Московский Государственный Технический Университет им. И. Э. Баумана

А. М. Кириллов, Л. Н. Климов

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Методические указания к лабораторной работе М-7 по курсу общей физики.
Под редакцией Л.К. Мартинсона
МГТУ, 1992.

Рассмотрены продольные колебания в металлическом стержне и поперечные колебания в слабо натянутой струне. Для студентов 1-го курса.

Цель работы - определение скорости распространения механических колебаний в упругом стержне и слабо натянутой струне по параметрам возбужденной в них стоячей волне.

ВВЕДЕНИЕ

Если в каком-либо участке сплошной упругой среды возникает механическая деформация, то, благодаря упругим силам, изменение этой деформации может иметь колебательный характер. Эти колебания с конечной скоростью будут распространяться от данного участка среды к другим ее участкам.

Процесс распространения колебаний в среде (в общем случае - в пространстве) называют волной.

Волна называется продольной, если смещение частиц среды происходит вдоль направления распространения колебаний, и поперечной, если смещение частиц перпендикулярно этому направлению.

В общем случае отсчитанное от положения равновесия смещение ξ частицы среды, в которой распространяется волна, есть функция координат x, y, z и времени t. Для частного случая плоской волны, распространяющейся в направлении оси x, $\boldsymbol{\xi=\xi(x, t)}$

Можно показать [1, §94], что для незатухающей монохроматической плоской бегущей в направлении x волны

$$\xi = \xi_{MAX} \cdot \cos[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)] = a\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{vT}x\right) = a\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = a\cos(\omega t - kx) \quad (1)$$

где $a=\xi_{MAX}$ амплитуда, т.е. максимальное смещение частицы от ее положения равновесия, x - координата точки положения равновесия колеблющейся частицы, T - период колебаний, ω - круговая (циклическая) частота колебаний, v - фазовая скорость волны, t - текущее время, λ - длина волны, $2\pi/\lambda$ - волновое число.

В приведенной записи уравнение (1) не содержит начальной фазы колебаний, что вполне возможно при соответствующем выборе начал отсчета x и t.

При наложении двух встречных, бегущей и отраженной, незатухающих волн с одинаковыми амплитудой a и частотой ω:

$$\xi_1 = a\cos(\omega t - kx)$$
$$\xi_2 = a\cos(\omega t + kx)$$

возникает стоячая волна, уравнение которой имеет вид

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = a\cos(\omega t - kx) + a\cos(\omega t + kx) = 2a\cos kx \cdot \cos\omega t = A\cos kx \cdot \cos\omega t \quad (2)$$

Из соотношения (2) следует, что в отличие от бегущей волны у стоячей волны амплитуда $|A\cdot\cos(kx)|$ есть функция координаты x. В точках, где

$$kx = 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm n\pi, \quad (n = 0,1,2,3,...) \quad (3)$$

амплитуда стоячей волны достигает максимального значения. Эти точки называются **пучностями** стоячей волны. В точках, где

$$kx = 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm(n + \frac{1}{2})\pi, \quad (n = 0,1,2,3,...) \tag{4}$$

амплитуда стоячей волны обращается в нуль. В этих точках нет колебаний частиц среды и они называются **узлами**.

Из (3) и (4) следует, что расстояние $(\mathbf{x_{n+1} - x_n})$ между соседними пучностями (или соседними узлами) равно половине длины волны:

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)\frac{\lambda}{2} - n\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} \tag{5}$$

В общем случае [1] уравнение любой волны является решением дифференциального уравнения, называемого волновым:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{6}$$

где v - скорость распространения волны. В одномерном случае (1) и (2) есть решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{7}$$

Поскольку

$$\mathrm{v} = \lambda \nu \tag{8}$$

то при экспериментальном определении v необходимо измерять частоту колебаний ν и длину волны λ.

А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

Рассмотрим элемент стержня длиной dx, заключенный между поперечными сечениями стержня в точках x и x+dx (рис. 1).

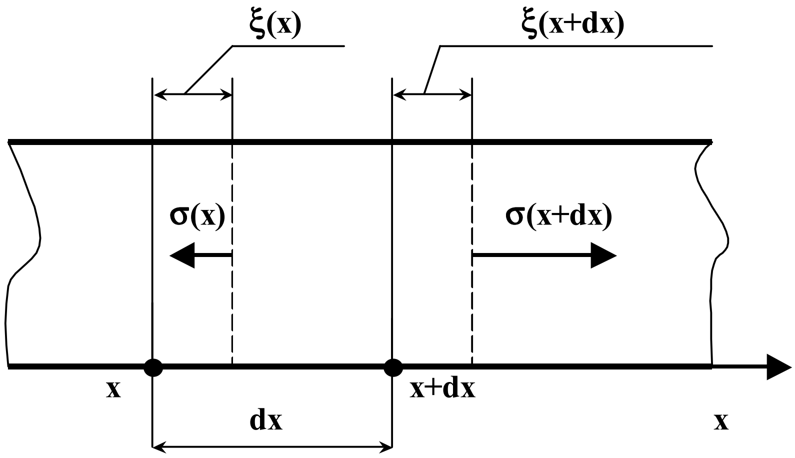

Рис. 1

При распространении вдоль стержня (по оси x) продольной волны в любом его поперечном сечении возникает напряжение **σ**, являющееся функцией координаты x и времени **t**. На рис. 1 показаны возникшие в некоторый момент времени напряжения на торцах рассматриваемого элемента dx стержня: **σ(x)** и **σ(x+dx)** при соответствующих смещениях из положений равновесия

ξ(x) и **ξ(x+dx)** колеблющихся частиц стержня. Сила, действующая в этот момент времени на элемент dx стержня, равна

$$F_x = S[\sigma(x+dx) - \sigma(x)]$$

где S - площадь поперечного сечения стержня, малые изменения которой при распространении в нем колебаний учитывать не будем.

Выражая массу m элемента стержня через плотность ρ, сечение S, длину dx и обозначая его ускорение $\boldsymbol{a_X = \partial^2\xi/\partial x^2}$ на основании второго закона Ньютона ($\mathbf{m}\boldsymbol{a}_\mathbf{X}\mathbf{=F_X}$) можно написать

$$S\rho dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S[\sigma(x+dx) - \sigma(x)]$$

или с учетом малости dx

$$\rho dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$$

т.е.

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad (9)$$

На основании закона Гука, обозначая изменение длины элемента стержня δ(dx) имеем

$$\sigma = E\frac{\delta(dx)}{dx}$$

где E - модуль Юнга, характеризующий упругие свойства вещества. В свою очередь изменение длины элемента стержня определяется разностью смещений его торцов:

$$\delta(dx) = \xi(x+dx) - \xi(x) = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$$

Следовательно,

$$\sigma = E\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (10)$$

Продифференцировав (10) по координате x, имеем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = E\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad (11)$$

Подставив (11) в (9), получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad (12)$$

Размерность отношения E/ρ, входящего в (12), совпадает с размерностью квадрата скорости: $[E/\rho] = Н \cdot м^{-2}/кг \cdot м^{-3} = м^2/с^2$. Сопоставив (12) и (7), приходим к выводу, что скорость распространения продольной волны в упругом твердом теле определяется выражением

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (13)$$

С другой стороны, скорость распространения волны может быть найдена из соотношения (8).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Экспериментальная установка

В данном эксперименте определяется скорость v распространения продольной волны в металлическом стержне AB, жестко закрепленном посередине в т. C (рис. 2).

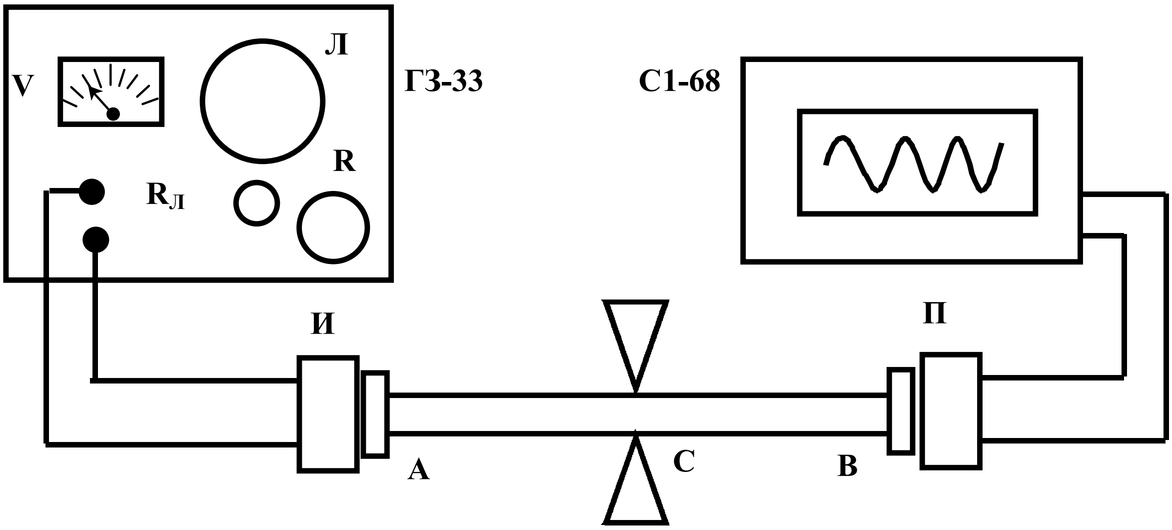

Рис. 2

К свободным концам А и В стержня прикреплены небольшие ферромагнитные диски. Если вблизи конца А расположить источник И переменного магнитного поля, то диск конца А начнет вибрировать и его колебания передадутся стержню. Источник И представляет собой катушку с ферромагнитным сердечником, на которую подается переменное напряжение от генератора звуковой частоты ГЗ-33, питающегося от сети. Вблизи другого конца В стержня расположен приемник П, по конструкции аналогичный источнику И. Распространяющиеся вдоль стержня колебания вызывают вибрацию ферромагнитного диска, укрепленного на конце В. Это приводит к изменению магнитного поля сердечника приемника П, в результате чего в обмотке приемника П индуцируется переменное напряжение. Обмотка подключена к электронному осциллографу С1-68, на экране которого можно наблюдать развертку колебаний индуцированного напряжения.

С помощью регулировочного винта Rл, вращающего лимб Л генератора ГЗ-33, можно подобрать такую частоту звуковых колебаний, при которой в стержне возникнут резонансные колебания и установится стоячая волна. Если подобранная частота колебаний будет совпадать с наименьшей (основной) частотой ν_0 собственных колебаний стержня, то в данном стержне длиной l установится стоячая волна с наименьшим числом узлов и пучностей (первая гармоника), как показано на рис. 3 а (на стержне укладывается половина длины волны, так как между двумя пучностями на его концах есть только один узел в его середине). В этом случае на экране осциллографа С1-68 наблюдается резкое увеличение амплитуды колебаний.

Увеличив с помощью лимба Л частоту колебаний до значения $\nu=3\nu_0$, можно снова наблюдать на экране С1-68 резонансное увеличение амплитуды колебаний, но на этот раз слабое. Регистрируемая по лимбу Л частота ν в этом случав является частотой второй гармоники, при которой в стержне укладывается три полуволны (рис. 3 *б*).

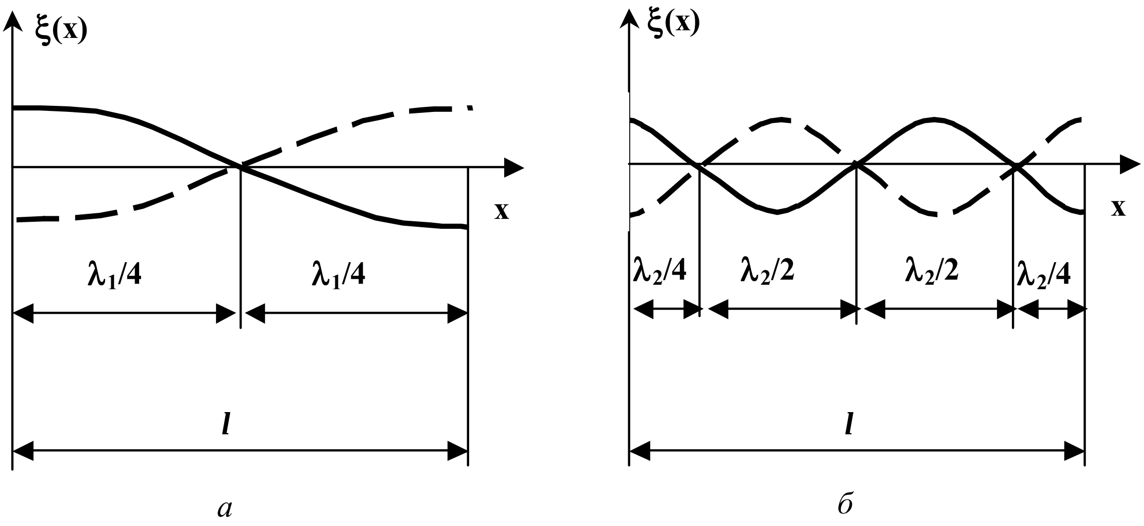

Рис.3

<u>Выполнение эксперимента</u>

1. Включить с помощью тумблера «Сеть» генератор ГЗ-33 и осциллограф С1-68.
2. Установить в окошке ГЗ-33 «Пределы шкалы» набор пределов 3V, 10V, 30V, +30 dB. Ручкой R «Рег.выхода» установить по вольтметру V такое напряжение, при котором его стрелка не выйдет за пределы шкалы.
3. Установить множитель шкалы лимба ГЗ-33 на «X 100».
4. Установить ручку усилителя Y осциллографа С1-68 в положение «0,1», а множитель усилителя Y- в положение «X 1».
5. Установить множитель развертки осциллографа С1-68 в положение «X 1».
6. Вращая ручку лимба «Частота Hz» генератора ГЗ-33 в пределах от 3000 до 8000 Гц, добиться появления на экране осциллографа резкого увеличения амплитуды колебаний и зарегистрировать найденную основную частоту колебаний стержня ν_0.

Примечание. При поиске основной частоты ν_0 ручку лимба вблизи этой частоты надо вращать медленно.

7. Вычислить скорость распространения колебаний в стержне по формуле

$$\mathrm{v}=2l\nu_0 \qquad (14)$$

где l - длина стержня.

Примечание. Формула (14) следует из формулы (8), поскольку при частоте ν_0 $\lambda=2l$.

8. Вычислить скорость распространения колебаний в стержне по формуле (13), воспользовавшись значениями Е и ρ, взятыми для данного стержня из справочника.
9. Записать окончательный результат в виде **v±Δv**, где **Δv** - абсолютная погрешность измерения скорости **v**, найденной по формуле (14).

<u>Расчет погрешности **Δv**</u>. Поскольку в используемом генераторе ГЗ-33 шкала лимба в области измеряемой частоты ν_0 довольно грубая, многократные измерения частоты ν_0 не приведут к заметным отклонениям результатов измерения. Поэтому для оценки погрешности измерения частоты ν_0 необходимо воспользоваться паспортными данными генератора ГЗ-33, по которым относительная погрешность показаний его лимба **Δv/v=** + 0,02. Таким образом, можно подсчитать относительную погрешность **ε** скорости по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \nu_0}{\nu_0}\right)^2}$$

принимая $\Delta\nu_0/\nu_0$= + 0,02 Δl=1 мм (для длины стержня l указанной на установке).

По **ε** можно оценить и значение погрешности **Δv=εv**.

Контрольные вопросы

1. От каких параметров среды зависит скорость распространения продольной волны в упругом стержне?
2. Чем отличается стоячая волна от бегущей?
3. Каково отношение $\mathbf{v_1/v_2}$ продольных волн в двух стержнях, если для них $\mathbf{(E_1/\rho_1):(E_2/\rho_2)=100:81}$?

Б.ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В СЛАБО НАТЯНУТОЙ СТРУНЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пусть **y=ξ(x,t)** - уравнение, описывающее смещение точек колеблющейся однородной струны в некоторый момент времени t, концы которой находятся на оси x. Для малых смещений при слабом натяжении струны можно полагать, что это натяжение неизменно по всей длине струны и не зависит от времени. Рассмотрим в некоторый момент времени смещенный из положения равновесия в направлении оси y малый отрезок струны $\Delta \boldsymbol{l}$ (рис. 4). К его концам по касательным к струне приложены равные по модулю силы натяжения **F**, образующие с направлением оси x углы $\boldsymbol{\pi+\varphi_1}$ и $\boldsymbol{\varphi_2}$.

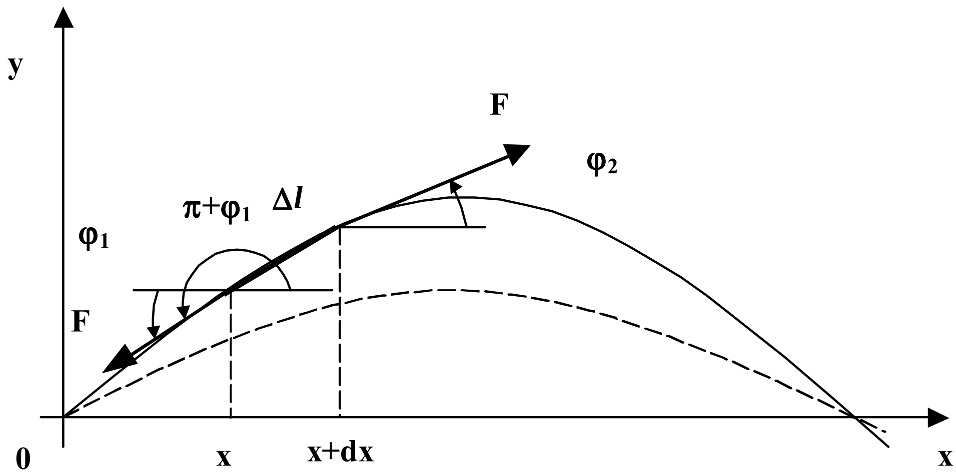

Рис.4

При малых смещениях отрезка $\Delta \boldsymbol{l}$ можно считать φ_1 и φ_2 малыми углами, разность модулей которых в общем случае не равна нулю. Поскольку при малых углах φ_1 и φ_2 имеем $\mathbf{sin\varphi_1\approx tg\varphi_1}$ и $\mathbf{sin\varphi_2\approx tg\varphi_2}$, то для проекций сил F на ось y, учитывая, что y=*f*(x, t) можно написать соотношения:

$$F\sin(\pi+\varphi_1) = -F\sin\varphi_1 \approx Ftg\varphi_1 = -F\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_x$$

$$F\sin\varphi_2 \approx Ftg\varphi_2 = F\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

Очевидно, что сумма проекций сил F на ось y является силой, возвращающей отрезок Δl в положение равновесия. На основании второго закона Ньютона имеем

$$F\cdot\left[\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_x\right] = \beta\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad (15)$$

где **β** - линейная плотность, численно равная массе отрезке единичной длины струны, находящейся в положении равновесия; $\partial^2\xi/\partial t^2$ - ускорение, сообщаемое отрезку $\Delta \boldsymbol{l}$ струны возвращающей силой. С учетом малости **Δx** получаем

$$F\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x = \beta\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{F}{\beta}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad (16)$$

Сопоставляя (16) и (7), находим

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{F}{\beta}} \qquad (17)$$

Таким образом, скорость **v** распространения волны в слабо натянутой струне зависит от ее линейной плотности и от того, как она была натянута в положении равновесия, но не зависит от упругих свойств струны. Независимость скорости волны от упругих свойств струны в данном случае объясняется тем, что возвращающая сила, действующая на каждый отрезок **Δ*l*** струны, является суммой проекций на ось y неизменных во времени сил **F** (по модулю).
Линейная плотность струны β связана с обычной плотность струны **ρ** соотношением

$$\beta = \rho \cdot S = \rho\frac{\pi d^2}{4} \qquad (18)$$

где S- площадь поперечного сечений струны, d - диаметр сечения струны, С учетом (18) формула (17) переходит в формулу

$$\mathrm{v} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}} \qquad (19)$$

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Экспериментальная установка

Установка (рис. 5) для проведения эксперимента состоит из горизонтальной струны, конец А которой закреплен, а другой, имеющий чашечку для гирь, перекинут через металлический блок В.
К концу А и блоку В подводится переменный ток от выходных клемм генератора звуковой частоты ГЗ-33, питающегося от сети. Постоянный магнит М, в горизонтальном магнитном поле которого находится небольшой участок струны, вызывает появление периодически меняющейся в вертикальном направлении силы Ампера, приложенной к этому участку струны. При некотором натяжении струны частота ее собственных колебаний может оказаться совпадающей с частотой изменения силы Ампера, т.е. с частотой переменного тока генератора. В этом случае наступает резонанс, что легко обнаружить по отчетливому появлению узлов и пучностей поперечной стоячей волны в струне.
Скорость распространения колебаний в струне можно найти либо по силе ее натяжения с помощью формулы (17), либо по частоте ее резонансных колебаний, используя формулу

$$\mathbf{v} = \frac{2l}{n}\nu \qquad (20)$$

где ***l*** - длина струны, **ν** - частота колебаний, **n** - число пучностей (для основного тона **n**=1).

Примечание. Формула (20) следует из формулы (8), поскольку при возникновении в струне стоячей волны длина ***l*** струны должна содержать целое число n (n = 1,2,3,...) полуволн:

$$l = n\frac{\lambda}{2}$$

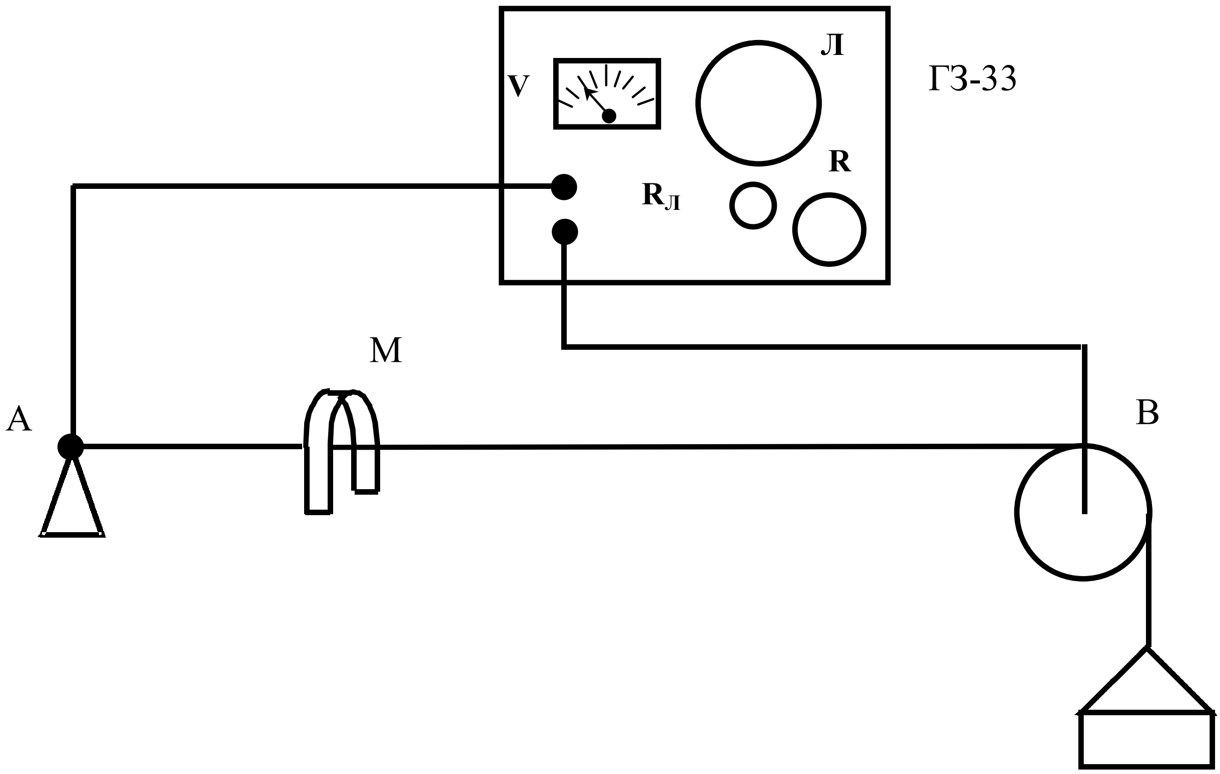

Рис. 5

Выполнение эксперимента

1. Ознакомиться с экспериментальной установкой. Проверить, правильно ли подведено напряжение от выходных клемм генератора ГЗ-33, не соскочила ли струна с металлического блока.
2. Установить в окошке ГЗ-33 «Пределы шкалы» набор пределов 3V, 10V, 30V, +30dB. Ручкой «Рег. выхода» установить по вольтметру **V** такое напряжение, при котором его стрелка не выйдет за пределы шкалы.
3. Поставить переключатель множителя частот генератора ГЗ-33 в положение «X 1», лимб частот генератора установить в положение, соответствующее частоте 25 Гц, и включить генератор в сеть.
4. Установить частоту 25 Гц с помощью регулятора $\mathbf{R_Л}$ генератора ГЗ-33 (см. рис. 5). Нагружая чашку гирями (вначале около 10 гс (в соответствии с правилами ГОСТ грамм-сила имеет обозначение гс)), подобрать такое натяжение струны, при котором возникает стоячая волна с одной пучностью (колебания основного тона), За натяжение F струны принять $\mathbf{F=P_1+P_2}$, где $\mathbf{P_1}$ - вес гирь, $\mathbf{P_2}$ - вес чашки (вес чашки $\mathbf{P_2}$ для данной установки должен быть известен).
5. Не меняя полученного в п. 4 натяжения струны, увеличить с помощью винта $\mathbf{R_Л}$ лимба Л частоту 25 Гц в два, три, четыре и т.д., раз, наблюдая в каждом случав стоячую волну с разным числом **n** пучностей, т.е. высшие гармоники • вторую, третью, четвертую и т.д.
6. Повторить измерения, проделанные в п. 4, задавая лимбом генератора ГЗ-33 частоты 30, 35, 40, 45, 50 Гц. Подобранное в каждом случае натяжение струны F в грамм-силах (гс) и ньютонах (Н), а также соответствующую частоту основного тона в герцах (Гц), занести в таблицу.

Частота основного тона ν, ГЦ	**F**, гс	**F**, Н	$v=\sqrt{\dfrac{F}{\beta}}$ [см. (17)]		$v=\dfrac{2l}{n}\nu$ [см. (20)]	
			v±Δv, м/с	**Δv/v**, 100%	**v±Δv**, м/с	**Δv/v**, 100%

7. Рассчитать в каждом случае скорость волны по формуле (17). Относительная погрешность скорости, вычисленной по формуле (17), может быть найдена из равенства

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2}$$

где ΔF=+1 гс,

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_1}{l_1}\right)^2}$$

так как $\boldsymbol{\beta = m_1/l_1}$ (**m_1** измеренная масса отрезка $\boldsymbol{l_1}$ струны из такого же материала и того же диаметра, как в установке).

Линейная плотность β и ее относительная погрешность **Δβ/β** для данной струны обычно указываются.

Зная **ε**, можно подсчитать значение абсолютной погрешности скорости **Δv**:

$$\Delta \mathrm{v} = \varepsilon \cdot \mathrm{v}$$

8. Рассчитать в каждом случае скорость волны по формуле (20), полагая n=1.

9. Результаты вычислений в пп. 7 и 8 занести в таблицу (см. п. 6) и по этим данным построить на одних осях координат (**v** и **F**) два графика зависимости скорости **v**, найденной по формулам (17) и (20), от натяжения **F**.

Контрольные вопросы.

1. Чем отличается стоячая волна от бегущей?
2. Почему оказалось, что скорость волны в струне не зависит от модуля Юнга Е материала струны?
3. В струне, имеющей длину ***l***, плотность **ρ**, диаметр сечения d и натяжение F, возникла стоячая волна с одной пучностью частотой **ν**. Возникнет ли стоячая волна с той же частотой **ν** при том же натяжения **F** в такой же струне, но имеющей диаметр сечения (1/2)d, (3/2)d, 2d, 3d,...? Если возникнет, то с каким числом пучностей?

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. М.: Наука, 1988, 496 с.
2. Кириллов А.М., Климов Л.Н., Расторгуева А.В. Изучение механических колебаний и волн. М.: МВТУ, 1983. 16 с.