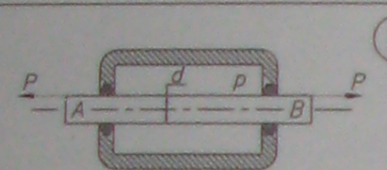


Плунжер AB проходит через камеру, в которой поддерживается давление p, а в осевом направлении сжимается силами P. Изучить напряженное состояние плунжера.

Вариант A	Вариант B	Вариант C
p=50МПа	p=40МПа	p=60МПа
P=5кН	P=6кН	P=8кН
D=20мм	D=25мм	D=28мм
e=8мм	e=10мм	e=12мм

Материал плунжера–серый чугун СЧ-28 $\sigma_{вр}$=140МПа $\sigma_{вс}$=310МПа

(13)

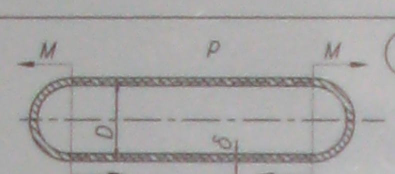


Плунжер AB проходит через камеру, в которой поддерживается давление p, а в осевом направлении сжимается силами P. Изучить напряженное состояние плунжера.

Вариант A	Вариант B	Вариант C
p=50МПа	p=40МПа	p=30МПа
P=4кН	P=5кН	P=6кН
d=20мм	d=25мм	d=30мм

Материал плунжера–сталь σ_T=300МПа

(14)

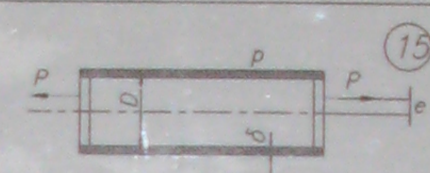


Тонкостенная замкнутая трубка, на которую действуют изгибающие моменты M, помещена в камеру с постоянным давлением p. Изучить напряженное состояние трубки в области, достаточно удаленной от ее концов.

Вариант A	Вариант B	Вариант C
p=2,5МПа	p=3МПа	p=3,5МПа
M=25Нм	M=35Нм	M=45Нм
δ=0,9мм	δ=1мм	δ=1,1мм
D=18мм	D=20мм	D=22мм

Материал трубки–сталь незакаленная У8 σ_T=250МПа

(15)

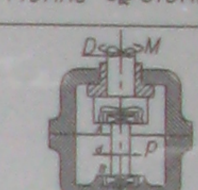


Эксцентрично растягиваемая силой P тонкостенная замкнутая трубка помещена в камеру, в которой поддерживается постоянное давление p. Изучить напряженное состояние трубки в области, достаточно удаленной от ее концов.

Вариант A	Вариант B	Вариант C
p=2МПа	[illegible]	p=4 МПа
[illegible]	[illegible]	P=5кН
[illegible]	[illegible]	D=20мм
δ=1,2мм	[illegible]	δ=1,5мм
e=2мм	[illegible]	e=1,8мм

Материал трубки–малоуглеродистая сталь σ_T=250МПа

(16)



Образец AB закручивается моментом M при помощи устройства, представленного на схеме (головки образца свободно, с зазором входят в гнезда A и B). Изучить напряженное состояние образца.

Вариант A	Вариант B	Вариант C
p=80МПа	p=60МПа	p=40МПа
M=12,8Нм	M=0,9Нм	M=0,6Нм
d=20мм	d=18мм	d=15мм

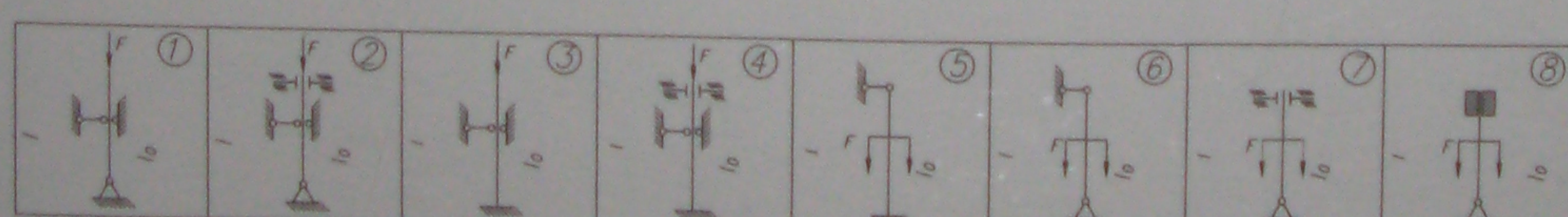
Материал образца–сталь σ_T=300МПа

МГТУ кафедра "Прикладная механика"	Расчетно-проектировочное задание №8	УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ	Лист 1 Всего листов 1

1. Энергетическим методом или путем интегрирования дифференциального уравнения изгиба определить коэффициент приведения длины стойки постоянного поперечного сечения.
2. Определить размеры поперечного сечения стойки с помощью коэффициентов понижения φ, если: F=200 кН, l=3 м, материал стойки – сталь 3. Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma]_{сж}$=160 МПа.

Примечание. Задание задается трехзначным числом. Первая цифра определяет номер закрепления и нагружения стойки, вторая цифра – номер поперечного сечения, третья – величину соотношения l_0/l.

Схема закрепления и нагружения стойки



Поперечное сечение стойки

Величины отношения l_0/l.

N	1	2	3	4	5	6
l_0/l	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8