

Рис. 2.10. К расчету упругого элемента переменного сечения

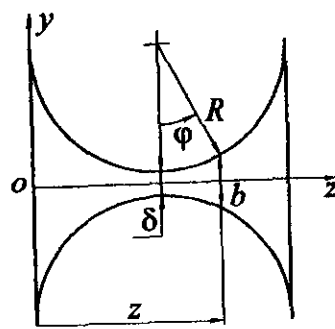


Рис. 2.11. К расчету жесткости переменычки переменного сечения

Интегралы Мора, определяющие упругие деформации этого элемента, под действием сил  $P_x, P_y$  и  $P_z$  и моментов  $M_x$  и  $M_y$ , имеют вид:  
— для смещения концевое сечения вдоль осей  $x, y$  и  $z$

$$\delta_x = \frac{6}{5} \int_0^{2R} \frac{P_x}{GF} dz + \int_0^{2R} \frac{P_x(2R-z)^2}{EJ_y} dz + \int_0^{2R} \frac{M_y(2R-z)}{EJ_y} dz;$$

$$\delta_y = \frac{6}{5} \int_0^{2R} \frac{P_y}{GF} dz + \int_0^{2R} \frac{P_y(2R-z)^2}{EJ_x} dz - \int_0^{2R} \frac{M_x(2R-z)}{EJ_x} dz; \quad (2.6)$$

$$\delta_z = \int_0^{2R} \frac{P_z}{GF} dz;$$

— для угловых деформаций концевое сечения вокруг осей  $x, y$  и  $z$ :

$$\theta_x = - \int_0^{2R} \frac{P_y(2R-z)}{EJ_x} dz + \int_0^{2R} \frac{M_x}{EJ_x} dz;$$

$$\theta_y = \int_0^{2R} \frac{P_x(2R-z)}{EJ_y} dz + \int_0^{2R} \frac{M_y}{EJ_y} dz; \quad (2.7)$$

$$\theta_z = \int_0^{2R} \frac{M_z}{EJ_z} dz;$$

где  $E$  и  $G$  — соответственно, модули упругости и сдвига;

$$J_x = \frac{hb^3}{12}, \quad J_y = \frac{hb^3}{12} \quad \text{и} \quad J_z = \begin{cases} \eta \frac{hb^3}{3} & \text{для } h \geq b; \\ \eta \frac{h^3 b}{3} & \text{для } h < b, \end{cases} \quad \text{— соответственно,}$$

моменты инерции текущего сечения упругого элемента вокруг осей  $x, y$  и момент инерции при кручении вокруг оси  $z$ ;  $F = hb$  — площадь текущего сечения,

$$\eta(s) = 1 - \frac{192}{\pi^5} s \left( \operatorname{th} \left( \frac{\pi}{2s} \right) + \frac{1}{221,053} \operatorname{th} \left( \frac{3\pi}{2s} \right) \right) \quad (\text{см. [10], стр. 369}),$$

$$s(z) = \frac{b(z)}{h} \quad \text{для } b(z) \leq h, \quad \text{или} \quad s(z) = \frac{h}{b(z)} \quad \text{для } b(z) \geq h.$$

Введем следующие обозначения:

$$J_1^{-1} = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{1 + \alpha - \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{4(1 + \alpha)}{\sqrt{\alpha(2 + \alpha)}} \operatorname{arctg} \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}} - \pi;$$

$$J_2^{-1} = \int_{-1}^1 \frac{1 + \xi^2}{1 + \alpha - \sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \frac{\pi}{2} + 2(1 + \alpha) + (1 - 2\alpha - \alpha^2) J_1;$$

$$J_3^{-1} = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{(1 + \alpha - \sqrt{1 - \xi^2})^3} =$$

$$\frac{(2\alpha^2 + 4\alpha + 3)(2 + \alpha)\sqrt{\alpha} + 6\sqrt{2 + \alpha}(1 + \alpha)^2 \operatorname{arctg} \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}}{(2 + \alpha)^3 (1 + \alpha) \alpha^2 \sqrt{\alpha}};$$

$$J_4^{-1} = \int_{-1}^1 \frac{(1 + \xi^2)d\xi}{(1 + \alpha - \sqrt{1 - \xi^2})^3} = (1 - 2\alpha - \alpha^2) J_3 - J_1 - 2(1 + \alpha) \frac{dJ_1}{d\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 \sqrt{\alpha}} \left( \frac{3 + 6\alpha + 11\alpha^2 + 8\alpha^3 + 2\alpha^4 + \pi(2 + \alpha)^2 (1 + \alpha) \alpha^2 \sqrt{\alpha}}{(2 + \alpha)^2 (1 + \alpha)} + \frac{2(1 + \alpha)(6 + 7\alpha - 12\alpha^2 - 23\alpha^3 - 12\alpha^4 - 2\alpha^5)}{(2 + \alpha)^3 \sqrt{2 + \alpha}} \operatorname{arctg} \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}} \right);$$

$$J_3^{-1} = \begin{cases} \int_0^1 \frac{\beta^2 d\xi}{\eta(\xi)(1+\alpha-\sqrt{1-\xi^2})^3}, & \text{для } \beta \leq 1+\alpha-\sqrt{1-\xi^2}, \\ \int_0^1 \frac{d\xi}{\eta(\xi)(1+\alpha-\sqrt{1-\xi^2})}, & \text{для } \beta > 1+\alpha-\sqrt{1-\xi^2}, \end{cases}$$

$$\text{где } \beta = \frac{h}{2R}, \quad \frac{b(\xi)}{h} = \frac{1+\alpha-\sqrt{1-\xi^2}}{\beta}.$$

Реальные размеры упругих элементов ДНГ находятся в пределах:  $0,02 \text{ мм} \leq \delta \leq 0,15 \text{ мм}$ ;  $0,2 \text{ мм} \leq h \leq 2 \text{ мм}$ ;  $0,5 \text{ мм} \leq R \leq 1,5 \text{ мм}$ , что соответствует диапазонам изменения  $0,01 \leq \alpha \leq 0,2$  и  $0,2 \leq \beta \leq 2$ .

Для этих диапазонов изменения  $\alpha$  и  $\beta$  величина  $J_3$ , с точностью 0,6% аппроксимируется следующим выражением:

$$J_3 = \frac{\alpha^2 \sqrt{\alpha}}{f_1(\alpha) - f_2(\alpha)\beta + f_3(\alpha)\beta^2},$$

$$\text{где } f_1(\alpha) = 9,377 \cdot 10^{-5} - 1,361 \cdot 10^{-2} \alpha + 1,416 \alpha^2,$$

$$f_2(\alpha) = 3,56 \cdot 10^{-5} - 0,712 \alpha + 1,66 \alpha^2,$$

$$f_3(\alpha) = 0,833 - 0,211 \alpha + 0,4035 \alpha^2.$$

С учетом этих обозначений упругие деформации элемента можно записать в виде:

$$\begin{cases} \delta_x = \frac{6R^2}{EJ_2 h^3} \left( 1 + \frac{1}{10} \frac{E}{G} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \frac{J_2}{J_1} \right) P_x + \frac{6R}{EJ_1 h^3} M_y, \\ \delta_y = \frac{3}{2EJ_4 h} \left( 1 + \frac{2EJ_4}{5GJ_1} \right) P_y - \frac{3}{2EJ_3 R h} M_x, \\ \delta_z = \frac{1}{2EJ_1 h} P_z \end{cases}, \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{3}{2EJ_3 R h} P_y + \frac{3}{2EJ_3 R^2 h} M_x, \\ \theta_y = \frac{6R}{EJ_1 h^3} P_x + \frac{6}{EJ_1 h^3} M_y, \\ \theta_z = \frac{3}{GJ_3 h^3} M_z \end{cases}, \quad (2.9)$$

или в векторном виде:

$$\bar{\delta}_n = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \bar{P}_n + \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & b_2 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{M}_n;$$

$$\bar{\theta}_n = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 0 & -b_1 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{P}_n + \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \bar{M}_n.$$

Соотношения (2.8) и (2.9) полностью определяют жесткостные свойства упругого элемента переменного сечения (см. рис.2.10).

## 2.7. Погрешности ДНГ

Динамически настраиваемым гироскопам свойственны все погрешности присущие трехстепенным гироскопам в том числе от статической несбалансированности вдоль оси вращения, от неравножесткости упругого подвеса, от внешних магнитных полей, от изменения температуры окружающей среды

### 2.7.1. Погрешности от квадратурных моментов

Рассмотрим основные факторы, которые приводят к возникновению квадратурных моментов, т. е. моментов, вектор которых направлен вдоль действующей на подвес нагрузки. Наиболее серьезными погрешностями здесь являются неточность геометрической формы упругого элемента и, в частности, закрутка упругого элемента, как показано на рис. 2.12.

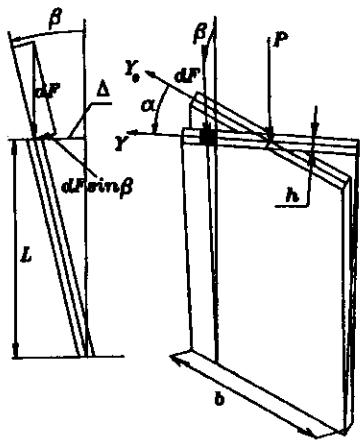


Рис. 2.12. К расчету квадратурного момента ДНГ

При действии силы  $P$  вдоль стержня на выделенную площадку сечением  $hx-dy$  к ней приложена элементарная сила, направленная по нормали к верхнему сечению:

$$dF = \frac{P}{bh} hdy = \frac{P}{b} dy.$$

Из-за закрутки верхнего сечения на угол  $\alpha$  плоскость выделенной площадки разворачивается относительно вертикали на угол

$$\beta = \frac{\Delta}{L} = \frac{y}{L} \alpha.$$

Проекция силы  $dF$  на нормаль к верхней плоскости элемента равна

$$dF \sin \beta = \frac{Py}{bL} \alpha dy.$$

Момент, создаваемый этой силой вокруг вертикальной оси,

$$dM = y dF \sin \beta = \frac{Py^2}{bL} \alpha dy.$$

Интегрируя по всему сечению упругого элемента, получаем

$$M = \int dM = \frac{P}{bL} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{Pb^3}{12L} \alpha, \quad (2.10)$$

момент, вектор которого направлен вдоль действующей силы. Этот момент называют "квадратурным" моментом и его величина пропорциональна углу закрутки  $\alpha$ , который может быть вызван технологическими погрешностями изготовления или установки этого элемента в подвесе. Дрейф гироскопа обусловленный квадратурным моментом (2.10), может быть записан в виде

$$\omega_x = -\omega_{кв} a_y; \quad \omega_y = \omega_{кв} a_x, \quad (2.11)$$

где  $\omega_{кв} = \frac{Pb^3}{12Lg} \alpha$ ,  $g$  — ускорение свободного падения.

### 2.7.2. Погрешности от осевой несбалансированности и неравножесткости

Определим погрешность ДНГ от несбалансированности. Пусть положительное направление момента  $M_g = P\Delta$  от несбалансированности вызванного смещением  $\Delta$  центра масс ротора гироскопа в положительном направлении оси вращения  $Z$ , как показано на рис. 2.13. Тогда дрейф ДНГ от осевого смещения центра масс имеет вид

$$\omega_x = \omega_g a_x; \quad \omega_y = \omega_g a_y, \quad (2.12)$$

где  $\omega_g = \frac{P\Delta}{Hg}$ .

Определим погрешность ДНГ от  $g^2$  или, иначе говоря, погрешность от неравножесткости карданова подвеса. Пусть вдоль осей  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  действуют ускорения  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ , как показано на рис. 2.14.

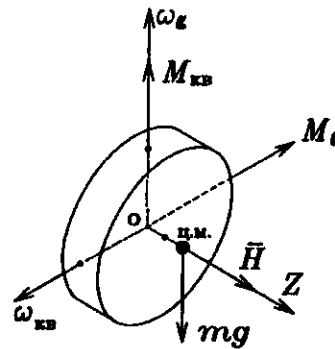


Рис. 2.13. К определению погрешности от осевой несбалансированности ротора ДНГ

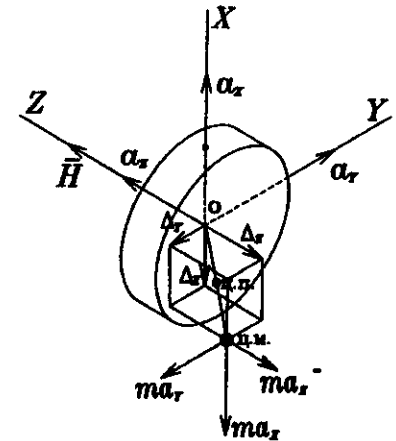


Рис. 2.14. К определению погрешности, обусловленной неравножесткостью подвеса

Инерционные силы  $ma_x$ ,  $ma_y$  и  $ma_z$ , возникающие под действием этих ускорений, смещают центр масс ротора относительно исходного положения на величины  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  и  $\Delta_z$ , вдоль соответствующих осей за счет упругой деформации карданова подвеса. Центр подвеса при этом также смещается на величину, равную приблизительно  $0,5\Delta_x$ ,  $0,5\Delta_y$  и  $0,5\Delta_z$ .

Инерционные моменты относительно центра подвеса вокруг осей  $X$  и  $Y$  равны

$$M_x = 0,5 ma_z \Delta_y - 0,5 ma_y \Delta_z; \quad (2.13)$$

$$M_y = -0,5 ma_z \Delta_x + 0,5 ma_x \Delta_z.$$

Учитывая, что деформация карданова подвеса определяется его жесткостью  $K_x$ ,  $K_y$  и  $K_z$ , можно написать

$$\Delta_x = m \frac{a_x}{K_x}, \quad \Delta_y = m \frac{a_y}{K_y}, \quad \Delta_z = m \frac{a_z}{K_z}. \quad (2.14)$$

Подставив (2.14) в (2.13), получим

$$M_x = 0,5m^2 \left( \frac{1}{K_y} - \frac{1}{K_z} \right) a_y a_z, \quad M_y = -0,5m^2 \left( \frac{1}{K_x} - \frac{1}{K_z} \right) a_x a_z.$$

Полагая (в силу симметрии конструкции подвеса и с учетом его вращения вокруг оси  $Z$ ), что радиальные жесткости равны, т. е.  $K_x = K_y = K_r$ , получаем окончательно

$$M_x = M_{\text{нж}} a_y a_z, \quad M_y = -M_{\text{нж}} a_x a_z,$$

где  $M_{\text{нж}} = 0,5m^2 \left( \frac{1}{K_r} - \frac{1}{K_z} \right)$ .

Отсюда находим дрейф ДНГ от неравножесткости конструкции карданова подвеса:

$$\omega_x = -\frac{M_y}{H} = \omega_{\text{нж}} a_x a_z, \quad \omega_y = \frac{M_x}{H} = \omega_{\text{нж}} a_y a_z, \quad (2.15)$$

где  $\omega_{\text{нж}} = \frac{M_{\text{нж}}}{H} = \frac{m^2}{2H} \left( \frac{1}{K_r} - \frac{1}{K_z} \right)$ .

### 2.7.3. Погрешности от угловых колебаний на двойной частоте вращения

Пусть корпус ДНГ совершает угловые колебания вокруг осей  $x$  и  $y$  по закону

$$\psi_x = \psi_0 \cos \alpha \cdot \sin 2\Omega t;$$

$$\psi_y = \psi_0 \sin \alpha \cdot \sin 2\Omega t,$$

где  $\Omega$  — угловая скорость собственного вращения ротора гироскопа,  $\alpha$  — угол между направлением вектора угловых колебаний и осью  $x$  корпуса гироскопа.

Тогда погрешность ДНГ, как это показано, например, в работе [2], составляет:

— для однокольцевого гироскопа

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\frac{k+J_1\Omega^2}{H} \psi_0 \cos \alpha; \\ \omega_y &= \frac{k+J_1\Omega^2}{H} \psi_0 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2.16)$$

— для двухкольцевого гироскопа с параллельным соединением упругих подвесов, оси которых развернуты на  $90^\circ$  вокруг оси вращения

$$\begin{aligned} \omega_x &= -\frac{k_1 - k_2 + (J_1 - J_2)\Omega^2}{H} \psi_0 \cos \alpha; \\ \omega_y &= \frac{k_1 - k_2 + (J_1 - J_2)\Omega^2}{H} \psi_0 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $J_1$ ,  $J_2$  — средние значения их угловых жесткостей и разностных моментов инерции колец.

Из соотношения (2.16) видно, что для однокольцевого гироскопа указанная погрешность достигает значительной величины и ее эффективное снижение достигается в ДНГ с двухкольцевыми подвесами, где погрешность (2.17) определяется разностью угловых жесткостей и разностных моментов инерции колец.

### 2.7.4. Модель погрешностей ДНГ

С учетом погрешностей ДНГ от постоянной времени, определяемой, как показано в работе [9] в основном силами нормального

давления (т.е. силами направленными по нормали к поверхности ротора) со стороны газодинамических потоков, а также соотношений (2.11), (2.12) и (2.15), получим следующую модель погрешностей гироскопа

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_{x_0} - \omega_t \alpha + \omega_M \beta + \omega_g a_x - \omega_{\text{нн}} a_y + \omega_{\text{нж}} a_x a_x; \\ \omega_y &= \omega_{y_0} - \omega_t \beta - \omega_M \alpha + \omega_{\text{нн}} a_x + \omega_g a_y + \omega_{\text{нж}} a_y a_x,\end{aligned}\quad (2.18)$$

где  $\omega_{x_0}$  и  $\omega_{y_0}$  — постоянные составляющие дрейфа ДНГ, не зависящие от ускорений,  $\omega_t = \frac{1}{\tau}$ ;  $\omega_M = \frac{k - J_1 \Omega^2}{H}$  — весовые коэффициенты погрешности ДНГ от постоянной времени  $\tau$  гироскопа и от динамической расстройки.

### 3. ДВУХОСНЫЙ ГИРОСТАБИЛИЗАТОР НА ДНГ

Динамически настраиваемый вибрационный гироскоп имеет две оси чувствительности, совпадающие с осями  $\xi$ ,  $\eta$ , поэтому на одном ДНГ может быть построен двухосный индикаторный гиростабилизатор. При построении одноосного гиростабилизатора одна степень свободы оказывается избыточной; по этой оси ДНГ может занимать произвольное положение относительно корпуса, что значительно снижает его точностные характеристики. Поэтому одноосные гиростабилизаторы на ДНГ не нашли применения. Для построения трехосного индикаторного гиростабилизатора необходимы два ДНГ.

Двухосный гиростабилизатор на ДНГ изображен на рис. 3.1. Он содержит платформу 1, на которой установлены объект стабилизации (на рисунке не указан) и ДНГ — 2. Платформа подвешена в двухосном кардановом подвесе. Оси стабилизации 3 и 4 совпадают в начальном положении с осями  $\xi$ ,  $\eta$  чувствительности ДНГ. На осях стабилизации установлены двигатели стабилизации 5 и 8, подключенные к соответствующим датчикам угла ДНГ через регуляторы 6, 7, которые обычно содержат усилители, корректирующие звенья, фильтры.

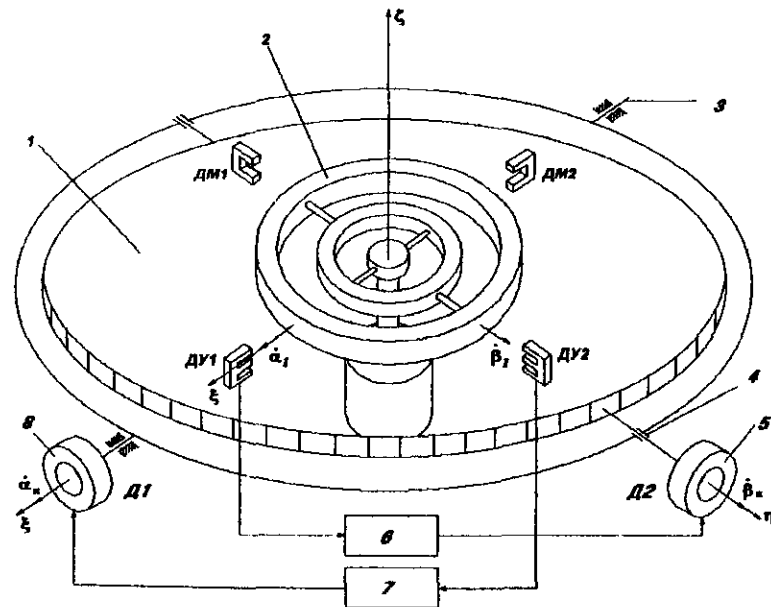


Рис. 3.1. Кинематическая схема гиростабилизатора

### 3.1. Уравнение движения. Структурная схема

Введем правую прямоугольную систему координат  $\xi_0\eta_0\zeta_0$ , связанную с основанием, на котором установлен гиросtabilизатор. Положение платформы гиросtabilизатора, на которой закреплен корпус ДНГ, и связанной с корпусом системы координат  $\xi\eta\zeta$  относительно основания зададим углами  $\alpha_n, \beta_n$  последовательных поворотов трехгранника  $\xi\eta\zeta$  вокруг осей  $\xi_0$  и  $\eta$  (рис. 3.2).

Из сравнения рис. 3.2 и 1.2 следует, что  $\dot{\alpha}_n \cos \beta_n \equiv \omega_\xi$ ;  $\dot{\beta}_n = \omega_\eta$ .

Движение трехгранника хуз, определяющего положение ротора ДНГ относительно связанного с его корпусом трехгранника  $\xi\eta\zeta$ , задано угловыми скоростями  $\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1$  (см. рис. 1.4), проекции которых на оси  $\xi, \eta$  соответственно равны  $\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1 \cos \alpha_1$ . Проекция абсолютной скорости движения трехгранника  $\xi_0\eta_0\zeta_0$  на оси платформы  $\xi, \eta$  обозначим  $\dot{\alpha}_r, \dot{\beta}_r$ . Их величины определяются суммой проекций на эти оси переносной угловой скорости движения корпуса ДНГ, определяемой угловыми скоростями  $\dot{\alpha}_n$  и  $\dot{\beta}_n$ , и относительной скорости, определяемой проекциями  $\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1$ :

$$\dot{\alpha}_r = \dot{\alpha}_n \cos \beta_n + \dot{\alpha}_1; \quad \dot{\beta}_r = \dot{\beta}_n + \dot{\beta}_1 \cos \alpha_1. \quad (3.1)$$

Предполагая малость углов  $\beta_n$  и  $\alpha_1$ , примем

$$\cos \beta_n \approx 1, \quad \cos \alpha_1 \approx 1. \quad (3.2)$$

Тогда из (3.1) получим

$$\dot{\alpha}_r \approx \dot{\alpha}_n + \dot{\alpha}_1, \quad \dot{\beta}_r \approx \dot{\beta}_n + \dot{\beta}_1. \quad (3.3)$$

Уравнения движения платформы гиросtabilизатора составим относительно осей  $\xi$  и  $\eta$  по принципу Даламбера, учитывая инерционные моменты, вызванные вращением платформы с угловыми ускорениями  $\ddot{\alpha}_n, \ddot{\beta}_n$ ,

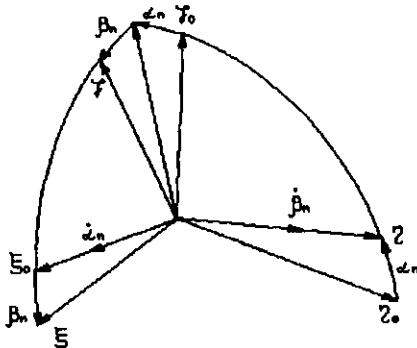


Рис. 3.2. К составлению уравнений движения гиросtabilизатора

демпфирующие моменты, стабилизирующие моменты двигателей и моменты внешних сил:

$$\begin{aligned} J_n \ddot{\alpha}_n + D_n \dot{\alpha}_n + M_\xi^d &= N_\xi^b, \\ J_n \ddot{\beta}_n + D_n \dot{\beta}_n + M_\eta^d &= N_\eta^b. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Каналы стабилизации приняты идентичными, а угол  $\beta_n$  поворота платформы — достаточно малым, чтобы выполнялось первое условие (3.2). Кроме того, опущены за малостью все моменты воздействия ДНГ на платформу стабилизатора.

Обозначения:

$J_n$  — момент инерции платформ относительно осей;

$D_n$  — коэффициент демпфирования, определяемый в основном диссипативными потерями в опорах карданова подвеса, демпфированием в двигателях стабилизации Д1, Д2 и аэродинамическими потерями;

$M_\xi^d, M_\eta^d$  — моменты, создаваемые двигателями Д1, Д2 вокруг осей  $\xi$  и  $\eta$  соответственно;

$N_\xi^b, N_\eta^b$  — моменты внешних сил, приложенные к платформе вокруг осей  $\xi, \eta$ .

Поскольку моменты двигателей  $M_\xi^d$  и  $M_\eta^d$  формируются регуляторами системы стабилизации по углам  $\alpha_1, \beta_1$  рассогласования между ротором ДНГ и платформой, то, очевидно, уравнения движения платформы (3.4) должны быть дополнены уравнениями движения ДНГ.

Будем считать, что все условия, обеспечивающие высокую точность ДНГ как датчика положения, выполнены, т. е. проведена динамическая настройка ( $k_n = 0$ ) и минимизация газодинамических моментов, а точность стабилизации платформы достаточно высока, чтобы считать углы  $\alpha_1, \beta_1$  малыми. Тогда в качестве уравнений движения ДНГ можно воспользоваться выражениями (1.44) с учетом обозначений (1.48), если в них заменить  $\omega_\xi$  и  $\omega_\eta$  на введенные в данном разделе новые обозначения для скорости движения платформы вокруг осей  $\xi$  и  $\eta$  —  $\dot{\alpha}_n$  и  $\dot{\beta}_n$  и добавить ранее опущенные внешние моменты  $M_\xi^b$  и  $M_\eta^b$ :