

ИЗУЧЕНИЕ ЯВЛЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО УДАРА ШАРОВ
Методические указания к лабораторной работе М-31 по курсу общей физики
Под редакцией Н.А.Гладкова
Издательство МГТУ, 1992

Рассмотрены различные виды ударов, их аналитическое описание на основе законов сохранения энергии и импульса. Изложены экспериментальные методы исследования явления удара. Для студентов 1-го курса МГТУ.

Цель работы - изучение закона сохранения импульса при прямом центральном ударе шаров, определение коэффициента восстановления и времени соударения шаров.

Теоретическая часть

Удару принадлежит особое, почетное место в истории развития человечества: именно удар был тем физическим явлением, которое человек начал использовать в трудовом процессе при изготовлении орудий труда. В современной науке и технике удар продолжает оставаться в центре внимания ученых и инженеров благодаря тому, что он является эффективным средством концентрации энергии и импульса в пространстве и времени.

Ударом называется Кратковременное взаимодействие соприкасающихся тел, приводящее к значительному изменению их движения. Явление удара протекает обычно в сотые, тысячные и миллионные доли секунды. Чем меньше время соударения, тем меньше деформации тел. Так как при этом импульс тел изменяется на конечное значение, то в месте соударения развиваются огромные силы. Так, если при ударе Двух одинаковых стальных шаров диаметром 0,1 м, сближающихся со скоростью 5 м/с, явление протекает $5 \cdot 10^{-4}$ с, то средняя сила, действующая в период соударения, составляет более $40 \cdot 10^3$ Н.

Процесс удара в общем случае обычно разделяют на две фазы. Первая фаза - с момента соприкос-

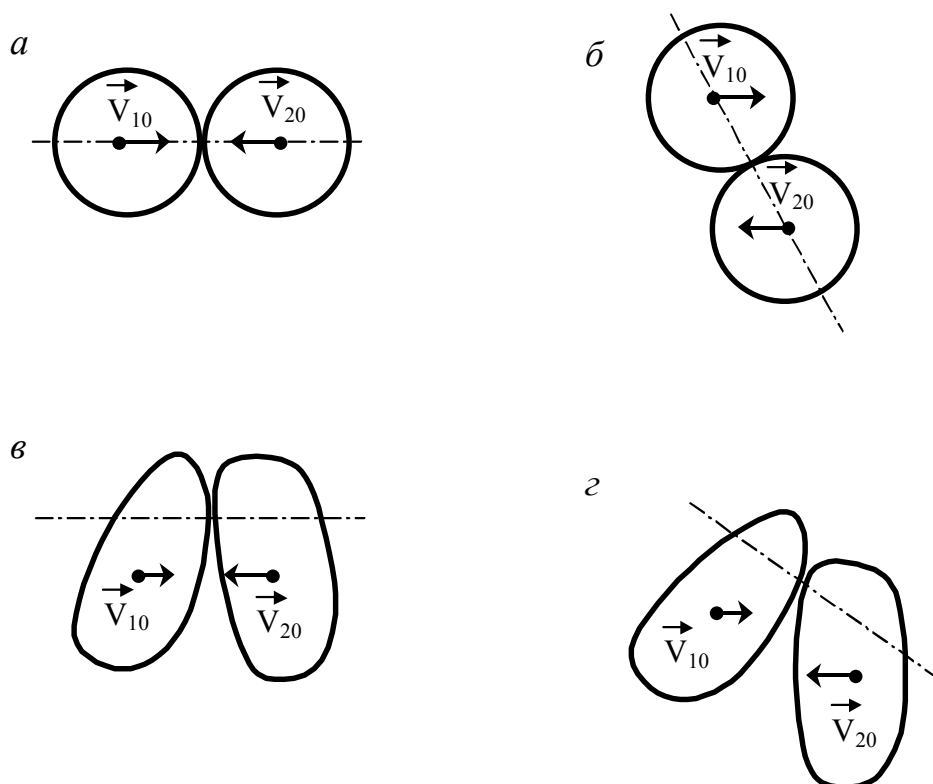


Рис. 1

новения тел до момента, когда относительная скорость центров масс тел становится равной нулю. Вторая фаза - от этого последнего момента до момента, когда соприкосновение тел прекращается. С момента возникновения деформаций в месте соприкосновения тел начинают действовать силы, направленные противоположно относительным скоростям тел. Возникшие в результате действия сил ускорения уменьшают скорости тел до тех пор, пока они не станут одинаковыми, или, что то же, пока относительная скорость тел не станет равной нулю. При этом происходит переход энергии механического движения тел в энергию деформации. С момента, когда относительная скорость стала равной нулю, начинается частичное или полное восстановление деформаций.

Силы, продолжая действовать в прежнем направлении, сообщают теперь ускорение, совпадающее по направлению со скоростью. Скорости тел возрастают по абсолютной величине, направление их меняется на противоположное по сравнению с первоначальным. Наконец, тела расходятся, и удар заканчивается. В этой фазе кинетическая энергия системы растет за счет положительной работы упругих тел. У реальных тел относительная скорость после удара не достигает того значения, которое имелось до удара, так как часть механического движения необратимо переходит в молекулярно-тепловую и другие формы.

Различают следующие виды ударов: центральный - прямой и косой (рис. 1 а,б), нецентральный - прямой и косой (рис. 1 в, г). Прямая, совпадающая с нормалью к поверхности тел в точке их соприкосновения, называется линией удара. Удар называется центральным, если линия удара проходит через центры масс тел. Если векторы скоростей шаров до удара лежат на линии удара, то удар называется прямым, а если они не лежат на этой линии - косым.

Для характеристики потери кинетической энергии и относительной скорости при ударе вводится коэффициент восстановления k , определяемый по формуле

$$k = \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{|\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}|}, \quad (1)$$

Где \vec{v}_{10} и \vec{v}_{20} - скорости центров масс соответственно первого и второго шаров до удара; v_1 и v_2 - их скорости после удара. Если $k = 1$, то потери кинетической энергии нет, такой удар называется абсолютно упругим, при $k = 0$ удар называется абсолютно неупругим и при $0 < k < 1$ - неупругим.

Абсолютно неупругий удар ($k=0$) характеризуется тем, что потенциальная энергия упругих деформаций не возникает. При абсолютно неупругом ударе выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения полной энергии. В этом случае оба тела движутся после удара как одно целое, с одной и той же скоростью \vec{u} , определяемой из закона сохранения импульса

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20}}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

До удара общая кинетическая энергия системы E_0 равна сумме кинетических энергий первого E_{10} и второго E_{20} тел (в работе рассматриваются шары):

$$E_0 = E_{10} + E_{20} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} + \frac{m_2 v_{20}^2}{2}, \quad (3)$$

а после удара

$$E = E_1 + E_2 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1 v_{10} + m_2 v_{20})^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad (4)$$

где E_1, E_2 - кинетическая энергия соответственно первого и второго шаров после удара. Следовательно, потеря кинетической энергии, или работа при неупругой деформации тел

$$E_{\text{деф}} = E_0 - E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_{10} - v_{20})^2 \quad (5)$$

Для случая, когда один из шаров, например второй, до удара неподвижен ($v_{20} = 0$), получим

$$E_{\text{деф}} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_{10}^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{10} \quad (6)$$

Абсолютно упругим ударом ($k=1$) называется такой, при котором суммарная механическая энергия тел к концу удара не переходит ни во внутреннюю, ни в какие другие виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия на первой фазе удара переходит полностью или частично в потенциальную энергию деформации, которая затем опять переходит в кинетическую энергию. При абсолютно упругом ударе выполняется закон сохранения механической энергии $E_k + E_{\text{п}} = \text{const}$. Поэтому закон сохранения энергии до и после удара можно записать как закон сохранения кинетической энергии $E_{10} + E_{20} = E_1 + E_2$,

или,

$$\frac{\vec{p}_{10}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{20}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} \quad (7)$$

где

$$\vec{p}_{10} = m_1 \vec{v}_{10}, \quad \vec{p}_{20} = m_2 \vec{v}_{20}, \quad \vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1, \quad \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$$

Уравнение (7) можно записать в виде

$$m_2(\vec{p}_{10} - \vec{p}_1)(\vec{p}_{10} + \vec{p}_1) = m_1(\vec{p}_{20} - \vec{p}_2)(\vec{p}_{20} + \vec{p}_2) \quad (8)$$

По закону сохранения $\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ или

$$\vec{p}_{10} - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_{20} \quad (9)$$

Используя уравнение (9), из уравнения (8) получим

$$m_2 \vec{p}_{10} + m_2 \vec{p}_1 = m_1 \vec{p}_2 + m_1 \vec{p}_{20} \quad (10)$$

Решая совместно (9) и (10), найдём \vec{p}_1 и \vec{p}_2 :

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_1 &= \vec{p}_{10} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \vec{p}_{20} \frac{2m_1}{m_1 + m_2}, \\ \vec{p}_2 &= \vec{p}_{20} \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + \vec{p}_{10} \frac{2m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Если массы шаров одинаковы, то $\vec{p}_1 = \vec{p}_{20}$ и $\vec{p}_2 = \vec{p}_{10}$, т.е. шары одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются импульсами. В частности, если второй шар до удара покоился, то первый шар после соударения остановится. Факт такой остановки может служить подтверждением абсолютно упругого удара. Когда масса одного из тел, находящегося в покое, много больше массы другого (например, $m_2 \gg m_1$), то неподвижное большое тело, получившее удар, практически остается в покое, а ударившее его малое тело отскочит от него с первоначальной по модулю и противоположной по направлению скоростью.

Неупругий удар сопровождается остаточной деформацией ($0 < k < 1$). О степени деформации можно судить по значению энергии, затраченной на эту деформацию. Энергии остаточной деформации $E_{\text{деф}}$ можно определить, зная коэффициент восстановления. Если второй шар до удара покоился, то закон сохранения энергии при ударе двух одинаковых шаров запишется так:

$$\frac{mv_{10}^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + 2E_{\text{деф}} \quad (12)$$

где $E_{\text{деф}}$ – энергия остаточной деформации одного шара (шары одинаковы).

Преобразуя выражение (12), получим

$$E_{\text{деф}} = \frac{1}{2} \left(\frac{mv_{10}^2}{2} \right) (1 - k^2) = \frac{E_{10}}{2} (1 - k^2) \quad (12a)$$

На практике применяют удар для двух случаев. В первом случае удар используется для изменения формы тел (деформации), например при ковке, чеканке и штамповке металла, при раздроблении тела и т.д.

Из формулы (6) видно, что в этом, случае выгодно, чтобы масса неподвижного тела m_2 была

больше массы ударявшего тела m_1 , поэтому, в частности, наковальни делают возможно более массивными.

Во втором случае удар используется для перемещения тел после удара и преодоления при этом сопротивлений, например, при забивке свай в землю, вбивании гвоздей, клиньев и т.д. В этом случае используется энергия $E_0 - E_{ДЕФ}$ и выгодно, чтобы масса неподвижного тела была мала в сравнении с массой ударяющего тела.

Упругая сила взаимодействия и время соударения. Изменение импульса каждого из шаров происходит благодаря упругой силе взаимодействия шаров при ударе. В течение соударения сила меняется со временем по определенному закону. Найдем среднюю по времени силу $\langle |\vec{F}| \rangle$, действующую на один из шаров. Согласно второму закону динамики,

$$\langle |\vec{F}| \rangle \Delta t = \Delta \vec{p}, \quad (13)$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ (t_1, t_2 - моменты начала и конца соударения соответственно).

Таким образом, зная изменение импульса одного из шаров и время соударения, можно найти среднюю силу взаимодействия шаров

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\Delta t}, \quad (14)$$

Среди вопросов, связанных с ударом, интересен вопрос о времени соударения (продолжительности удара). В 1861 г. Герц, исходя из теории упругости, предложил теорию деформации при ударе, в которой решал также вопрос и о времени соударения. По этой теории, например, для двух латунных шариков диаметром $25 \cdot 10^{-3}$ м с относительной скоростью около $7 \cdot 10^{-2}$ м/с продолжительность удара получается порядка $2 \cdot 10^{-4}$ с (200 мкс), а при скорости 7 м/с - около 10^{-4} с (100 мкс). Для иллюстрации влияния масс и размеров шаров на время удара интересно сопоставить время удара двух одинаковых стальных шаров малой массы, например 0,5 кг, и двух стальных шаров гигантской массы, например равной массе Земли, при начальной относительной скорости 10^3 м/с. В первом случае удар длился бы десятитысячные доли секунды, во втором - несколько часов.

Чтобы понять, от чего зависит время соударения тел, рассмотрим более простой случай удара, а именно - удар прямого цилиндрического стержня о жесткую стенку (рис. 2). При скоростях v_{10} примерно от 1 до 10 м/с процесс деформирования стержня носит упругий характер. Этот процесс характеризуется тем, что вдоль стержня от границы со стенкой распространяется упругая волна сжатия (рис. 2а), отразившись от свободного торца, вдоль стержня распространяется упругая волна разрежения (рис. 2б), в результате чего время соударения (время контакта Δt) определяется формулой

$$\Delta t = \frac{2l}{a} \quad (15)$$

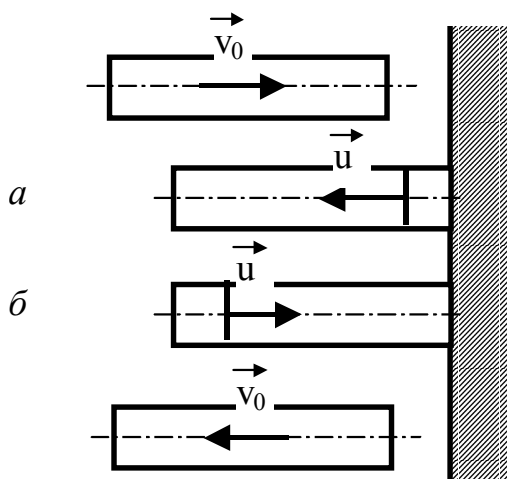


Рис.2

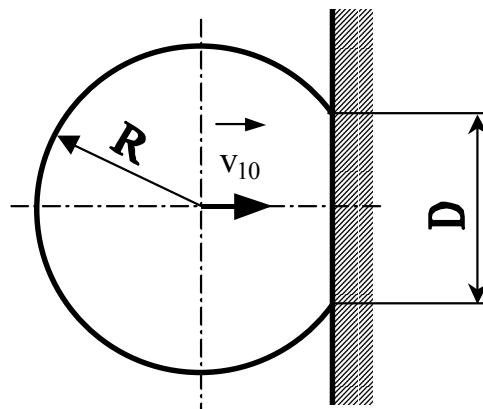


Рис.3

где l – длина стержня; $a = \sqrt{E/\rho}$ - скорость распространения продольной упругой волны; здесь E - модуль Юнга; ρ - плотность материала стержня. Как следует из формулы (15), время контакта не зависит от скорости стержня.

Соударение двух одинаковых упругих шаров, движущихся с относительной скоростью $2v_{10}$ можно в первом приближении рассматривать как удар каждого из шаров массой m и начальной скоростью v_{10} об абсолютно жесткую стенку (рис. 3).

При взаимодействии со стенкой шар упруго деформируется, причем поверхность контакта в любой момент времени представляет круг диаметром D , Площадь этого круга с течением времени взаимодействия будет увеличиваться. Энергию упругих деформаций $E_{упр}$ шара, как показывает приближенный расчет [2], можно выразить зависимостью

$$E_{упр} = 1,31 \cdot E \cdot x^3 \quad (16)$$

Где x - смещение частиц материала шара вдоль линии удара. Закон сохранения энергии для данного случая запишем в виде

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + E_{упр} \quad (17)$$

Где v - скорость шара в данный момент времени соударения.

Подставляя выражение (16) в (17) и учитывая соотношения

$$a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho,$$

получим

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - 0,58a^2 \left(\frac{x}{R}\right)^3} \quad (18)$$

Проинтегрировав уравнение (18), определим время соударения шара со стенкой

$$\Delta t = \frac{1,23R}{a^3 \sqrt{\left(\frac{v_{10}}{a}\right)}} \quad (19)$$

Как следует из полученной зависимости (19), время контакта шаров Δt , так же как и для стержня (15), линейно зависит от определяющего размера тела, т.е. радиуса шара R . Однако время соударения шара, в отличие от стержня, зависит от скорости удара. У увеличением скорости удара время контакта Δt , как видно из выражения (19), уменьшается вследствие увеличения поверхности контакта в процессе удара:

Используя соотношение (16), можно оценить силу взаимодействия шаров при ударе

$$F = -\frac{dE_{упр}}{dx} = -3,93 \cdot E \cdot x^2 \quad (20)$$

Описание установки

Установка для изучения центрального удара шаров состояния прибора и электронно-счетного частотомера. Один из шаров отводится из положения равновесия на угол ϕ_{10} и отпускается. Происходит соударение шаров (рис. 4).

Из закона сохранения механической энергии находим

$$m_1 g h_{10} = E_{10} = \frac{m_1 v_{10}^2}{2} = \frac{p_{10}^2}{2m_1}, \quad (21)$$

где m_1 - масса шаров; h_{10} - высота подъёма центра шара в крайнем положении; E_{10} и P_{10} - кинетическая энергия и импульс первого шара непосредственно перед ударом;

$$h_{10} = l(1 - \cos \varphi_{10}) = 2l \sin^2 \frac{\varphi_{10}}{2} \quad (22)$$

Тогда из выражений (21) и (22)

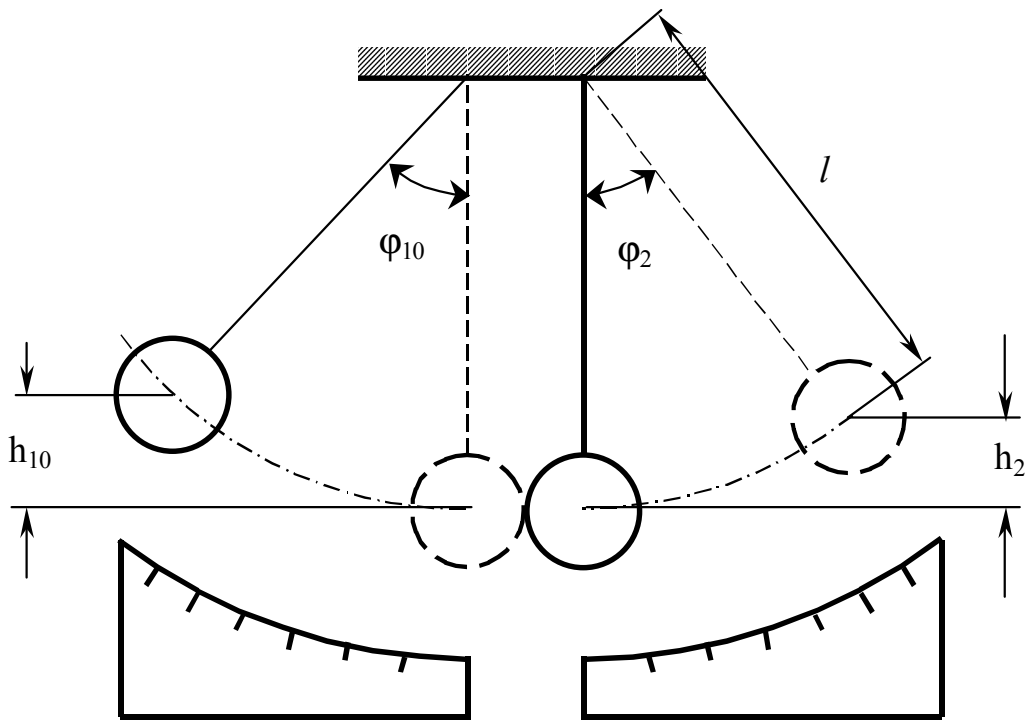


Рис. 4

$$p_{10} = 2m_1 \sqrt{gl} \sin \frac{\varphi_{10}}{2}, \quad (23)$$

$$v_{10} = \sqrt{2gh_{10}} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\varphi_{10}}{2}. \quad (24)$$

Аналогично скорость второго шара сразу после удара

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\varphi_2}{2} \quad (25)$$

Время соударения измеряется с помощью частотомера. Шары включены в электрическую цепь (Рис 5), которая состоит из батареи E_B и резистора R .

Во время удара шары соприкасаются и замыкают цепь. Через резистор протекает ток, и на его концах возникает разность потенциалов U_R практически равная ЭДС батареи E_B (сопротивление

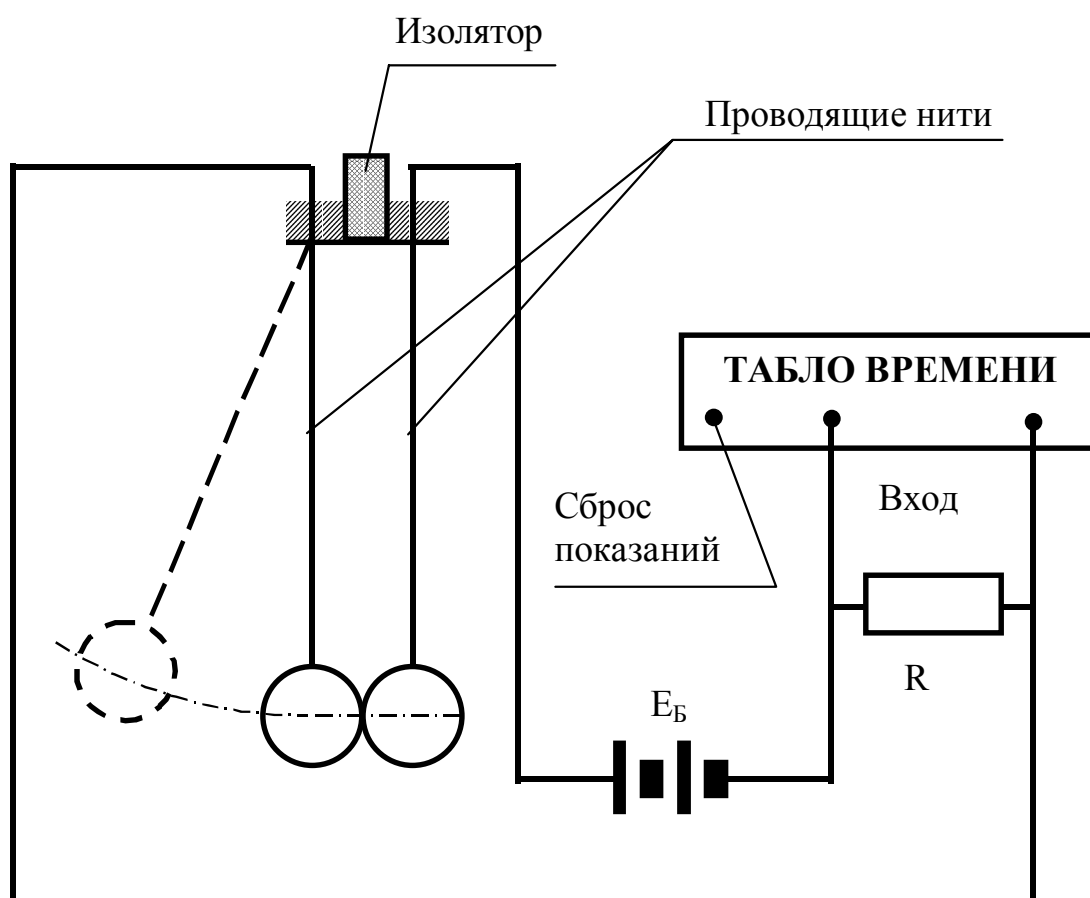


Рис. 5

резистора много больше внутреннего сопротивления батареи). Напряжение с резистора подается на вход частотомера. Пока шары не соприкасаются, тока в цепи нет и $U_R = 0$. В момент t_1 начала соударения в цепи появляется ток и напряжение становится $U_R \approx E_B$. После окончания соударения (в момент t_2) шары расходятся, цепь разрывается и напряжение U_R становится равным нулю.

Таким образом, длительность импульса напряжения на резисторе равна времени соударения $\Delta t = t_2 - t_1$ и измеряется с помощью частотомера. На цифровом табло прибора автоматически регистрируется время соударения с указанием порядка и размерности.

Практическая часть

а) Определение коэффициента восстановления

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой. Подвесить на нитях исследуемую пару шаров. Измерить длину нитей l .
2. Отклонить один из шаров на угол $\varphi_{10} = 15^\circ$. Отпустить шар без толчка и остановить шары после первого соударения. Измерить 5 раз. Результаты занести в табл. 1.
3. Вычислить коэффициент восстановления по формуле

$$k = \frac{\varphi_2}{\varphi_{10}}, \quad (26)$$

и результаты занести в табл. 1. Формулу (26) легко получить из формулы (1), полагая, что $v_{20} = 0$ (второй шар до соударения покоился) и $v_1 = 0$ (шары данной установки имеют одинаковую массу) Тогда с учетом формул (24) и (25) получаем

$$k = \frac{v_2}{v_{10}} = \frac{\sin \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_{10}}{2}} \approx \frac{\varphi_2}{\varphi_{10}},$$

так как $\varphi_2/2$ и $\varphi_{10}/2$ не превышают 15° , и поэтому с точностью до одного процента их синусы могут быть заменены аргументами.

4. По данным табл. 1 найти среднее значения коэффициента восстановления для данной пары шаров.

Таблица 1

№ измерения	φ_2	k	
1			
2			
...			
Среднее			

Материал шаров

Масса шаров $m_1 = m_2 = \dots$

Длина нитей $l = \dots$

б) Определение времени соударения шаров

1. Включить в сеть частотомер. Подключить к шарам батарею ЭДС. Проверить правильность работы электрической схемы, для этого сделать несколько пробных измерений времени соударения шаров.

2. Нажать кнопку "Сброс показаний" на частотомере. Отклонить один из шаров на угол $\varphi_{10} = 6^\circ$, отпустить шар без толчка и остановить шары после первого соударения.

Эксперимент провести для пяти различных углов через 3° . Для каждого угла выполнить пять измерений и определить среднее время соударения, результаты занести в табл. 2.

Таблица 2

№ измерений	Время соударения шаров Δt , мкс, при φ_{10} , град				
	6	9	12	15	18
1					
2					
...					
Среднее					

Материал шаров

Масса шаров $m_1 = m_2 = \dots$

Длина нитей $l = \dots$

3. Для каждого угла φ_{10} определить:

а) скорость v_{10} по формуле (25);

б) импульс шара p_{10} по формуле (23);

в) кинетическую энергию $E_{10} = \frac{m_1 \cdot v_{10}^2}{2}$;

г) модуль средней силы взаимодействия шаров \vec{F} по формуле (14). Так как $v_1 = 0$, то $|\Delta \vec{p}| = p_{10}$;

д) энергию остаточной деформации по формуле (12а). Результаты занести в табл. 3.

Таблица 3

φ_{10} , град	$\Delta t \cdot 10^6$, с	v_{10} , м/с	$p_{10} \cdot 10^{-2}$, кг м/с	E_{10} , Дж	$\vec{F} \cdot 10^{-2}$, Н	$E_{ДЕФ}$, Дж

4. На основе экспериментальных данных построить на миллиметровке графики зависимостей $\Delta t = f(v_{10})$, $\vec{F} = f(v_{10})$, $E_{ДЕФ} = f(v_{10})$.

5. На основе экспериментальных данных для v_{10} по расчетной зависимости (19) определить Δt . Нанести полученные значения на график $\Delta t = f(v_{10})$.

в) Оценка погрешности коэффициента восстановления k .

Как известно, погрешности делятся на систематические и случайные.

К числу источников систематических погрешностей в данной работе относятся две:

- смещение начала отсчета шкалы углов;
- отклонение шаров от строгой вертикали в начальном положении. Обе эти погрешности достаточно малы и ими можно пренебречь.

Относительная случайная погрешность определения коэффициента восстановления находится по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \varphi_{10}}{\varphi_{10}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \varphi_2}{\varphi_2}\right)^2} \quad (27)$$

Принимая погрешность определения углов равной одному делению шкалы (1°), т.е. $\Delta \varphi_{10} = \Delta \varphi_2 = 1^{\circ}$ получаем

$$\varepsilon = \frac{\Delta k}{k} = \sqrt{\frac{1}{\varphi_{10}^2} + \frac{1}{\varphi_2^2}}$$

где углы выражены в градусах.

Абсолютная погрешность Δk определяется по формуле $\Delta k = \varepsilon \cdot k$. Окончательный результат записывается в виде $k \pm \Delta k$.

Примечание. В случае, если разброс значений φ_2 (для одного и того же значения φ_{10}) окажется больше 1° , то погрешность $\Delta \varphi_2$, в формуле (21), определяется как случайная погрешность прямых измерений φ_2 (см., например, [3])

Контрольные вопросы

1. Какие виды ударов Вы знаете? Дайте им краткую характеристику.
2. Как изменяется кинетическая энергия шаров и их относительная скорость при абсолютно упругом, абсолютно неупругом и неупругом ударах?
3. Что такое коэффициент восстановления, энергия деформации? От чего зависят эти величины?
4. Какие физические законы используются для вывода закономерностей удара?
5. От чего зависит время соударения шаров?

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики, В 3 т. М.: Наука, 1970 Т.1.168 с.
2. Гладков Н.А., Бузубов Ю.И. Определение времени контакта при ударе шара в преграду: Сборник научно-методических работ по физике. М.: МВТУ, 1984 № 10. 34 с.
3. Зайдель А.Е. Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974. 102 с.