

УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

М. Терешков, ИУ2-63

А. В. Сенькин, ИУ1

Литература:

Соловников, Плотников, Яковлев. Теория автоматического управления техническими системами. М.: изд-во МГТУ, 1993.

Теория автоматического управления, под ред. Яковлева. М.: ВШ, 2005.

Современные и классические методы теории автоматического управления, в 5 тт. М.: изд-во МГТУ, 2000

www.energy.power.bmstu.ru/mvtu/

З. Северов. Механика цифровых систем. М.: изд-во МАИ, 1996.

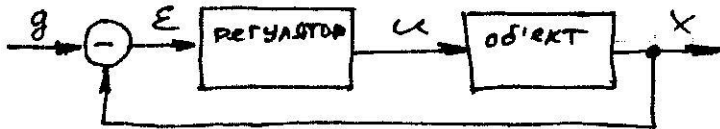
Управляемый объект

и система автоматического регулирования

① САУ без обратной связи (об):



② САУ с ОС:



g - цель управления;
 u - управление;
 x - выходной сигнал;
 ε - ошибка: $\varepsilon = g - x$.

Разделы

Теория автоматического управления (ТАУ)

- ТАУ непрерывных объектов;
- ТАУ дискретно-непрерывных систем;
- ТАУ систем со случайными процессами;
- ТАУ нелинейных систем;
- теория оптимальных САУ;
- теория идентификации;
- теория адаптивных САУ.

Рассматриваются задачи анализа (исследования существующих систем) и синтеза (проектирование систем).

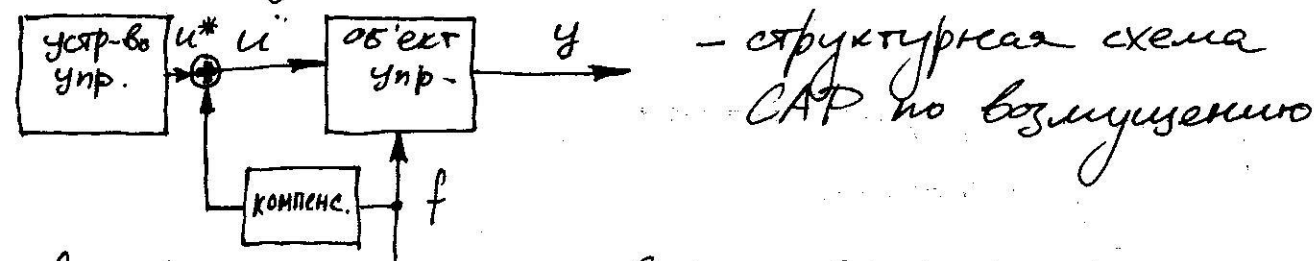
При их решении требуется исследовать:

- устойчивость;

- точность;
- время переходного процесса.

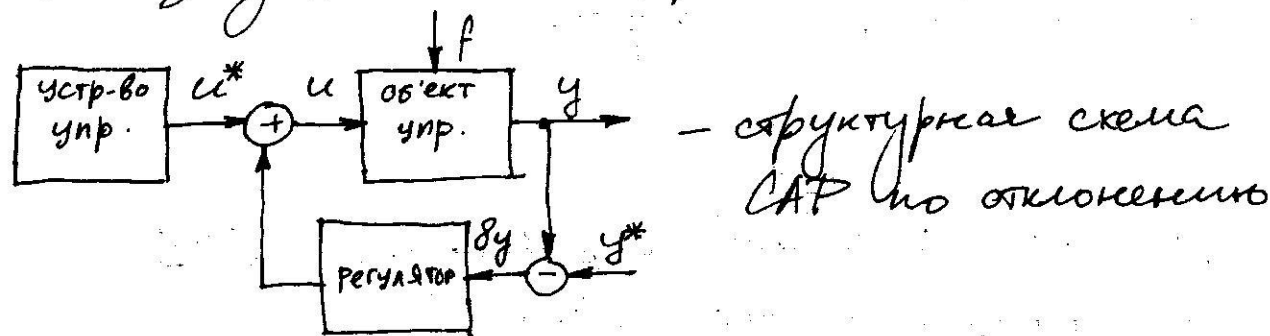
Информационные аспекты управления

- цели управления;
- возмущающие воздействия;
- з-н управления

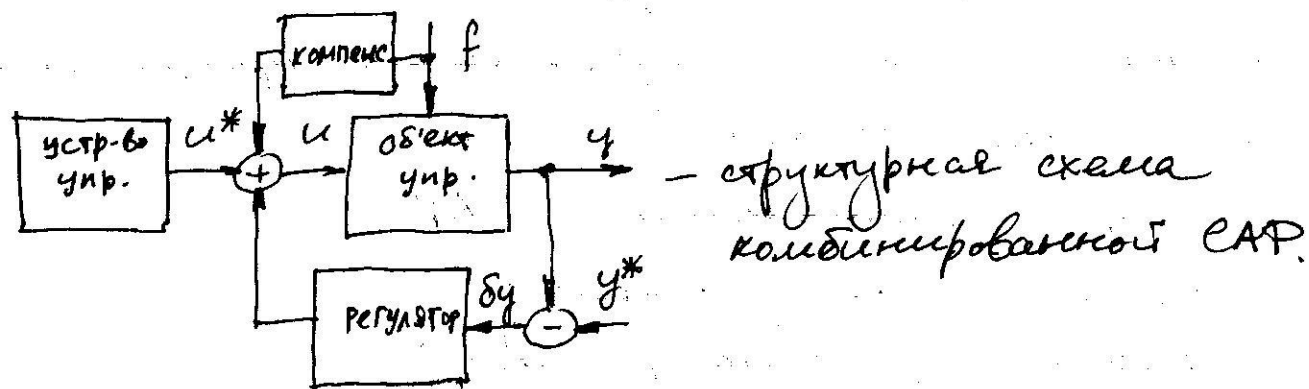


- структурная схема САУ по возмущению

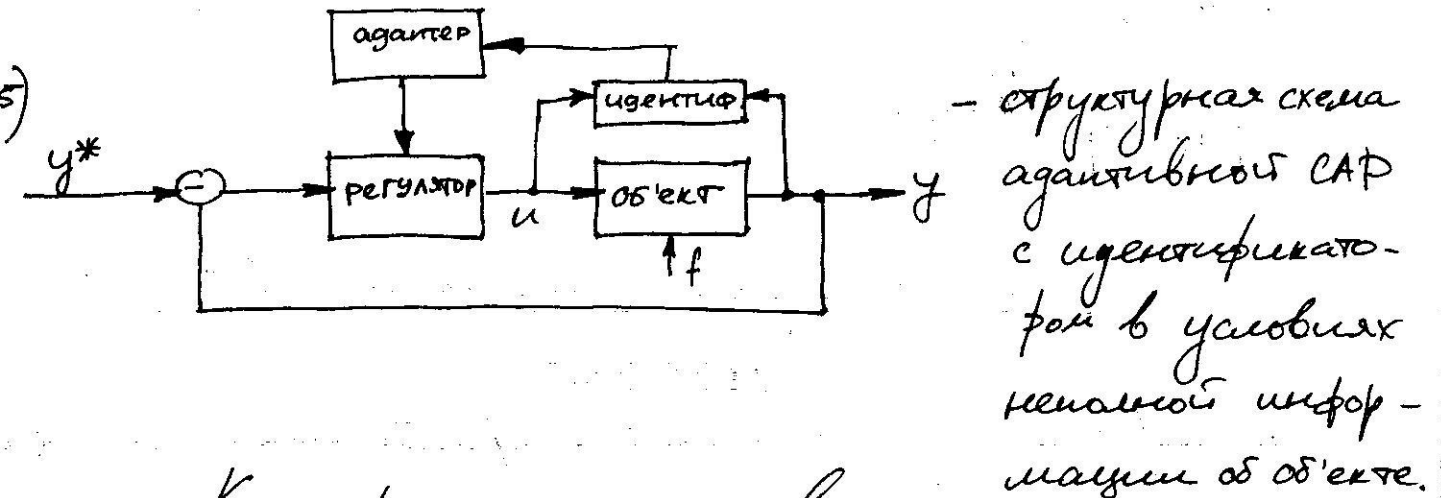
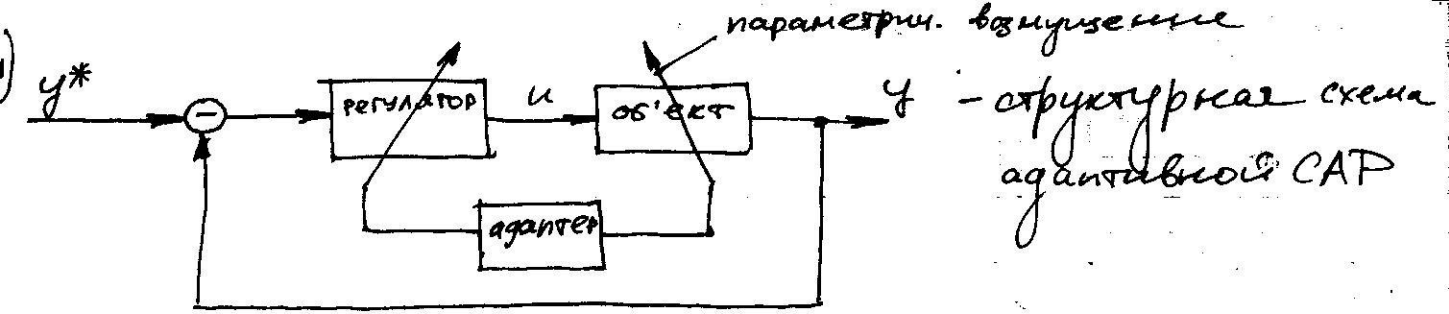
f - возмущающее воздействие



- структурная схема САУ по отклонению



- структурная схема комбинированной САУ.



Классификация законов управления

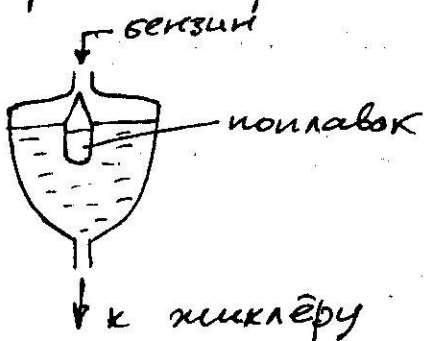
- системы автоматич. стабилизации: $y^* = const$;
- системы программного управления: $y^* = f(t)$;
- следящие системы: $y^* = var$, закон неизвестен.

Классификация по виду энергии

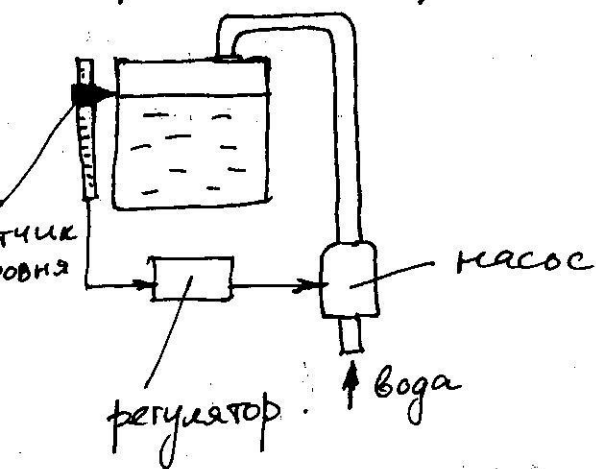
- электрические САУ;
- гидравлические САУ;
- пневматические САУ;
- механические САУ;
- оптические САУ.

Классификация регуляторов

- прямого действия:



непрямое действия:



Математическое описание САУ.

Гипотезы:

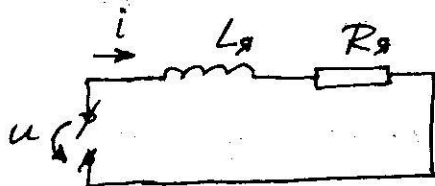
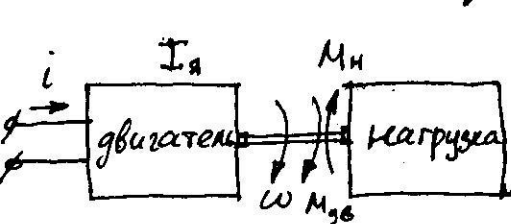
- детектирование сигналов: приёмник не влияет на источник;
- подобие явлений в природе.

Математический аппарат

- ДУ n-го порядка ("вход-выход");
- системы ДУ в форме Коши;
- интегральные уравнения;
- разностные уравнения;
- ДУ в частных производных.

Системы типа "вход-выход".

(на примере двигателя постоянного тока)



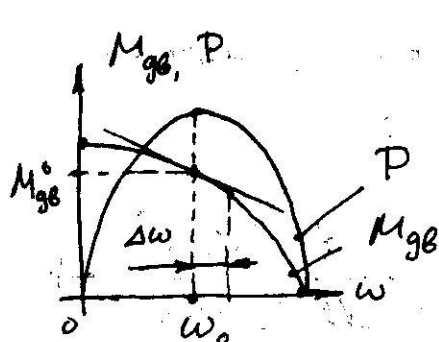
Механическая с-ма:

$$I_{я} \frac{d\omega}{dt} = M_{сб} - M_{н};$$

Электрическая с-ма:

$$L_{я} \frac{di}{dt} + R_{я} i = u - e_s.$$

Заметим, что $M_{сб} = M_{сб}(\omega, i)$; $e_s = e_s(i)$



Работа в фаз теңора,
имеем:

$$M_{gb} = M_{gb}^0 + \left. \frac{\partial M_{gb}}{\partial \omega} \right|_{(\omega_0, i_0)} \cdot \Delta \omega + \left. \frac{\partial M_{gb}}{\partial i} \right|_{(\omega_0, i_0)} \Delta i + \varepsilon$$

В установившемся режиме

$$\omega = \text{const}; \quad i = \text{const}; \quad \varepsilon_s = 0;$$

$$\begin{cases} 0 = M_{gb}^0 - M_H, \\ R_a i = u \end{cases} \quad (*)$$

Обозначим: $c_m = - \left. \frac{\partial M_{gb}}{\partial \omega} \right|_{(\omega_0, i_0)}$; $c_e = \left. \frac{\partial M_{gb}}{\partial i} \right|_{(\omega_0, i_0)}$

Получим:

$$\begin{cases} I_a \frac{d\omega}{dt} = M_{gb}^0 - c_m \Delta \omega + c_e \Delta i - M_H, \\ L_a \frac{di}{dt} + R_a i_0 + R_a \Delta i = u + \Delta u \end{cases} \quad (**)$$

или, вычитая (*) из (**),

$$\begin{cases} I_a \frac{d\omega}{dt} = -c_m \Delta \omega + c_e \Delta i, \\ L_a \frac{di}{dt} + R_a \Delta i = \Delta u, \end{cases}$$

откуда

$$\Delta i = \frac{I_a \frac{d\omega}{dt} + c_m \Delta \omega}{c_e};$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{I_a \frac{d^2 \omega}{dt^2} + c_m \frac{d\omega}{dt}}{c_e};$$

$$\frac{L_a I_a}{c_e} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \left(\frac{R_a I_a}{c_e} + \frac{L_a c_m}{c_e} \right) \frac{d\omega}{dt} + \frac{R_a c_m}{c_e} \Delta \omega = \Delta u$$

Далее ур-е приводится к безразмерной форме делением на $\frac{R_{\text{я}} C_{\text{м}} \omega_0}{C_e}$:

$$\frac{L_{\text{я}} I_{\text{я}}}{R_{\text{я}} C_{\text{м}}} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\Delta \omega}{\omega_0} \right) + \left(\frac{I_{\text{я}}}{C_{\text{м}}} + \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta \omega}{\omega_0} \right) + \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{C_e U_0}{R_{\text{я}} C_{\text{м}} \omega_0} \cdot \left(\frac{\Delta u}{U_0} \right)$$

Проверим размерность коэффициентов;

$$\left[\frac{L_{\text{я}} I_{\text{я}}}{R_{\text{я}} C_{\text{м}}} \right] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{Ом} \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{А} \cdot \text{Ом}} \cdot \text{с}^2 = \text{с}^2;$$

$$\left[\frac{I_{\text{я}}}{C_{\text{м}}} \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \text{с};$$

$$\left[\frac{C_e U_0}{R_{\text{я}} C_{\text{м}} \omega_0} \right] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{с}}{\text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2} = 1.$$

Обозначим:

$$T = \sqrt{\frac{L_{\text{я}} I_{\text{я}}}{R_{\text{я}} C_{\text{м}}}} \quad \text{— постоянная времени};$$

$$\xi = \frac{1}{2T} \left(\frac{I_{\text{я}}}{C_{\text{м}}} + \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}} \right) \quad \text{— коэфф. демпфирования};$$

$$K = \frac{C_e U_0}{R_{\text{я}} C_{\text{м}} \omega_0} \quad \text{— коэфф. усиления};$$

$$x = \frac{\Delta \omega}{\omega_0}; \quad u = \frac{\Delta u}{U_0}$$

Получим каноническое уравнение системы типа "вход-выход":

$$T^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx}{dt} + x = K u.$$

В общем случае

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x =$$
$$= b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u, \quad (***)$$

$$x^{(i)}(0) = x_0^{(i)}; \quad i = 0; 1; \dots; n-1.$$

Системы ДУ в форме Коши

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m); \quad i = 1; 2; \dots; n.$$

В случае линейной с-мы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j; \quad i = 1; 2; \dots; n.$$

Введем вектор состояния

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

вектор управления

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix},$$

вектор наблюдаемых переменных

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}.$$

Тогда можно записать:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{u}; \\ \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}, \end{cases}$$

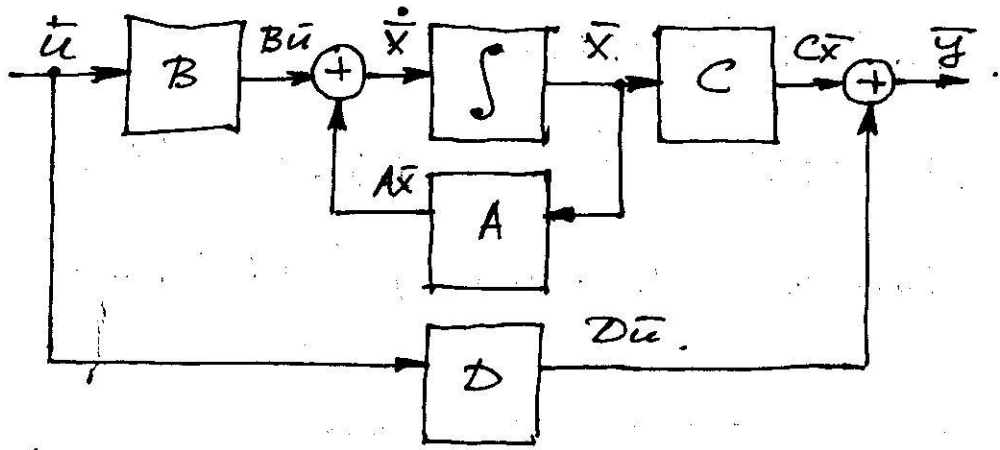
где

A — матрица объекта;

B — матрица управления;

C - матрица измерений;
 D - матрица прямой передачи по входу.

Это отвечает структурной схеме



Напр., для двигателя постоянного тока

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\omega/\omega_0 \\ \Delta\dot{\omega}/\omega_0 \end{bmatrix}; \quad \bar{u} = \frac{\Delta u}{\omega_0}; \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} \Delta\omega \\ \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

и тогда

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{2\xi}{T} x_2 - \frac{1}{T^2} x_1 + \frac{K}{T^2} u \end{cases}$$

или, если положить

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T^2} & -\frac{2\xi}{T} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T^2} \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]; \quad D = 0,$$

то

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{u}; \\ \bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}. \end{cases}$$

В выборе вектора состояния есть свобода произв. Напр., при $L_1 \approx 0$ удобно взять

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \Delta\varphi/\varphi_0 \\ \Delta\omega/\omega_0 \end{bmatrix}; \quad \bar{u} = \frac{\Delta u}{u_0}; \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\omega/\omega_0 \end{bmatrix}$$

и записать

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{T^*} x_2 + \frac{K^*}{T^*} u, \end{cases}$$

т.е.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T^*} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K^*}{T^*} \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 1]; \quad D = 0$$

Частотные х-ки САП.



Пусть САП линейна; $u(t) = U \cos \omega t$.

По формуле Эйлера $u(t) = \frac{U}{2} e^{j\omega t} + \frac{U}{2} e^{-j\omega t}$

Поэтому $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, где

$x_1(t)$ — реакция на $u_1(t) = \frac{U}{2} e^{j\omega t}$;

$x_2(t)$ — реакция на $u_2(t) = \frac{U}{2} e^{-j\omega t}$.

Зная, что $\frac{du_1}{dt} = \frac{U}{2} j\omega e^{j\omega t}$, ..., $\frac{d^m u_1}{dt^m} = \frac{U}{2} (j\omega)^m e^{j\omega t}$

и что $x_1(t) = W(j\omega) \cdot u_1(t)$, перенесем (***) в виде

$$\begin{aligned} [a_n \cdot (j\omega)^n + \dots + a_1 \cdot j\omega + a_0] \cdot W(j\omega) = \\ = b_m \cdot (j\omega)^m + \dots + b_1 \cdot j\omega + b_0, \end{aligned}$$

откуда

$$W(j\omega) = \frac{b_m \cdot (j\omega)^m + \dots + b_1 \cdot j\omega + b_0}{a_n \cdot (j\omega)^n + \dots + a_1 \cdot j\omega + a_0} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}$$

Ф-ция $W(j\omega)$ наз. амплитудно-фазовой частотной х-кой. Её можно представить в виде

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\omega)}$$

или

$$W(j\omega) = U(\omega) + j \cdot V(\omega), \text{ где}$$

$A(\omega)$ - амплитудно-частотная х-ка (АЧХ),

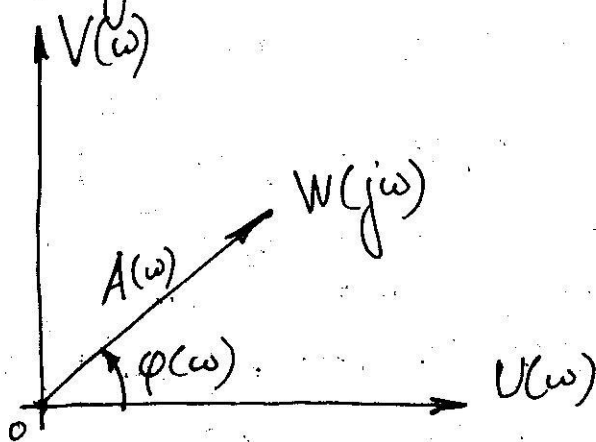
$\varphi(\omega)$ - фазо-частотная х-ка (ФЧХ),

$U(\omega)$ - действ. частотная х-ка (действ. ЧХ)

$V(\omega)$ - мнимая частотная х-ка (мнимая ЧХ)

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)};$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$



Так мы перейдем от дифф. к алгебраическому уравнению.

Введем действ. и мнимую части $\underline{A}(j\omega)$ и $\underline{B}(j\omega)$

$$\underline{A}(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega);$$

$$\underline{B}(j\omega) = \gamma(\omega) + j\delta(\omega), \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= b_0 + b_2(j\omega)^2 + b_4(j\omega)^4 + \dots = \\ &= b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= \frac{1}{j} (b_1(j\omega) + b_3(j\omega)^3 + \dots) = \\ &= b_1\omega - b_3\omega^3 + \dots; \end{aligned}$$

$$\gamma(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots;$$

$$\delta(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + \dots$$

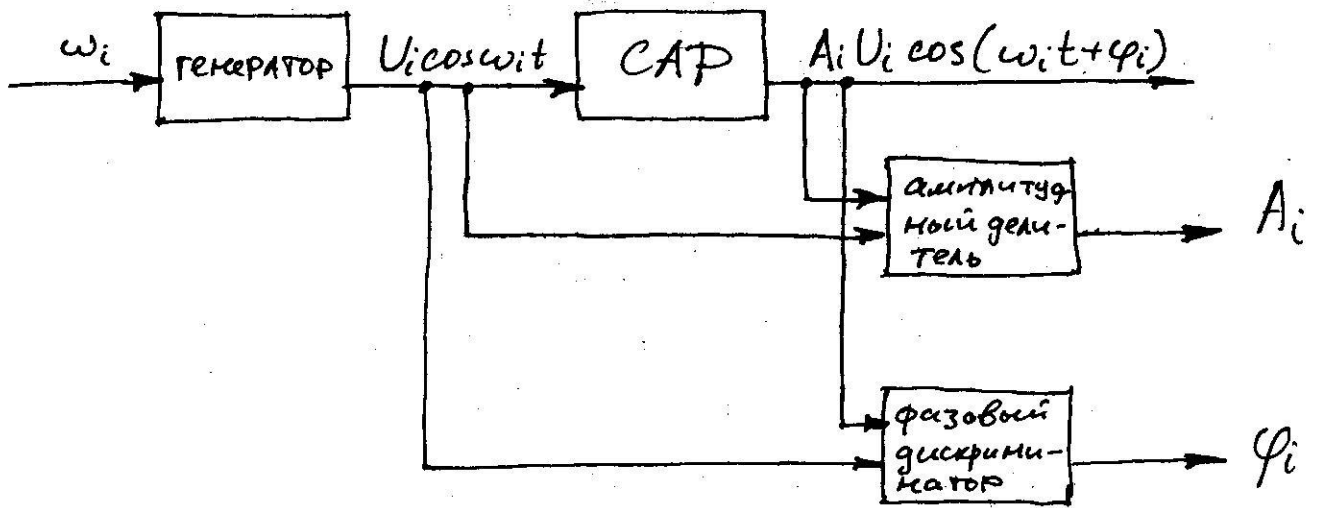
$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{\alpha + j\beta}{\gamma + j\delta} \cdot \frac{\gamma - j\delta}{\gamma - j\delta} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + j(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma^2 + \delta^2} = \\ &= \underbrace{\frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2}}_{U(\omega)} + j \underbrace{\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}}_{V(\omega)} \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений

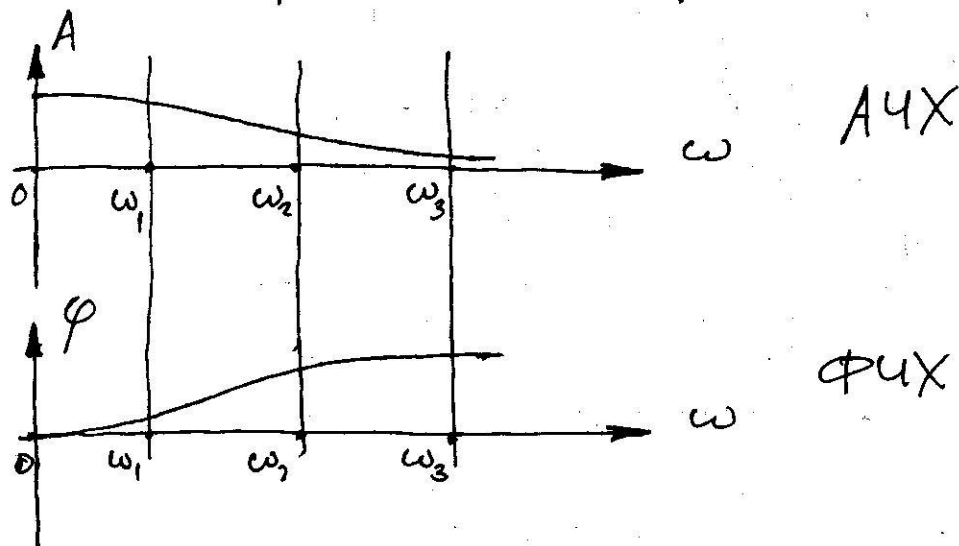
$$x(t) = A(\omega) \cdot U \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega)),$$

т.к. и при $u(t) = U \cos \omega t$

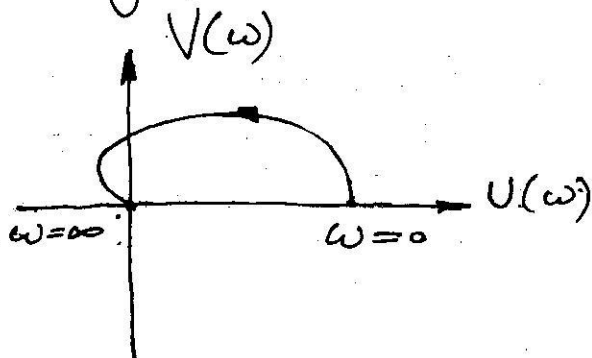
$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = W(j\omega) \cdot \frac{U}{2} e^{j\omega t} + W(-j\omega) \cdot \frac{U}{2} e^{-j\omega t} = \\ &= A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \cdot \frac{U}{2} e^{j\omega t} + A(\omega) \cdot e^{-j\varphi(\omega)} \cdot \frac{U}{2} e^{-j\omega t} = \\ &= A(\omega) U \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} + e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2} \right] = \\ &= A(\omega) \cdot U \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \end{aligned}$$



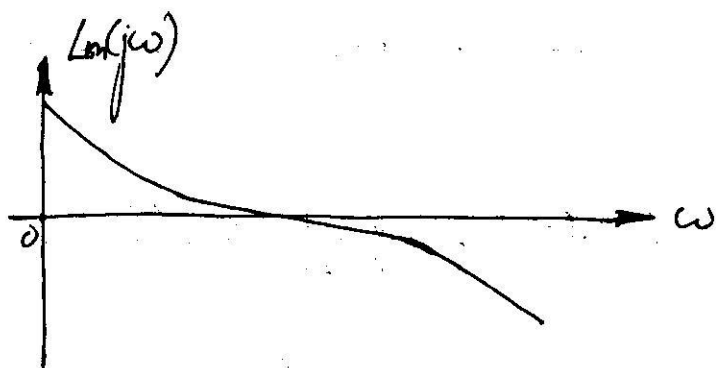
Задавая различные значения $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots$, получим на выходе значения $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots$ и построим графики; напр.:



и годограф:



Положим $L_m(j\omega) = 20 \lg A(\omega)$ и построим логарифмическую АЧХ (ЛАЧХ); к-рью легко аппроксимировать ломаной:



Передающие f-ции САП

Введем преобразование Фурье

$$F(x(t)) = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt - \text{прямое};$$

$$F^{-1}(X(j\omega)) = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega - \text{обратное}$$

Это экв. частным случаем преобразования Лапласа, если положить $s = j\omega$ (т.е. $\text{Re } s = 0$) с точностью до множителя

Св-ва преобразования Лапласа

① При $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ имеем:

$$X(s) = aX_1(s) + bX_2(s).$$

② $\frac{d^n x}{dt^n} \doteq s^n X(s) + X_{\text{нач}}(s);$

③ $\int_0^t \dots \int_0^t x(t) dt^n \doteq \frac{1}{s^n} X(s);$

④ $x(t-\tau) \doteq e^{-s\tau} X(s).$

Передающая f-ция САП есть

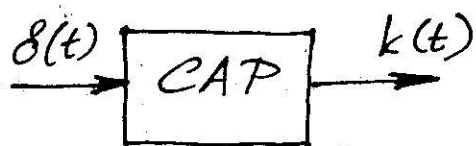
$$W(s) = \frac{X(s)}{U(s)}.$$

Справедливы Δ в начальном и конечном значениях:

$$x(0) \doteq \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s); \quad x(\infty) \doteq \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

Временные х-ки САУ

Импульсная переходная ф-ция
есть реакция САУ на представленное ф-цией Дирак воздействие $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$



Тогда реакция на произвольное воздействие $u(t)$ есть

$$x(t) = \int_0^t k(t-\tau) u(\tau) d\tau.$$

Кроме того, $k(t) \doteq W(s)$.

Переходная ф-ция

есть реакция САУ на представленное единичной ф-цией воздействие

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



Поскольку $\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t)$, то $k(t) = \frac{d}{dt} h(t)$.

Ввиду САУ предполагается линейной.

Если ввести оператор $p = \frac{d}{dt}$ и по i -ю степень $p^i = \frac{d^i}{dt^i}$, то ур-е типа "вход-выход" можно переписать в операторной форме

$$A(p)x(t) = B(p)u(t), \text{ где}$$

A, B - полиномы от p :

$$A(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i; \quad B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i.$$

Тогда $\frac{x(t)}{u(t)} = \frac{B(p)}{A(p)} = W(p)$

Т.о., формально переменную s можно заменить оператором p в правой части оригинала

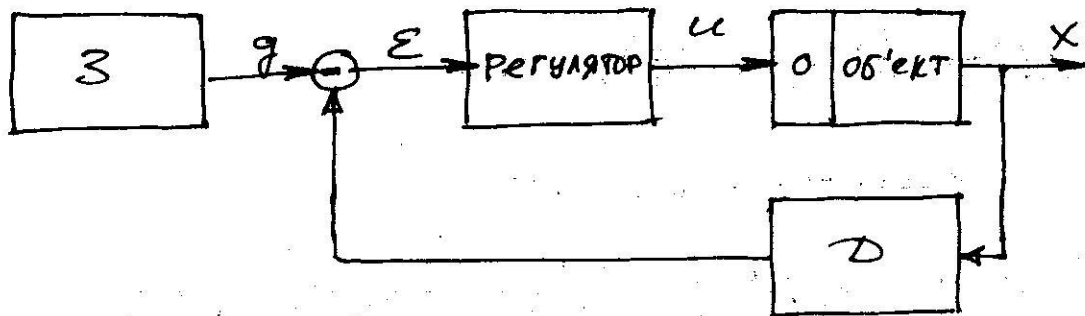
Переход от с-мог ДУ типа Коши к ДУ типа "вход-выход" позволяет соотношение

$$W(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B, \text{ если под "входом" понимать } u_1(t), \text{ под "выходом" } y_1(t).$$

Элементы САУ

- датчики (D);
- исполнительные органы (O);
- корректирующие устройства (регуляторы);
- объекты регулирования;
- задатчики (З);
- эл-т сравнения (компаратор)

Устойчивость САУ



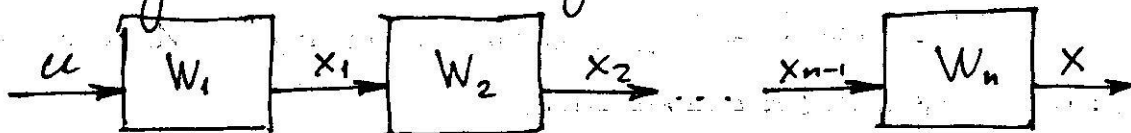
нужно привести к эквивалентной



Структурное преобразование моделей САУ

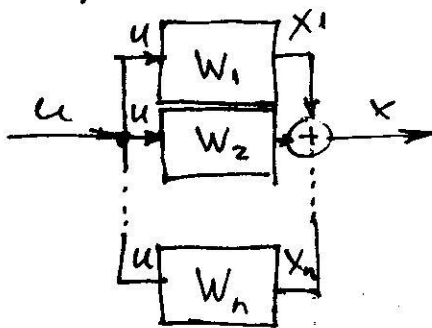
Типовые схемы:

1) последовательное соединение:

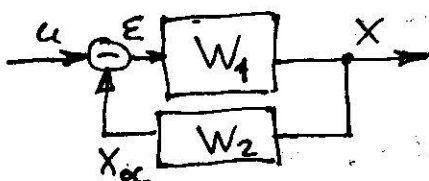


$$W_i = W_i(s)$$

2) параллельное соединение



3) обратная связь



$$1) \Phi(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{X_{n-1}(s)}{U(s)} \cdot W_n(s) = \\ = \frac{X_{n-2}(s)}{U(s)} \cdot W_{n-1}(s) \cdot W_n(s) = \\ = \dots = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot \dots \cdot W_n(s).$$

$$2) X(s) = X_1(s) + \dots + X_n(s) = W_1(s) \cdot U(s) + \dots \\ + W_n(s) \cdot U(s) = [W_1(s) + \dots + W_n(s)] \cdot U(s); \\ \Phi(s) = W_1(s) + \dots + W_n(s).$$

$$3) \begin{cases} W_1(s) \cdot \varepsilon(s) = X(s); & W_2(s) \cdot X(s) = X_{oc}(s) \\ \varepsilon(s) = U(s) - X_{oc}(s); \end{cases}$$

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s)} \text{ или}$$

отрицательной обратной связи. В случае положительной обратной связи знак "+" меняется на "-".

Типовые передаточные функции

$$\Phi(s) = \frac{B(s)}{A(s)}; \quad X(s) = \frac{B_x(s)}{A_x(s)}; \quad U(s) = \frac{B_u(s)}{A_u(s)}$$

$$X(s) = \Phi(s) \cdot U(s);$$

$$\begin{cases} A_x(s) = A(s) \cdot A_u(s); \\ B_x(s) = B(s) \cdot B_u(s). \end{cases}$$

По теореме вычетов $x(t) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Res} \left[X(s) \cdot e^{st} \right]$, где s_i — корни многочлена $A_x(s)$, т.е.

$$A_x(s) = (s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_k), \text{ где } k \text{ — сумма порядков левой и правой частей (****)}$$

Если корни действительные различ-
ные, то можно записать

$$x(t) = \sum_{i=1}^k c_i e^{s_i t}, \text{ где } c_i = \frac{B_x(s_i)}{A'_x(s_i)}$$

(формула Хевисайда)

Пусть $u(t) = 1(t)$. Тогда $U(s) = \frac{1}{s}$;

$$x(t) = \frac{B_x(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{B(s_i)}{s_i A'(s_i)} e^{s_i t}$$

Рассмотрим генератор пост. тока.
Возможны 2 его модели:

1) $T \frac{dx}{dt} + x = k \cdot 1(t)$, если принять $x = \frac{\Delta \omega}{\omega_0}$;

2) $T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k \cdot 1(t)$, если принять $x = \frac{\Delta \varphi}{\varphi_0}$.

1) $W(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k}{Ts + 1} = \frac{k/T}{s + \frac{1}{T}}$;

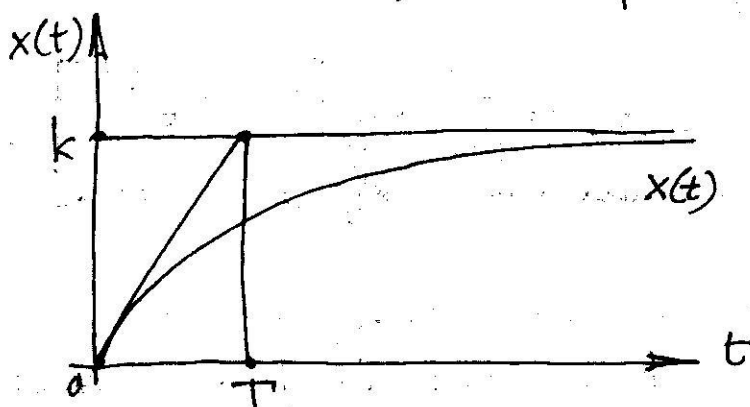
$$s_1 = -\frac{1}{T};$$

$$U(s) = \frac{1}{s};$$

$$X(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{k/T}{s(s + \frac{1}{T})}$$

$$x(t) = \frac{B_x(0)}{A(0)} + \frac{B(-1/T)}{\frac{1}{T} \frac{d}{ds} (s + \frac{1}{T}) \Big|_{s=-1/T}} \cdot e^{-t/T} =$$

$$= \frac{k/T}{1/T} + \frac{k/T}{-\frac{1}{T} \cdot 1} e^{-t/T} = k(1 - e^{-t/T})$$



$$2) \quad W(s) = \frac{k/T}{s(s+1/T)}$$

$$s_1 = 0; \quad s_2 = -1/T$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$X(s) = W(s) \cdot U(s) = \frac{k/T}{s^2(s+1/T)}$$

даже численные метод нахождения коэффициентов:

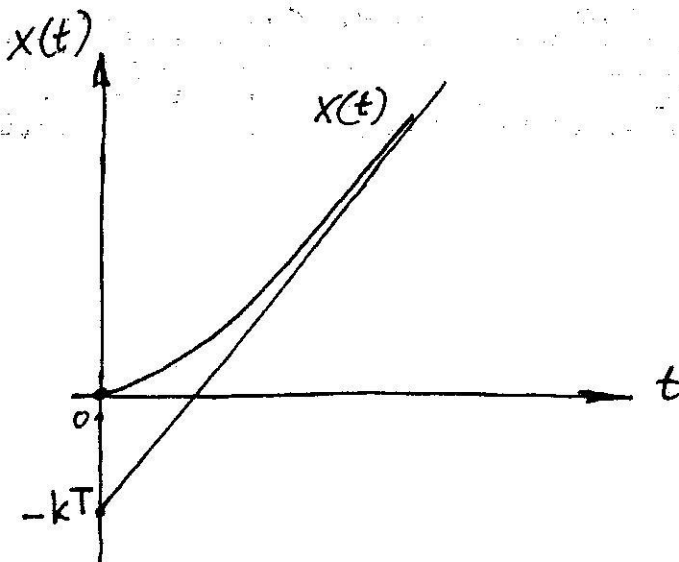
$$X(s) = \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3}{s+1/T}$$

$$= \frac{A_1 s + A_1 \cdot \frac{1}{T} + A_2 s^2 + A_2 s \cdot \frac{1}{T} + A_3 s^2}{s^2(s+1/T)}$$

$$\begin{cases} k/T = \frac{A_1}{T}; \\ 0 = A_1 + A_2/T; \\ 0 = A_2 + A_3 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = k; \\ A_2 = -kT; \\ A_3 = kT; \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{k}{s^2} - \frac{kT}{s} + \frac{kT}{s+1/T}$$

$$x(t) = k(t - T + T e^{-t/T})$$



$$W(s) = \frac{b_m (s - \bar{s}_1) \dots (s - \bar{s}_m)}{a_n (s - s_1) \dots (s - s_n)}$$

Множители преобразуются в зависимость от вида корней:

$$\begin{aligned} 1) \quad s_i = 0; \quad (s - s_i)^{\nu} &= s^{\nu}; \\ 2) \quad s_i = -\alpha_i; \quad (s - s_i) &= (s + \alpha_i) = \alpha_i (T_i s + 1); \quad T_i = \frac{1}{\alpha_i} \\ 3) \quad s_{i+1} = -\alpha_i \pm j\beta_i; \quad (s - s_i)(s - s_{i+1}) &= (s + \alpha_i - j\beta_i) \cdot \\ &\quad \cdot (s + \alpha_i + j\beta_i) = (s + \alpha_i)^2 + \beta_i^2 = \\ &= s^2 + 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2 = \\ &= (\alpha_i^2 + \beta_i^2) (T_i^2 s^2 + 2\xi_i T_i s + 1); \\ &\quad T_i^2 = \frac{1}{\alpha_i^2 + \beta_i^2}; \quad 2\xi_i T_i = \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \end{aligned}$$

Положим $k = \alpha_1 \alpha_2 \dots$ где выраж. 2) и $k = (\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots$

Тогда передаточную функцию можно записать в виде

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{s^{\nu_1}}{s^{\nu_2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{P_1} (\bar{T}_i s + 1)}{\prod_{i=1}^{P_2} (T_i s + 1)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{Q_1} (\bar{T}_i^2 s^2 + 2\xi_i \bar{T}_i s + 1)}{\prod_{i=1}^{Q_2} (T_i^2 s^2 + 2\xi_i T_i s + 1)} \\ &= \frac{k_1 / k_2}{s^{\nu_2 - \nu_1}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{P_1} (\bar{T}_i s + 1) \cdot \prod_{i=1}^{Q_1} (\bar{T}_i^2 s^2 + 2\xi_i \bar{T}_i s + 1)}{\prod_{i=1}^{P_2} (T_i s + 1) \cdot \prod_{i=1}^{Q_2} (T_i^2 s^2 + 2\xi_i T_i s + 1)} \end{aligned}$$

Типовые звенья САП

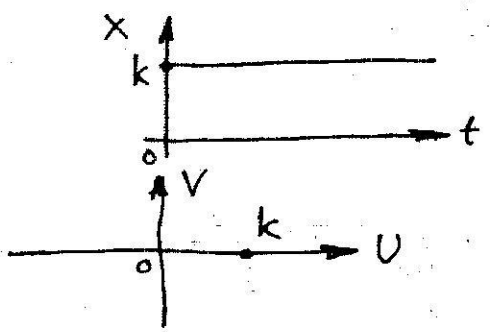
- усилительное: $W(s) = k$;
- апериодическое: $W(s) = \frac{k}{Ts+1}$;
- колебательное: $W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}$;
- интегрирующее: $W(s) = \frac{k}{s}$;
- дифференцирующее:
 - 1-го порядка: $W(s) = Ts+1$;
 - 2-го порядка: $W(s) = T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1$;
 - идеальное: $W(s) = \tau s$;
- звено чистого запаздывания: $W(s) = e^{-\tau s}$.

Усилительное звено

$$W(s) = k;$$

$$x(t) = ku(t).$$

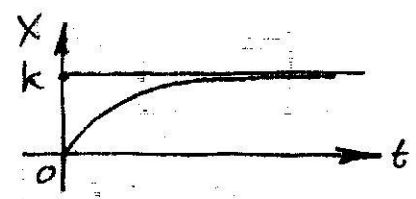
$$W(j\omega) = k.$$



Апериодическое звено:

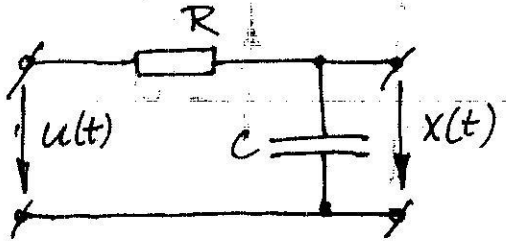
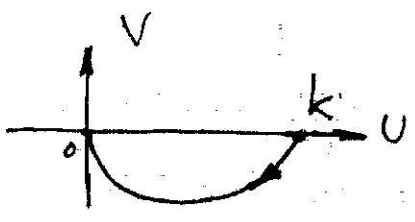
$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

$$T \frac{dx}{dt} + x = ku;$$



$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1} =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} \cdot e^{-j \arctan \omega T}$$



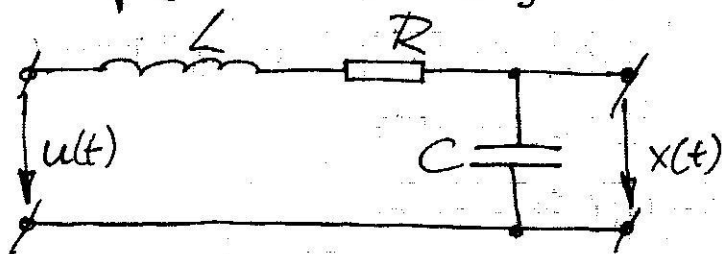
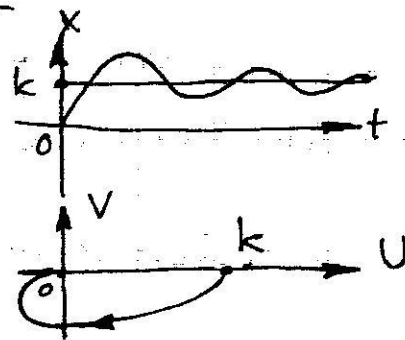
Колебательное звено

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$$

$$T^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dx}{dt} + x = ku;$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{-\omega^2 T^2 + j \cdot 2\zeta T \omega + 1}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T \omega)^2}} e^{-j \arctg \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}}$$

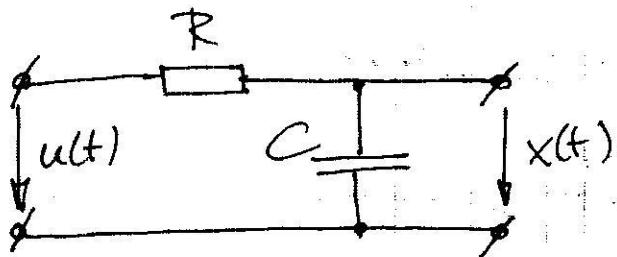
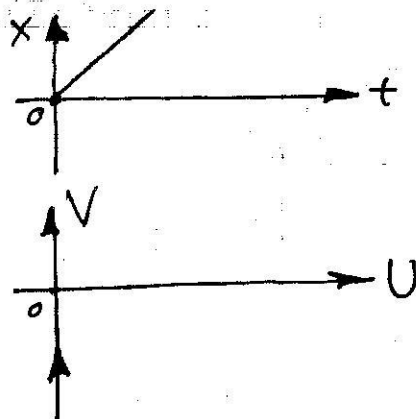


Утегряющее звено

$$W(s) = \frac{k}{s};$$

$$\frac{dx}{dt} = ku;$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}$$

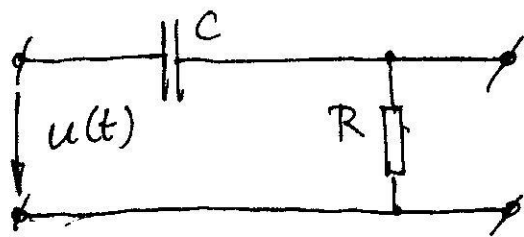
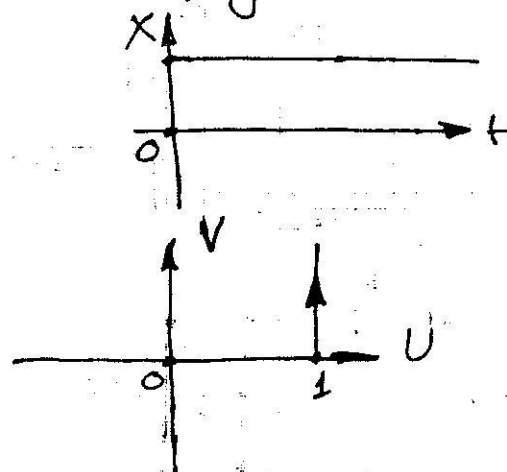


Дифференциальное звено 1-го порядка

$$W(s) = Ts + 1$$

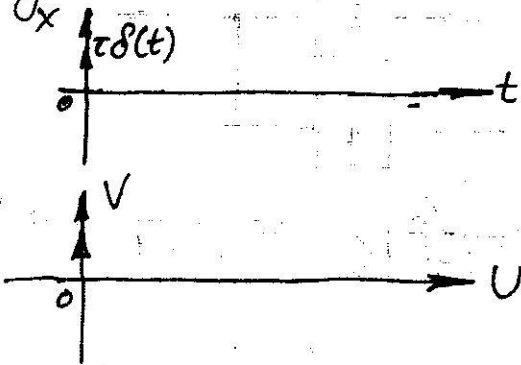
$$x(t) = T \frac{du}{dt} + u(t);$$

$$W(j\omega) = j\omega T + 1 = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} e^{j \arctg \omega T}$$



Угловое дифф. звено

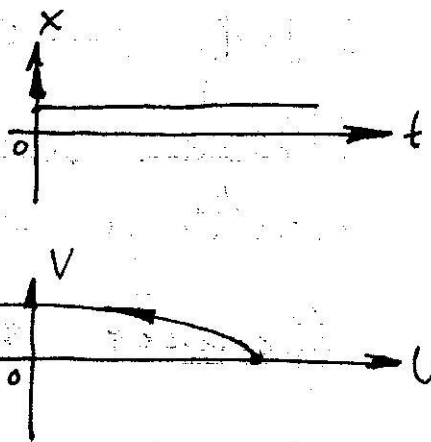
$W(s) = \tau s$;
 $x(t) = \tau \frac{du}{dt}$;



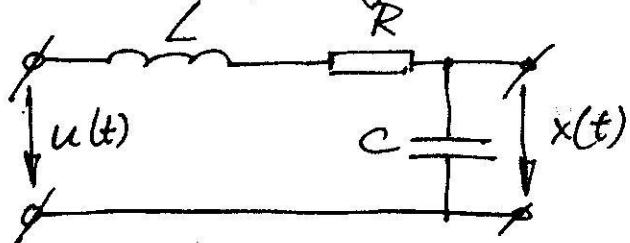
$W(j\omega) = j\omega\tau$
 Тахогенератор

Дифф. звено 2-го порядка

$W(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$;
 $x(t) = T^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\zeta T \frac{du}{dt} + u$.

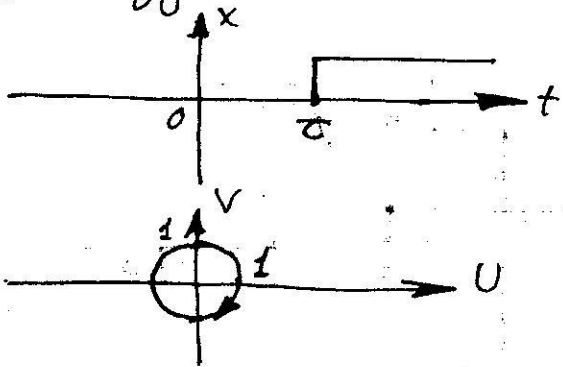


$W(j\omega) = T^2 (j\omega)^2 + 2\zeta T j\omega + 1 =$
 $= \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T \omega)^2}$
 $e^{j \arctg \frac{2\zeta T \omega}{1 - \omega^2 T^2}}$

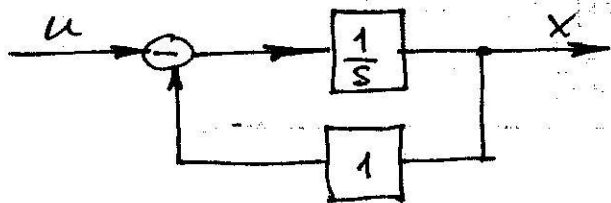


Звено чистого запаздывания

$W(s) = e^{-\tau s}$
 $x(t) = u(t - \tau)$
 $W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$



Любое звено можно представить комбинацией интегрирующих и усилительных звеньев. Например; для апериодического звена эквивалентная схема имеет вид



$$\Phi(s) = \frac{1/s}{1 + 1/s} = \frac{1}{s+1} = W_{\text{анепривог.}}(s)$$

Логарифмические x-ки

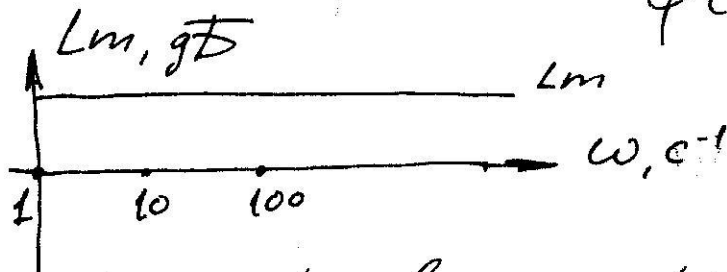
$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega)$$

Введем лог. амплитудно-фазовую x-ку

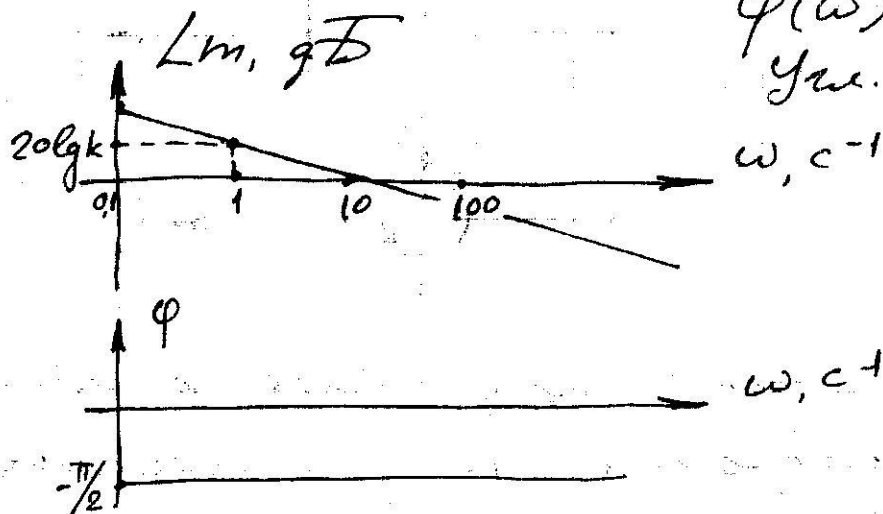
$$L_m W(j\omega) = L |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega)$$

Усилит. звено : $L_m W(j\omega) = 20 \lg k$;
 $\varphi(\omega) = 0$



Индукт. звено : $L_m W(j\omega) = 20 \lg \frac{k}{\omega} =$
 $= 20 \lg k - 20 \lg \omega$;
 $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

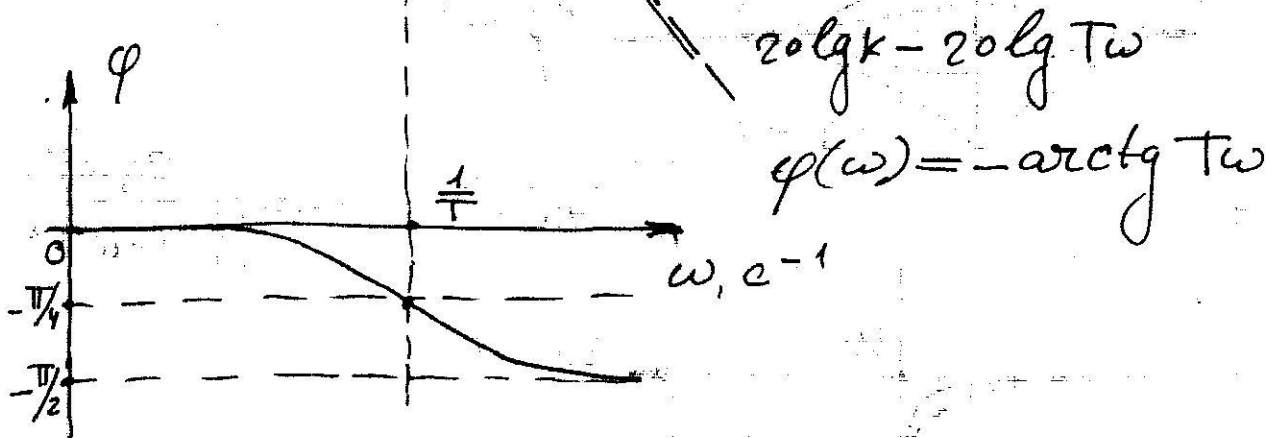
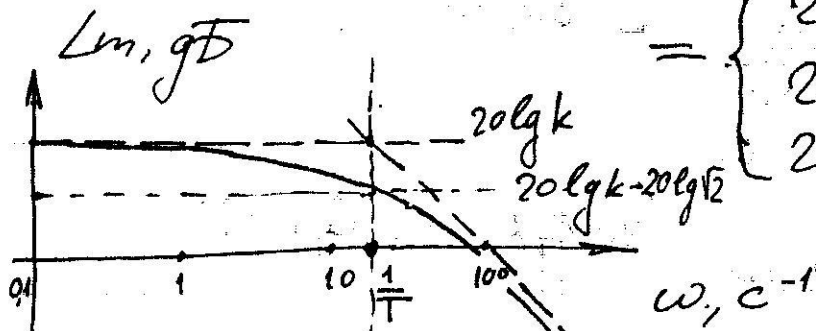
Укл. коэфф. $-20 \frac{\text{гДБ}}{\text{дек}}$



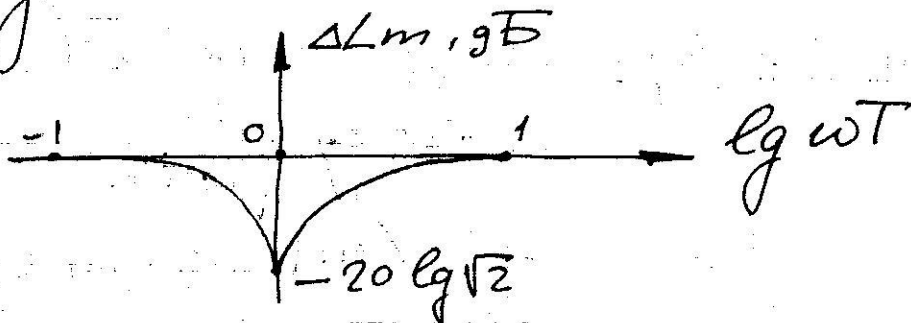
Анерпагор зверо : $L_m(j\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} =$

$$= 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{T^2\omega^2+1} =$$

$$= \begin{cases} 20 \lg k, & T\omega \ll 1; \\ 20 \lg k - 20 \lg T\omega, & T\omega \gg 1; \\ 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{2}, & T\omega = 1 \end{cases}$$

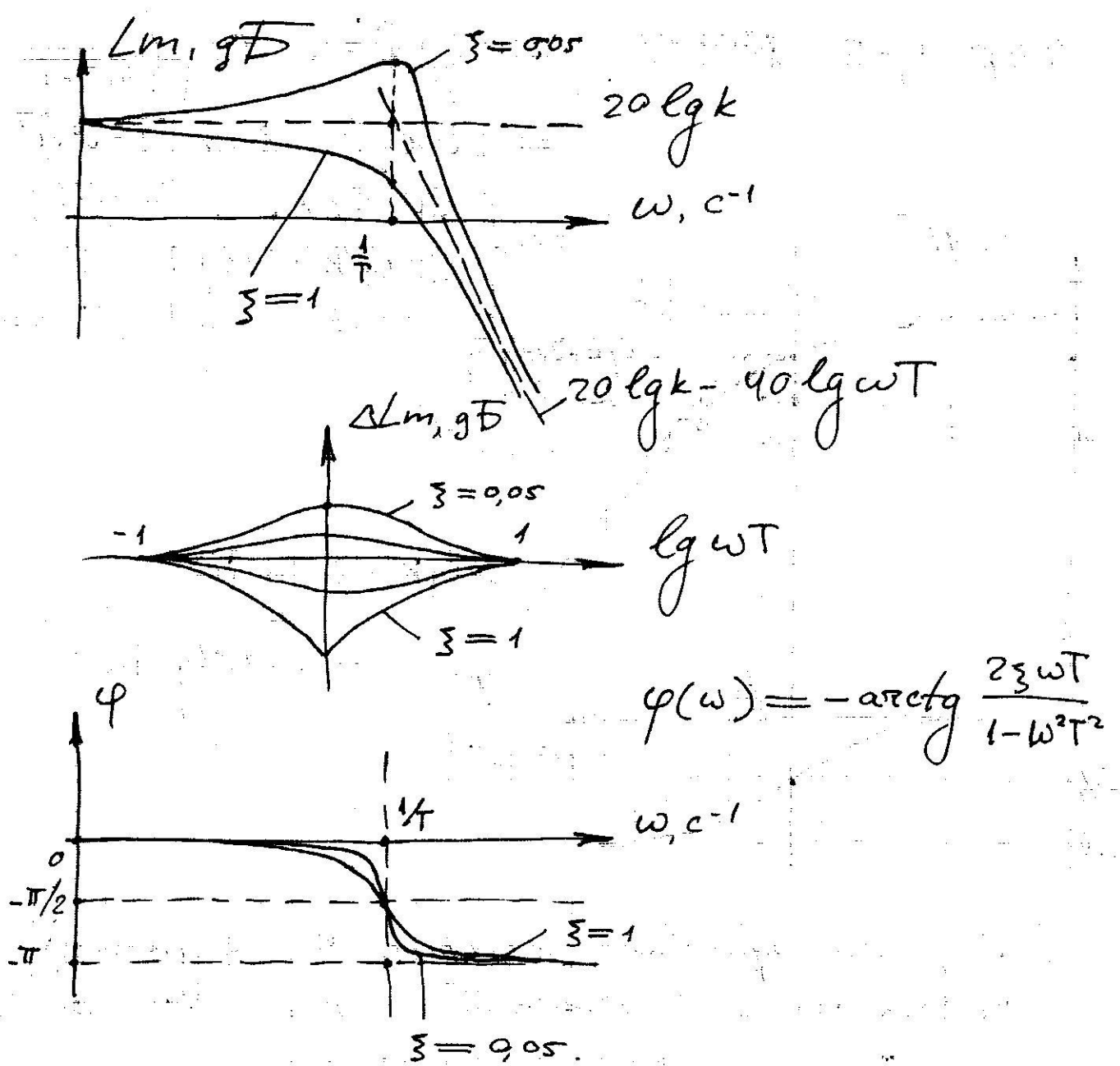


Вводится кривая поправок, задающая отклонение фазы от об'единенных асимптотических:



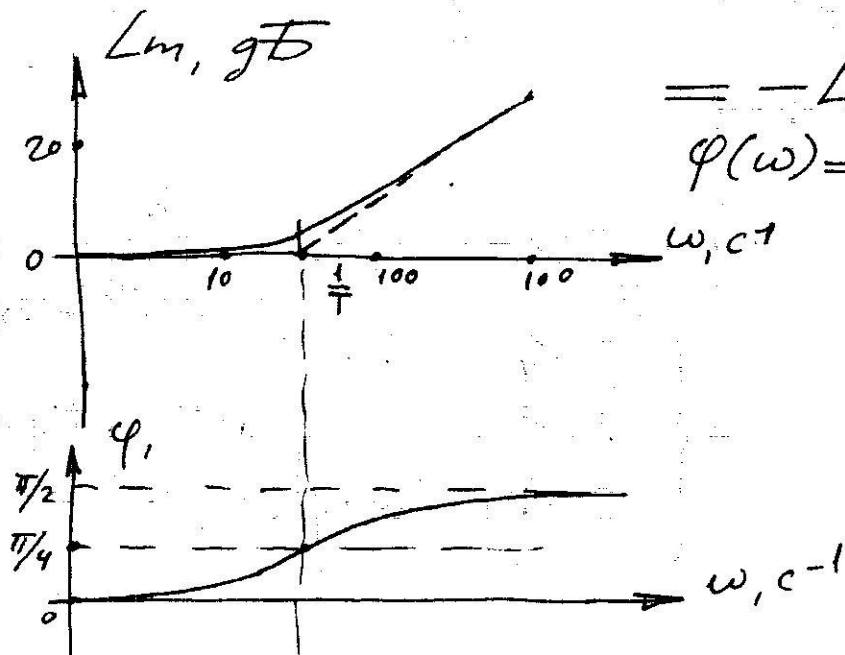
Коледат зверо : $L_m(j\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}}$

$$= \begin{cases} 20 \lg k, & \omega T \ll 1; \\ 20 \lg k - 40 \lg \omega T, & \omega T \gg 1; \\ 20 \lg k - 20 \lg 2\zeta, & \omega T = 1. \end{cases}$$



Дифф. звено I-го порядка $Lm W(j\omega) = 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1} =$
 $= -20 \lg \frac{1}{\sqrt{\omega^2 T^2 + 1}} =$

$= -Lm W_{\text{анерогич.}}(j\omega)$
 $\varphi(\omega) = -\varphi_{\text{анерогич.}}(\omega)$

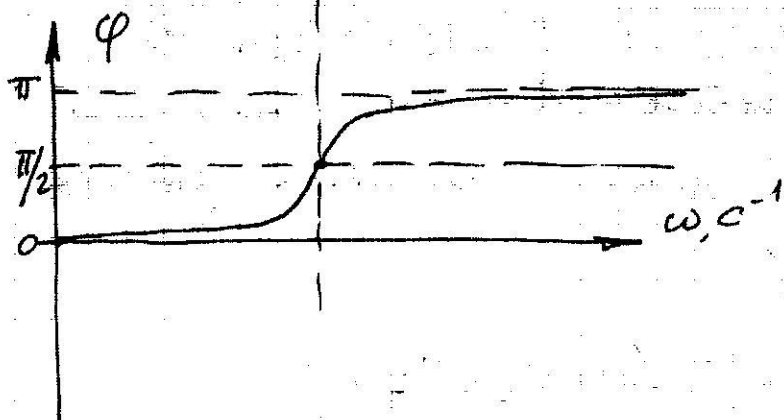
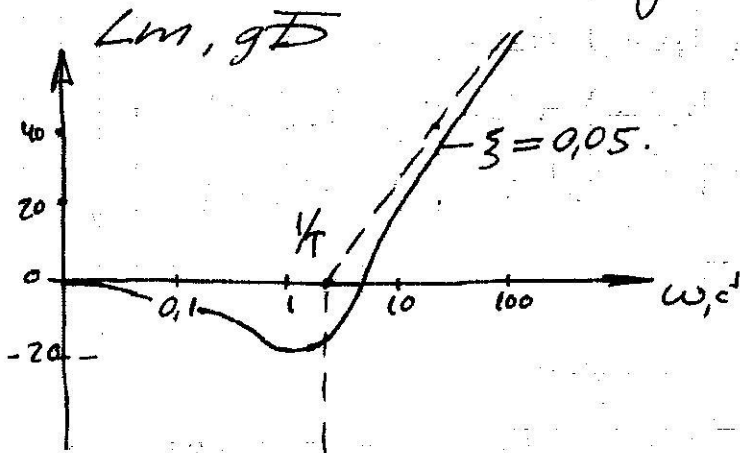


Дифф. звено 2-го порядка: $L_m W(j\omega) = 20 \lg \sqrt{(\omega^2 T^2 + 1)^2 + (2\xi T\omega)^2}$

$$= -20 \lg \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 T^2 + 1)^2 + (2\xi T\omega)^2}}$$

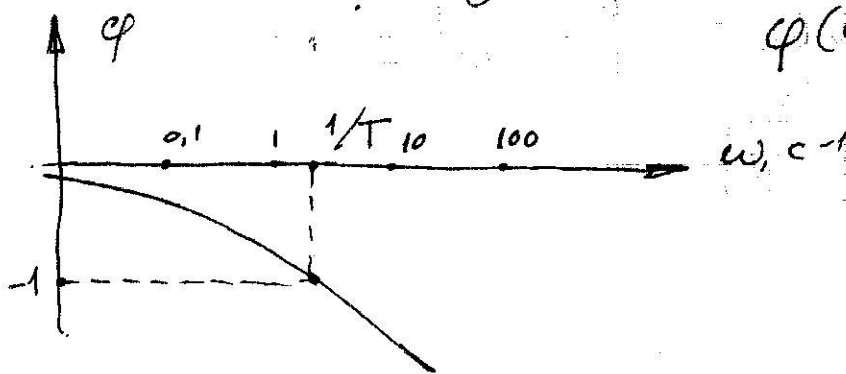
$$= -L_m W_{\text{колебат.}}(j\omega);$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi_{\text{колебат.}}(\omega).$$



Звено первого запаздывания: $L_m W(j\omega) = 20 \lg 1 = 0;$

$$\varphi(\omega) = -\tau\omega$$



Приближённое построение
логарифмических х-к



$$W_1(j\omega) = A_1(\omega) \cdot e^{j\varphi_1(\omega)}$$

$$W_2(j\omega) = A_2(\omega) \cdot e^{j\varphi_2(\omega)}$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) \cdot W_2(j\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot e^{j(\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega))}$$

$$A(\omega) = A_1(\omega) \cdot A_2(\omega);$$

$$\begin{aligned} L_m W(j\omega) &= 20 \lg(A_1(\omega) \cdot A_2(\omega)) = \\ &= 20 \lg A_1(\omega) + 20 \lg A_2(\omega) = \\ &= L_m W_1(j\omega) + L_m W_2(j\omega); \end{aligned}$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

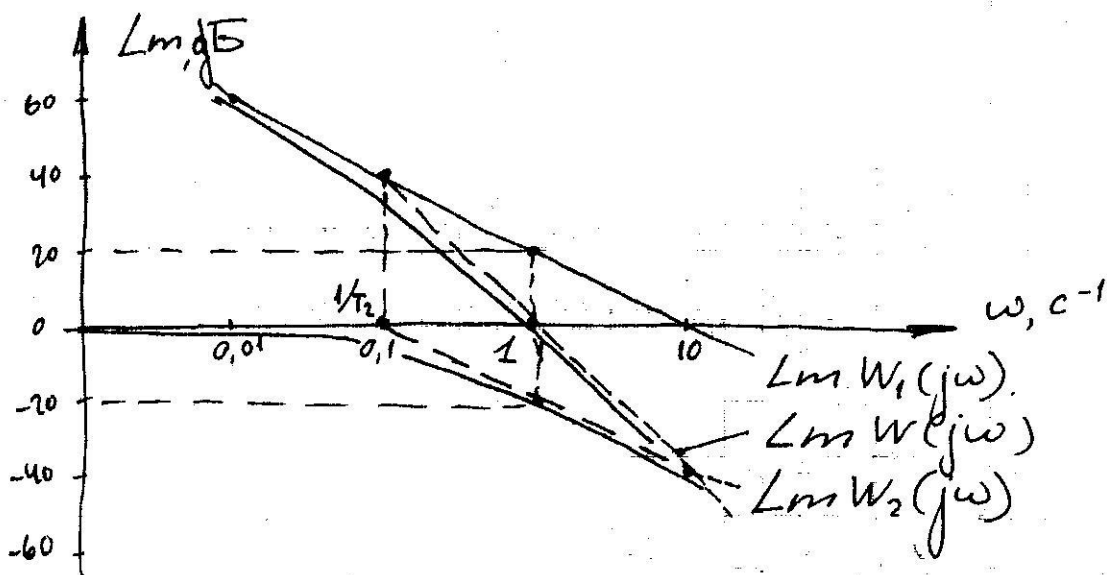
Поскольку в общем случае

$$W(s) = \frac{\prod_i k_i \prod_i (\bar{T}_i s + 1) \prod_i (T_i^2 s^2 + 2\xi_i T_i s + 1)}{s^v \prod_i (T_i s + 1) \prod_i (T_i^2 s^2 + 2\xi_i T_i s + 1)} e^{-\tau s}$$

то любая САФ эквивалентна нек-рой последовательной цепи типовых звеньев и

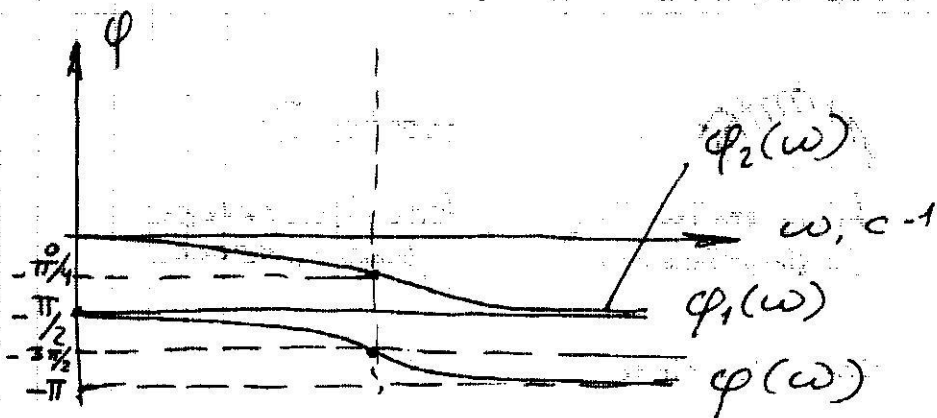
$$\begin{aligned} L_m W(j\omega) &= \sum L_m W_i(j\omega); \\ \varphi(\omega) &= \sum \varphi_i(\omega). \end{aligned}$$

Пример: $W(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{10s+1}$



$$k_1 = 10; \quad k_2 = 1; \quad T_2 = 10 \text{ c}; \quad \frac{1}{T_2} = 0,1 \text{ c}^{-1}$$

$$L_m W_1(j \cdot 1) = 20 \lg 10 = 20$$



Общие правила

- 1) Найти $\text{Lm} W_{уст}(j\omega) = 20 \lg K$.
- 2) Найти частоты сопряжения $1/T_i$.
- 3) Построить ЛАХ интегрирующих звеньев прямою, проходящую через точку $(1, 20 \lg K)$ под наклоном $-20 \cdot \nu \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$, где ν - кол-во интегрирующих звеньев.
- 4) Построить асимптот. х-к. ост. звеньев, теряющие шум в $1/T_i$.
- 5) Внести поправки.

Св-ва

логарифмических х-к.

Область низких частот: $\omega \leq \min 1/T_i$

опр. точность САД и порядок астатизма (число ν)

Область высоких частот: $\text{Lm} W(j\omega) \leq -16 \text{ дБ}$

опр. поведение переходного процесса в окр-ти $t=0$

Область средних частот: опр. быстродействие САД (время переходного процесса), перерегулирование $(\beta_{\max} (h(t)-1))$

Устойчивость САУ.

Пример:



Устойчивое
равновесие



Неустойчивое
равновесие



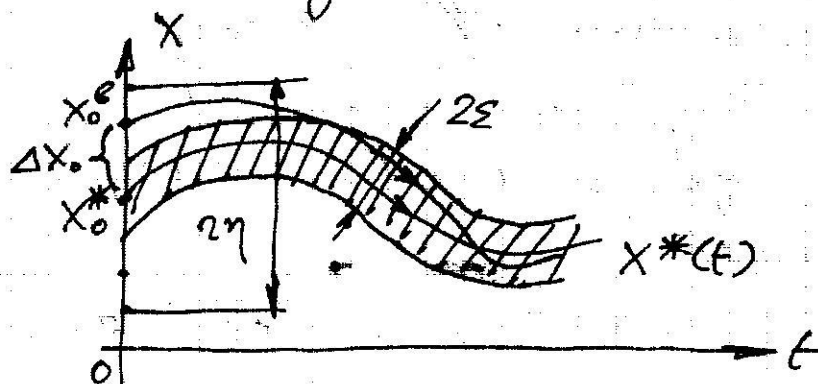
Нейтральное
равновесие

Пусть дана система

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t)$$

и она совершает движение $\bar{x}^*(t)$.

С ним сравнивается возмущенное движение $\bar{x}^b(t)$



Движение $\bar{x}^*(t)$ наз.
устойчивым, если для любого
 $\varepsilon > 0$, можно указать $\eta(\varepsilon) > 0$,
при к-ром

$$\|\bar{x}^b(t) - \bar{x}^*(t)\| = \|\Delta \bar{x}\| < \varepsilon$$

или

$$\|\bar{x}^b(t_0) - \bar{x}^*(t)\| = \|\Delta \bar{x}_0\| < \eta(\varepsilon).$$

Движение $\bar{x}^*(t)$ наз. асимпто-
тически устойчивым, если оно
устойчиво и если существует
 $\varepsilon > 0$, что при

$$\|\Delta \bar{x}_0\| < \eta(\varepsilon)$$

выполнено:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta \bar{x}\| = 0.$$

Пусть с-ма линейна

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^*(t) = A(t) \cdot \bar{x}^*(t) + B(t) \cdot \bar{u}^*(t); & (*) \\ \dot{\bar{x}}^b(t) = A(t) \cdot \bar{x}^b(t) + B(t) \cdot \bar{a}^*(t) \end{cases}$$

$$\Delta \dot{\bar{x}}(t) = A(t) \cdot \Delta \bar{x}(t)$$

Теперь система однородна, и её поведение целиком определяется матрицей $A(t)$.

Если корни χ -го ур-я простые, действительные, то

$$\Delta x(t) = \sum_k c_k e^{\lambda_k t}.$$

Ясно, что система устойчива при $\lambda_k = \alpha_k < 0$.

При комплексно сопряженных корнях $\lambda_k = \alpha_k \pm j\beta_k$ с-ма устойчива при $\operatorname{Re} \lambda_k = \alpha_k \leq 0$.

Если корни кратные, то решение содержит полином, но он всегда возрастает (убывает) медленнее экспоненты.

Необходимое и достаточное условие устойчивости линейной САУ, т.о., — отрицательность

действит. частей корней x -го ур-е.
Вно с-ме (*) x -е ур-е

$$D(\lambda) = |\lambda I - A| = 0,$$

т.е. ур-е на собств. значения матрицы A .

В с-ме с обратной связью

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{B(s)}{A(s)+B(s)} = \frac{B(s)}{D(s)},$$

откуда

$$D(s) = A(s) + B(s);$$

$$D(\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda).$$

Алгебраические критерии

устойчивости

Корней можно не знать, а знать только знаки их действит. частей.

Критерий Гурвица

Чтобы все корни x -го ур-я имели отрицат. действит. часть, т.е. с-ма была устойчивой, n/g , тогда определитель Гурвица Δ_n и все его миноры имели один знак. Здесь

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-4} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_0 \end{vmatrix}.$$

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Частный случай: $n=1$.

$$a_1 \dot{x} + a_0 x = u;$$

$$D(\lambda) = a_1 \lambda + a_0 = 0;$$

$$\lambda = -\frac{a_0}{a_1}.$$

По Гурвицу $a_0 > 0, a_1 > 0$ и/г где
устойчивости.

$n=2$.

$$a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = u;$$

$$D(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

$$a_1 > 0; a_2 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0; \\ a_0 > 0.$$

$n=3$.

$$a_3 \ddot{\ddot{x}} + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = u.$$

$$D(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0;$$

$$a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_0 > 0.$$

Пример.

Замкнутая с-ма; $W(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$

$$k = 66; T_1 = 0,41; T_2 = 0,02.$$

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$$

$$D(\lambda) = \lambda(T_1\lambda+1)(T_2\lambda+1) + k = 0;$$

$$\underbrace{T_1 T_2 \lambda^3}_{a_3} + \underbrace{(T_1 + T_2)}_{a_2} \lambda^2 + \underbrace{\lambda}_{a_1} + \underbrace{k}_{a_0} = 0$$

$$a_1 a_2 = 0,43; \quad a_3 a_0 = 0,54.$$

$$a_1 a_2 < a_3 a_0.$$

С-ма неустойчива

Критерий Рауса

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Составляется таблица Рауса:

	I	II	III	...
	$c_{11} = a_n$	$c_{12} = a_{n-2}$	$c_{13} = a_{n-4} \dots$	
	$a_{21} = a_{n-1}$	$c_{22} = a_{n-3}$	$c_{23} = a_{n-5} \dots$	
$l_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	$c_{31} = c_{12} - l_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - l_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - l_3 c_{24}$	
.....				

$$\text{Вообще, } l_i = \frac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}; \quad c_{ik} = c_{i-2,k+1} - l_i c_{i-1,k+1}$$

Число строк: $n+1$.

Число столбцов: $\left[\frac{n}{2} \right] + 2$.

Чтобы все корни x -го ур-я были "левыми", т.е. система была устойчива, н/д, чтобы все n -ты столбца T таблицы были одно-

знака.

Таблица запоминается до тех пор, пока при заданном n не получится строка с одним элементом, равным a_0 .

Пример.

	I	II	III
	a_3	a_1	0
	a_2	a_0	0
$l_3 = \frac{a_3}{a_2}$	$a_1 - \frac{a_3}{a_2} a_0$	0	0
$l_4 = \frac{a_2}{c_{31}}$	a_0	0	0

$$a_0 = k > 0;$$

$$a_2 = T_1 + T_2 > 0;$$

$$a_3 = T_1 T_2 > 0;$$

$$a_1 - \frac{a_3}{a_2} a_0 = 1 - \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \cdot k < 0.$$

С-ля неустойчива. Ср. Раус

Алгебраич. критерии позволяют получить только качественное суждение о х-ре процесса редуплирования, т.е. определить устойчивость. Но на вопросы о запасе устойчивости, времени переходного процесса они не отвечают.

Целостные критерии

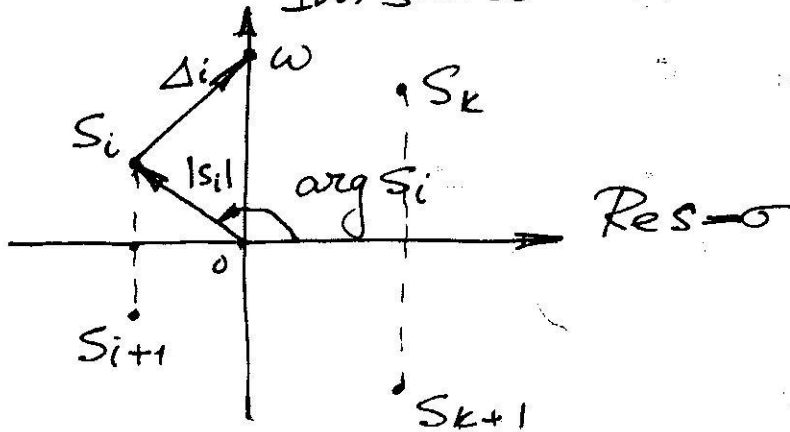
устойчивости

подходят для модных форм описания САУ; позволяют судить о запасе устойчивости.

Принцип аргумента

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + \dots + a_{n-1} j\omega + a_n = 0 \\ = a_0 (j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n) = 0,$$

$$\text{Im } s = \omega$$



$$|D(j\omega)| = a_0 |j\omega - s_1| |j\omega - s_2| \dots |j\omega - s_n|;$$

$$\arg D(j\omega) = \arg(j\omega - s_1) + \dots + \arg(j\omega - s_n).$$

Введем вектор $\Delta_i = j\omega - s_i$. Тогда

$$|D(j\omega)| = a_0 |\Delta_1| |\Delta_2| \dots |\Delta_n|;$$

$$\arg D(j\omega) = \arg \Delta_1 + \dots + \arg \Delta_n.$$

Будем изменять ω от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда для "левого" корня s_i

$$\Delta \arg \Delta_i = \pi,$$

для "правого" корня s_k

$$\Delta \arg \Delta_k = -\pi.$$

Если существует n корней, из которых m корней "правых", то

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n-m)\pi - m\pi = (n-2m)\pi.$$

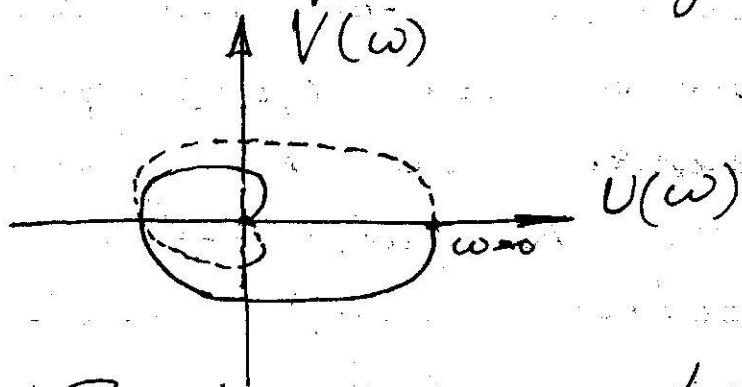
Критерий устойчивости Михайлова

При $m=0$ $\Delta \arg D(j\omega) = n\pi$.

Выделим действительную и мнимую части $D(j\omega)$:

$$D(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

и построим годограф



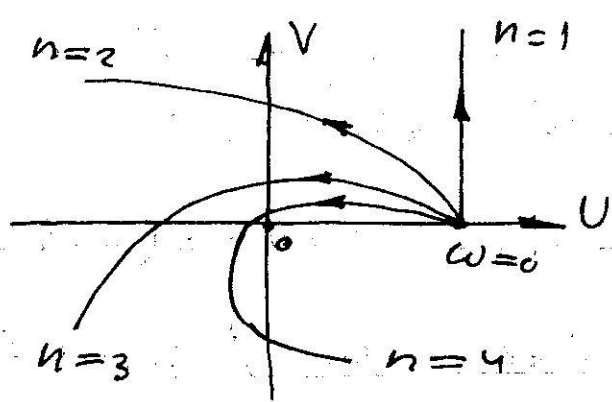
Годограф симметричен, ибо

$U(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots$ — четная ф-ция

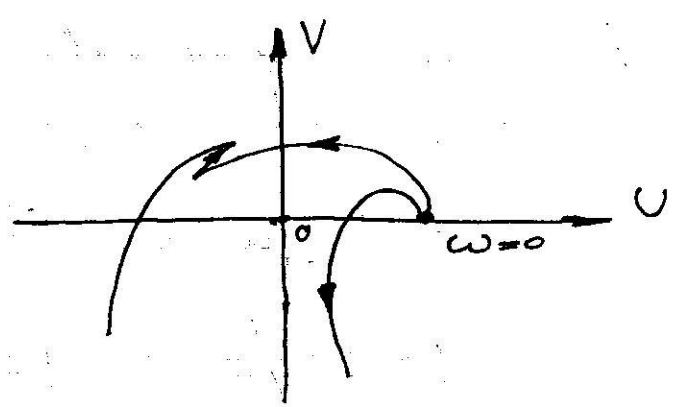
$V(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots$ — нечетная ф-ция

Поэтому будем считать ω от 0 до $+\infty$ и для устойчивой с-мы ($m=0$) получим:

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \cdot \frac{\pi}{2}.$$



Устойчивая САФ.

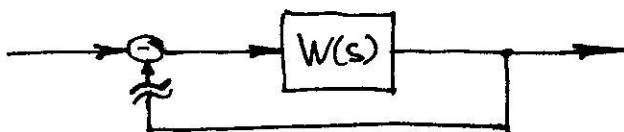


Неустойчивая САФ.

Т.о., если устойчива т. и т.т.к. при возрастании ω от 0 до $+\infty$ х-я кривая, начинаясь на положительном действительном полуоси, проходит последовательно и квадрантов в положительном направлении. (т.е. все корни $U(\omega)=0$ и $V(\omega)=0$ действительные и чередуются и $U(0) > 0$, $V'(0) > 0$)

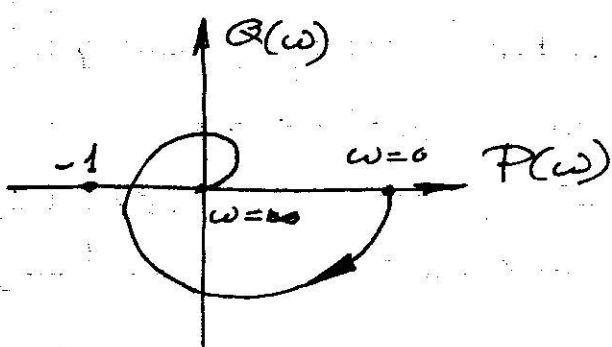
Критерий Найквиста

Об устойчивости замкнутой цепи можно судить по частотной х-к. разомкнутой цепи, т.е. по функции $W(s)$, а не $\Phi(s)$.



$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$



Введём вспом. функцию $\varphi(j\omega) = 1 + W(j\omega) =$
 $= 1 + \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{A(j\omega) + B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{A(j\omega)}$

Знаменатель её - n -й порядок разомкнутой с-мы. Для устойчивой разомкнутой САУ по критерию Михайлова при $\omega \rightarrow \infty$

$$\Delta \arg A(j\omega) = n \frac{\pi}{2},$$

для замкнутой САУ

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n - 2m) \cdot \frac{\pi}{2},$$

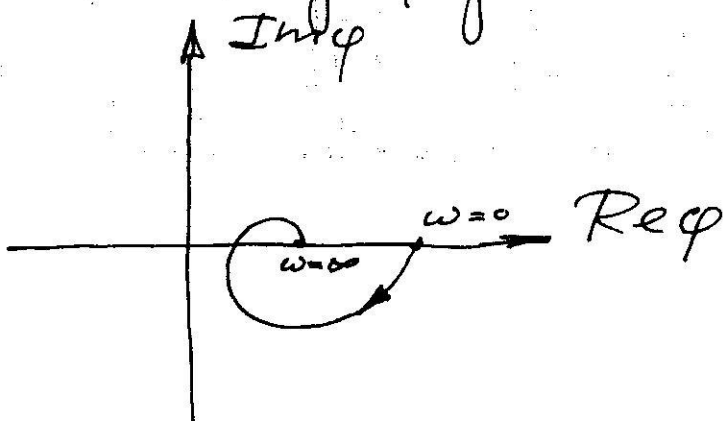
для функции $\varphi(j\omega)$

$$\Delta \arg \varphi(j\omega) = \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg A(j\omega) =$$

$$= (n - 2m) \cdot \frac{\pi}{2} - n \cdot \frac{\pi}{2} = -m\pi.$$

Для устойчивой замкнутой САУ $m = 0$,

$$\Delta \arg \varphi(j\omega) = 0.$$



Это возможно лишь тогда, когда лодграф $\varphi(j\omega)$ не охватывает начала координат, т.е. лодграф $W(j\omega)$ не охватывает точку -1 .

Если разомкнутая САФ неустойчива, т.е. $A(j\omega)$ имеет m_1 "правых" корней, то для разомкнутой САФ

$$\Delta \arg A(j\omega) = (n - 2m_1) \frac{\pi}{2},$$

для замкнутой САФ

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2};$$

где f -циса $\varphi(j\omega)$

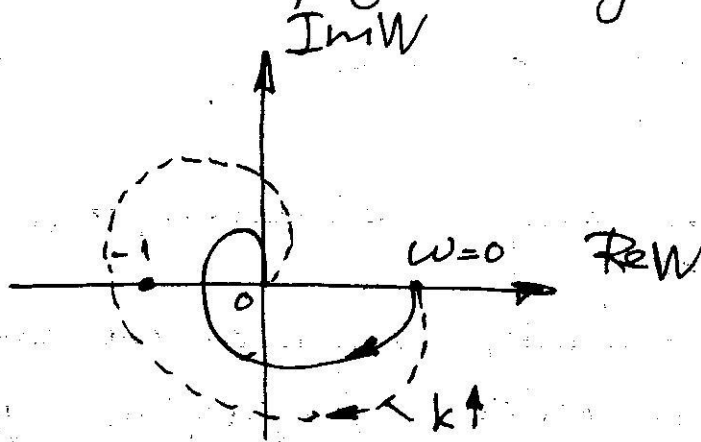
$$\begin{aligned} \Delta \arg \varphi(j\omega) &= (n - 2m) \cdot \frac{\pi}{2} - (n - 2m_1) \cdot \frac{\pi}{2} = \\ &= (-2m + 2m_1) \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

В устойчивой замкнутой САФ $m = 0$;

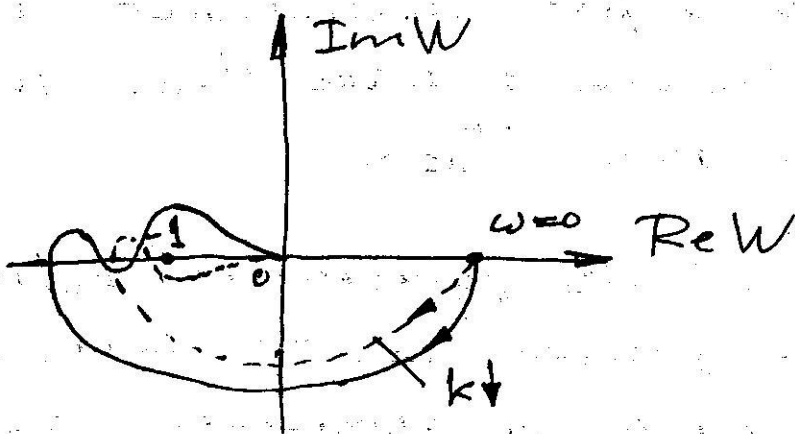
$$\Delta \arg \varphi(j\omega) = 2m_1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{m_1}{2} \cdot 2\pi.$$

Это возможно лишь тогда, когда лодграф $W(j\omega)$ охватывает точку -1 $\frac{m_1}{2}$ раз в положительном направлении.

Потеря устойчивости происходит, как правило, при увеличении коэфф. усиления (при устойчивой разомкнутой САУ) или при его уменьшении (при неустойчивой разомкнутой САУ).

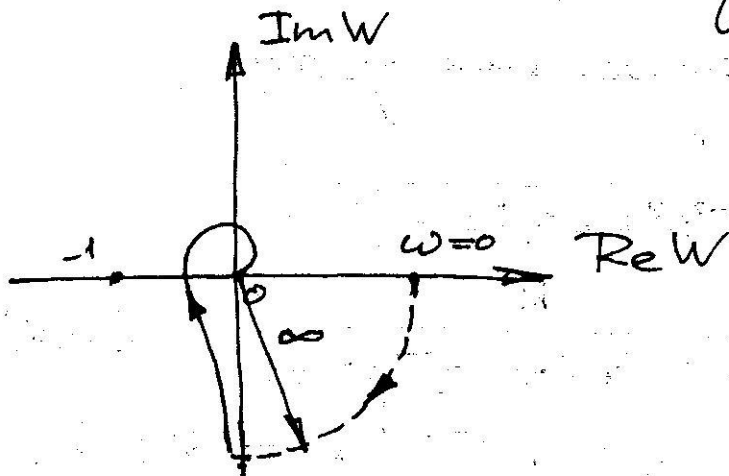


Разомкн. САУ устойчива



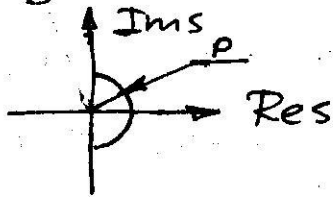
Разомкн. САУ неустойчива

Пусть с-ла передаточная: $W(s) = \frac{W_0(s)}{s^{\nu}}$
 Ее частотная χ -ка $W(j\omega) = \frac{W_0(j\omega)}{(j\omega)^{\nu}}$



Чтобы применить критерий, мы должны в нуле применить

предельный переход, тогда $W(s)$ существовала. Пусть $s = \rho e^{j\theta}$; $\theta \in (0; \frac{\pi}{2}]$



Тогда $W(s) = \frac{W_0(s)}{\rho^\nu} e^{-j\nu\theta}$;

$$|W(0)| = \lim_{\rho \rightarrow 0} |W(s)| = \infty ;$$

$$\arg W(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \arg W(s) = \arg W_0(0) - \nu\theta$$

$\nabla \cdot 0$; по графику присоединяется дуга бесконечного радиуса, движимая по кривой и проходящая по часовой стрелке от точки на положительной полуоси $Re s$.

Система с m_1 "правыми" корнями в разомкнутом состоянии, уст. в замкнутом состоянии, если число переходов $\pi/2$ $W = 0$ левее -1 равно $m_1/2$.

Пример: микроинтегратор:

$$W(s) = \frac{k}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)}$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(T^2 \omega^2 + 2\zeta T j\omega + 1)} = \frac{P(\omega) + jQ(\omega)}{1}$$

$$T = 0,01 \text{ с}, \quad \zeta = 0,05; \quad k_1 = 5; \quad k_2 = 20.$$

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega)$$

$$D(j\omega) = T^2(j\omega)^3 + 2T(j\omega)^2 + j\omega + k$$

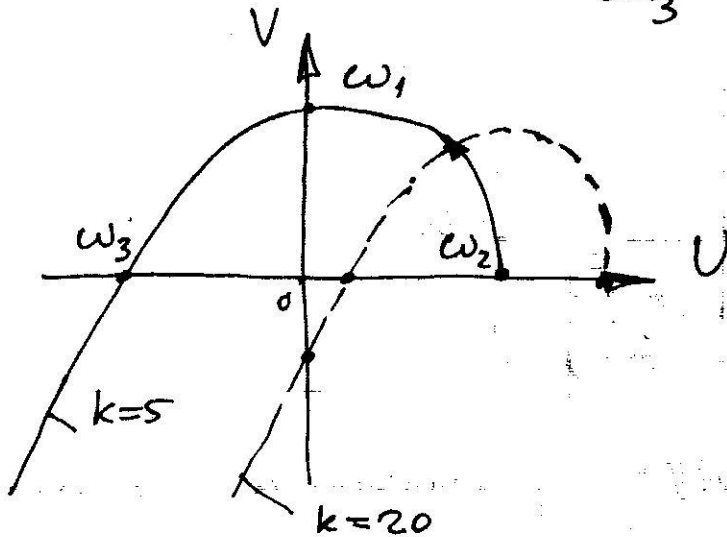
Точки пересечения логарифма $\Phi(j\omega)$ с осями находим из ур-н

$$\operatorname{Re} D(j\omega) = 0; \quad \operatorname{Im} D(j\omega) = 0 \quad (\text{где } k=5):$$

$$\omega_1 = 7,07 \text{ c}^{-1};$$

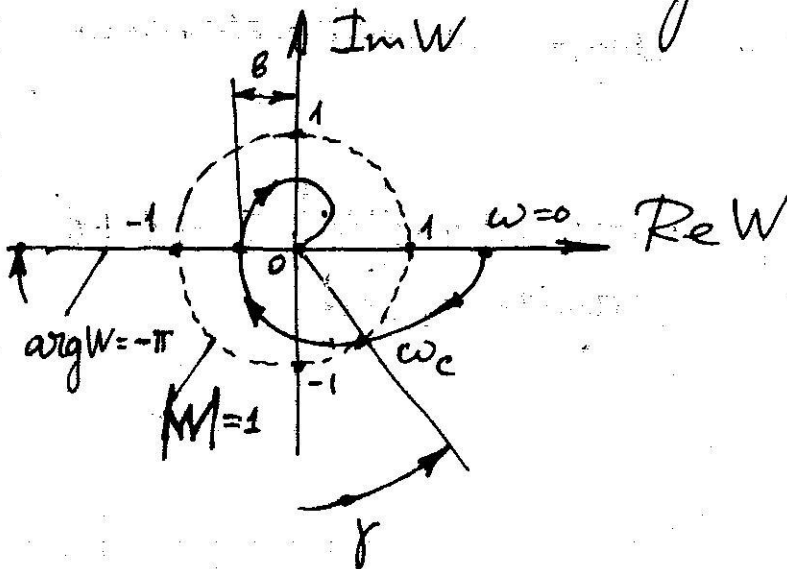
$$\omega_2 = 0;$$

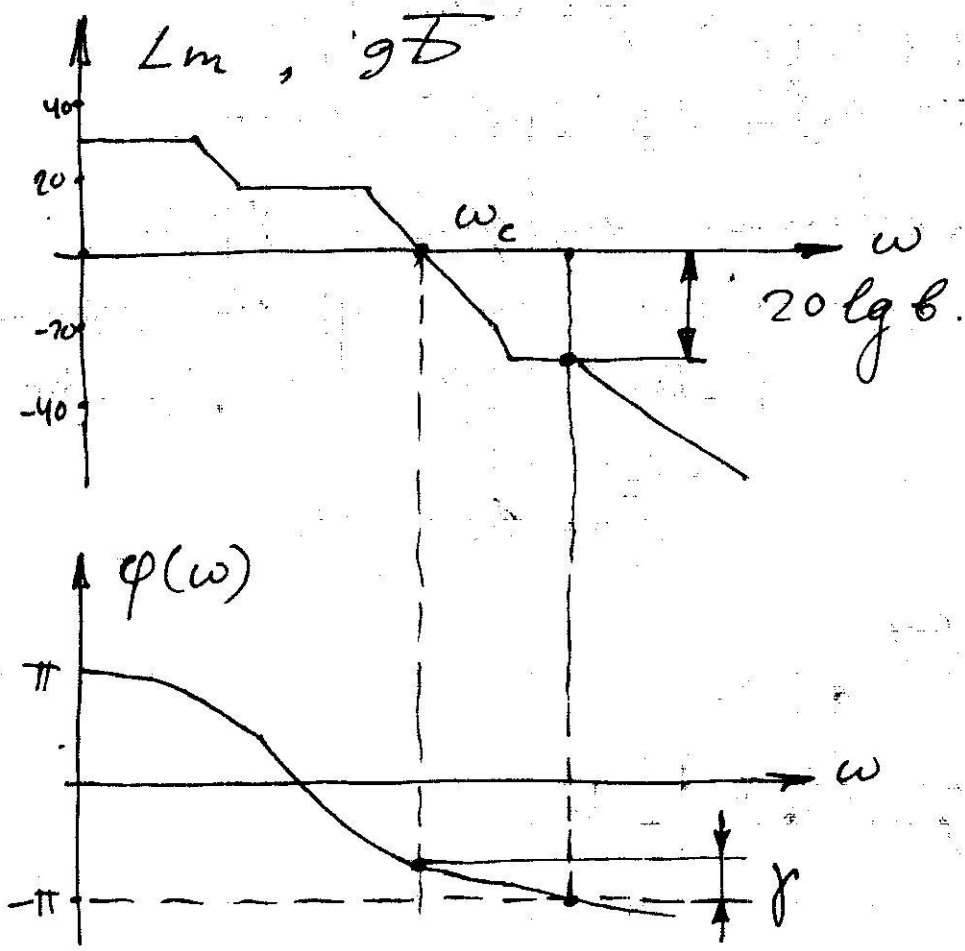
$$\omega_3 = 7,42 \text{ c}^{-1}.$$



Вывод: при $k=5$ — устойчивый, при $k=20$ — неустойчивый.

Критерий Найквиста - Михайлова
для АФЧХ





Замкнутая САУ устойчива, если при $L_m W(j\omega) \gg 0$ $\varphi(\omega)$ не пересекает прямую $\varphi = -\pi$ или пересекает её чётное число раз.

Величины

$$\tau_A = |20 \lg b|, \quad \tau_\Phi = |\gamma|$$

наз. запасом устойчивости по амплитуде и фазе соответственно;

область

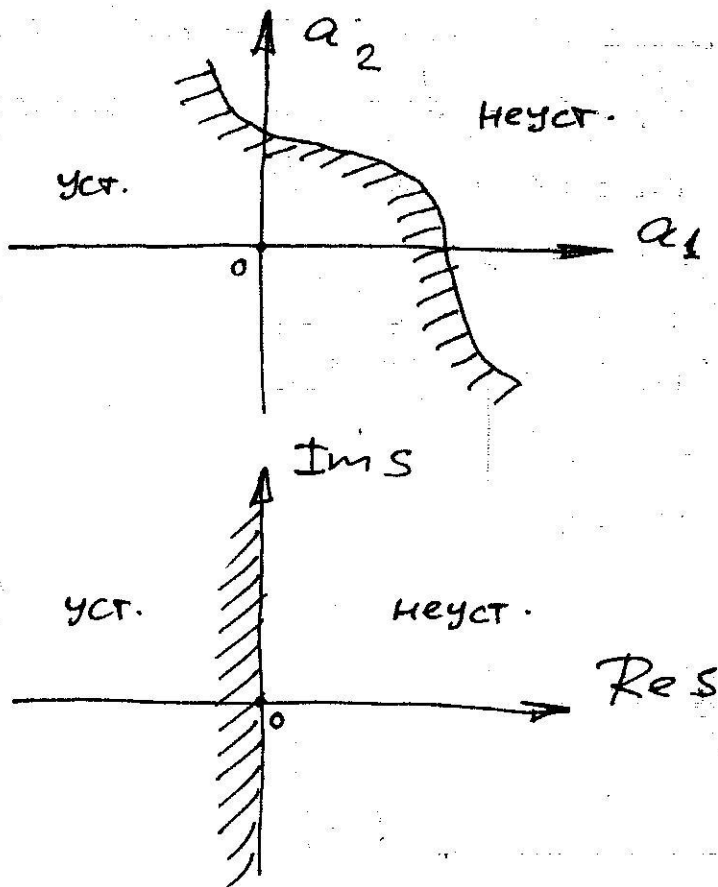
$$-\pi - \gamma \leq \arg W \leq -\pi + \gamma; \quad 1 - b \leq |W| \leq 1 + b$$

наз. областью устойчивости

Метод D-разбиения

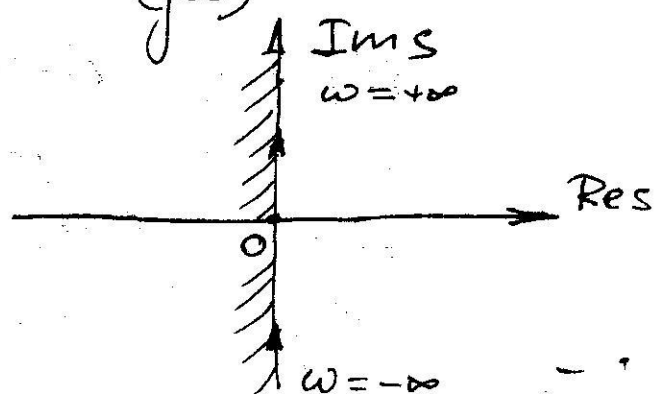
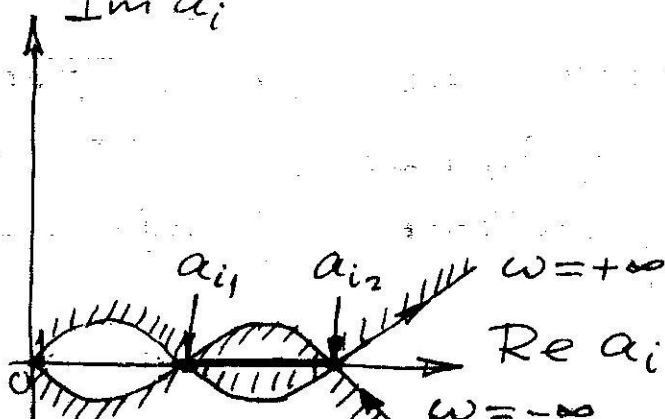
$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + \dots + a_0 \quad (*)$$

Устойчивость зависит от a_n, \dots, a_0 и может изменяться во время проектирования САУ. Поэтому в координатах, напр., (a_1, a_2) можно выделить области устойчивости и неустойчивости.



D-разбиение по 1 параметру

$$U_i (*) \quad a_i = - \frac{a_n(j\omega)^n + \dots + a_{i-1}(j\omega)^{i-1} + \dots + a_0}{(j\omega)^i}$$



На самом деле параметр a_i действительный. Поэтому, если требуется устойчивость, нужно выбирать $a_i \in (a_{i1}, a_{i2})$

Пример: инерционный датчик;

$$W(s) = \frac{k}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)}$$

$$D(s) = T^2 s^3 + 2\zeta Ts^2 + s + k = 0$$

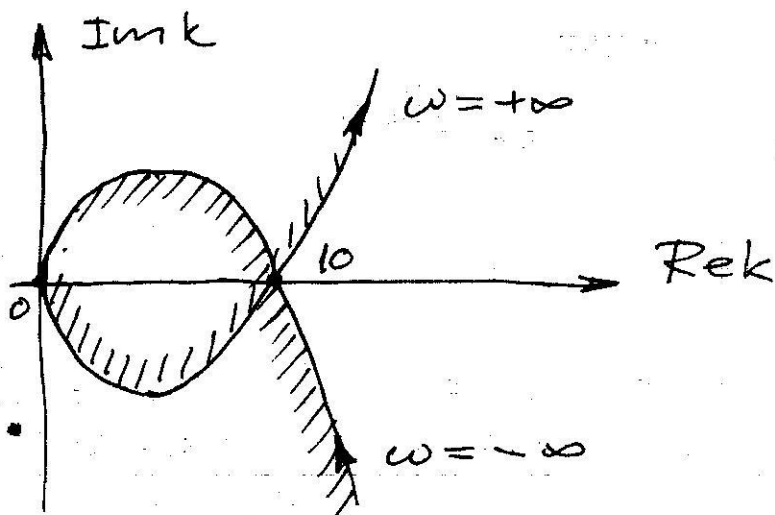
для замкнутой единичной САР. Параметром считаем коэфф. усиления k .

$$k = -T^2(j\omega)^3 - 2\zeta T(j\omega)^2 - (j\omega) =$$

$$= 2\zeta T\omega^2 + j(T^2\omega^3 - \omega)$$

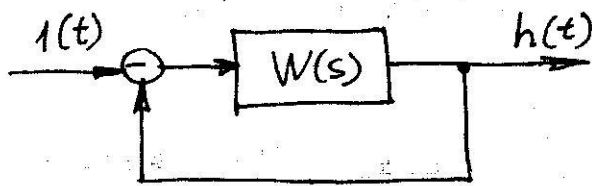
$$\operatorname{Re} k = 2\zeta T\omega^2$$

$$\operatorname{Im} k = T^2\omega^3 - \omega$$



Нужно выбрать $k \in (0, 10)$. Выше мы уже убедились, что при $k=5$ САР устойчива; при $k=20$ неустойчива.

Определение переходной f-ции по вещественной ЧХ



$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$$

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$\mathcal{L}[i(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[h(t)] = \Phi(s) \cdot \mathcal{L}[i(t)] = \frac{\Phi(s)}{s} = H(s)$$

Разложим на простейшие дроби:

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s-s_1} + \dots + \frac{B_n}{s-s_n}$$

Заметим, что

$$\Phi(s) = s H(s) = A + \frac{B_1 s}{s-s_1} + \dots + \frac{B_n s}{s-s_n}$$

$$\Phi(0) = A$$

Тогда

$$H(s) = \frac{\Phi(0)}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{s-s_i}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Phi(0)}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{s-s_i}\right]$$

$$= h_1(t) + h_2(t), \text{ где}$$

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Phi(0)}{s}\right] = \Phi(0) \cdot 1(t),$$

$$h_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{s-s_i}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Phi(s) - \Phi(0)}{s}\right]$$

$h_2(t)$ — маг. непрерывной составляющей.

$$h_2(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\Phi(j\omega) - \Phi(0)}{j\omega} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(j\omega) - \Phi(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

$Q(\omega)$ — нечётная f -члн, $Q(0) = 0$, и
 члн интеграла остаётся только $\Phi(0)$.

$$h_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(\omega) + jQ(\omega) - P(0)}{j\omega} \cos \omega t d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(\omega) + jQ(\omega) - P(0)}{j\omega} j \sin \omega t d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(\omega) - P(0)}{j\omega} \cos \omega t d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(\omega) - P(0)}{\omega} \sin \omega t d\omega +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\omega)}{j\omega} \sin \omega t d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(0)}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \text{При } t = -t' < 0 \quad h_2(t) = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t' d\omega - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t' d\omega + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{P(0)}{\omega} \sin \omega t' d\omega = 0. \quad (***) \end{aligned}$$

Воспользуемся (***) и (**). Вычитая, получим

$$\begin{aligned} - \frac{2}{\pi} P(0) \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = - \frac{2}{\pi} P(0) \cdot \frac{\pi}{2} = \\ = - P(0) = - h_1(t); \text{ следовательно:} \end{aligned}$$

$$h_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega - h_1(t);$$

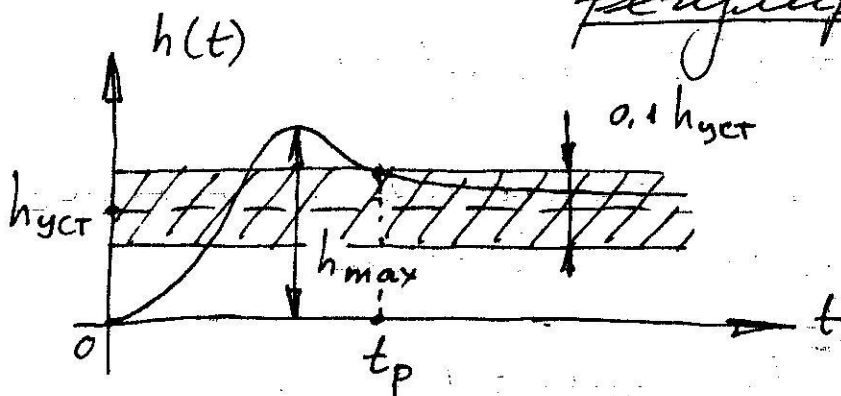
$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega.$$

Аналогично (***) и (**):

$$h_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega;$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega + P(0).$$

Показатели качества
регулирования



Переформулирование $\sigma = \frac{h_{\max} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\%$.

Время переформулирования t_p .

Свойства вих ебзгу с $P(\omega)$

$$1) \cdot h'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{n P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = n h(t) ;$$

$$2) \cdot h'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(n\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = [\omega' = n\omega] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \omega = \omega'/n \\ d\omega = d\omega'/n \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega') \cdot n}{\omega'} \cdot \frac{\sin \omega' t}{n} d\omega' =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega')}{\omega'} \sin \frac{\omega' t}{n} d\omega' = h\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$3) h_{\text{уст}} = h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) =$$
$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi(s)}{s} = \Phi(0) = P(0).$$

$$4) \cdot h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) =$$
$$= \Phi(\infty) = 0$$

5) Макс. переформулирование.

a) тлчср $P(0) \geq P(\omega)$.

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/t} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi/t}^{2\pi/t} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \dots$$

Числч прга знанефереметрчсч
и удубарот. Поэрачч

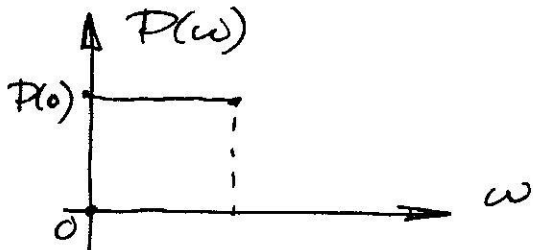
$$h(t) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/t} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{P(0)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{2P(0)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega =$$

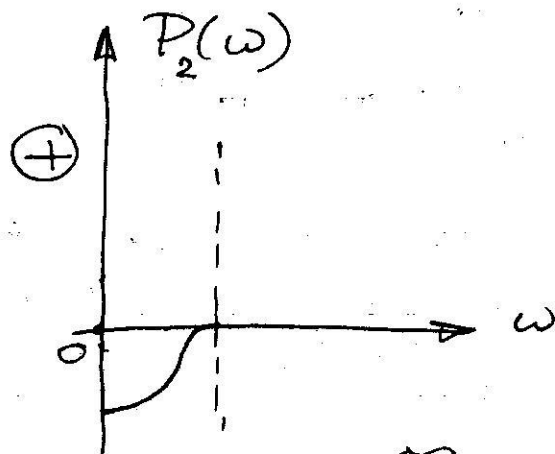
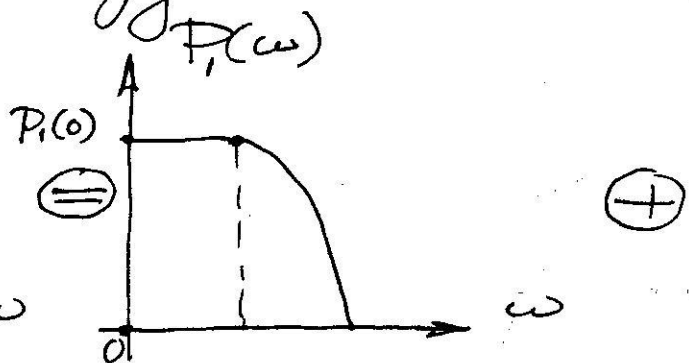
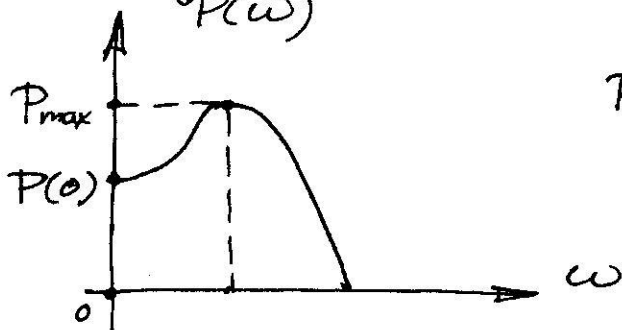
$$= h(\infty) \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 1,85;$$

$$\sigma = \frac{h(t) - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\% = \left[\frac{h(t)}{h(\infty)} - 1 \right] \cdot 100\% \leq \leq 18\%.$$

Равенство достигается только при $P(\omega)$ в виде ступенки:



б) Пусть же верно $P(0) \geq P(\omega)$.



$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_1(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_2(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega$$

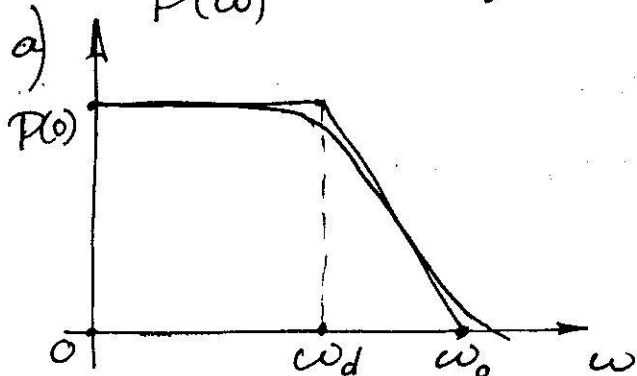
Аналогично второй интервал. Тогда

$$h(t) < \frac{2}{\pi} \cdot P_1(0) \cdot 1,85 ;$$

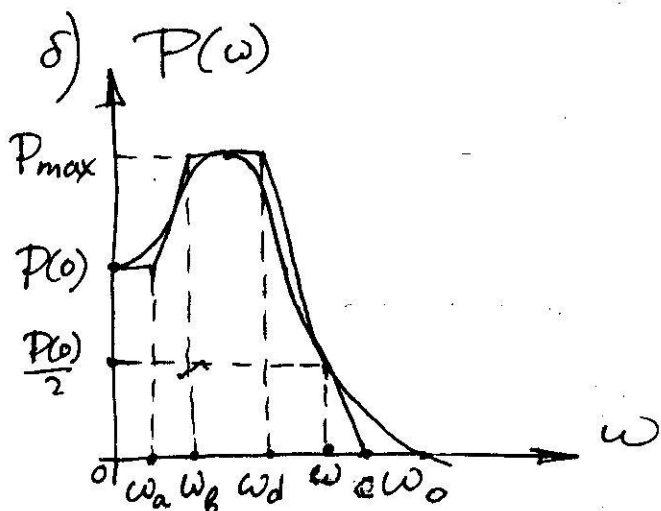
$$\sigma = \frac{h(t) - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\% = \left[\frac{h(t)}{h(\infty)} - 1 \right] \cdot 100\% \leq$$

$$\leq \left[1,18 \frac{P_{\max}}{P(0)} - 1 \right] \cdot 100\%$$

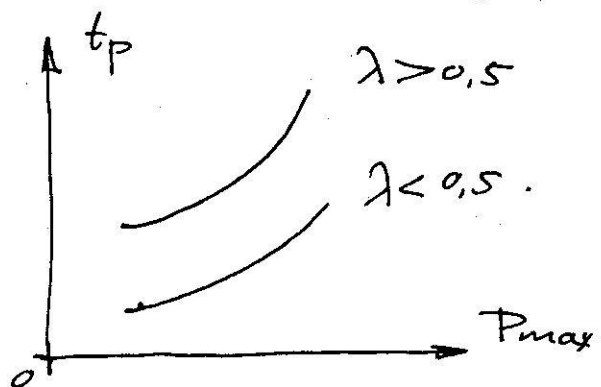
б) Время формирования $P(\omega)$



$$\frac{\pi}{\omega_0} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_0}$$

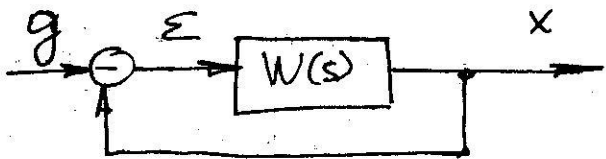


В зависимости от величины $\lambda = \frac{\omega_d}{\omega_0}$, $\lambda_a = \frac{\omega_a}{\omega_b}$, $\lambda = \frac{\omega_b}{\omega_0}$ строятся графики $t_p = t_p(P_{\max})$, где P_{\max} находится по известной величине переформулирования σ

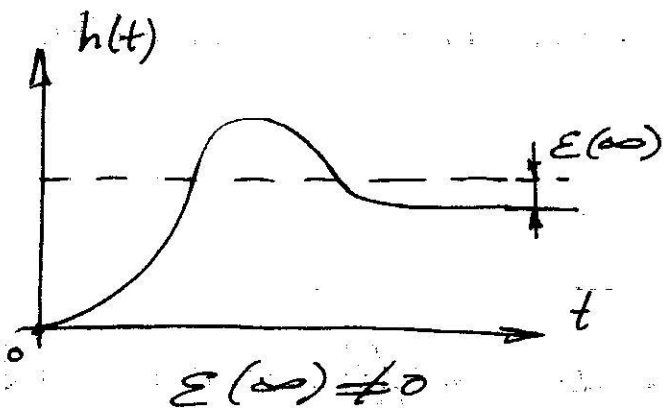


Статическая точность САУ

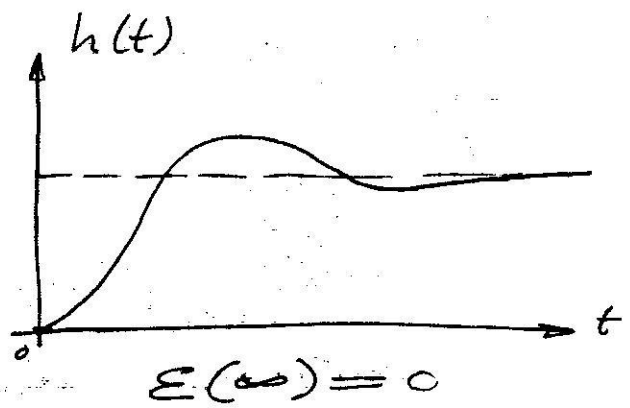
Кэфф. ошибок



Рассматривается управление g в виде медленно меняющейся ф-ции на предмет статической ошибки $\varepsilon(\infty)$. САУ делится на статические и астатические.



С-ма статическая



С-ма астатическая

Астатические с-мы имеют интегрирующие звенья: $W(s) = \frac{W_0(s)}{s^v}$; $v=1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \varepsilon(s) = g(s) - x(s); \\ x(s) = W(s) \cdot \varepsilon(s); \end{cases}$$

$$\varepsilon(s) = g(s) - W(s) \cdot \varepsilon(s);$$

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)} \cdot g(s);$$

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)}.$$

функцию $W(s) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$ можно пере-

писать в виде $W(s) = k \cdot \frac{1 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \dots}{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots}$

В таком случае, учитывая, что $n > m$, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= \frac{1 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots + \alpha_n s^n}{(k+1) + (\alpha_1 + \beta_1 k) s + (\alpha_2 + \beta_2 k) s^2 + \dots + \alpha_n s^n} \cdot g(s) \\ &= c_0 g(s) + \frac{c_1 s}{1!} g(s) + \frac{c_2 s^2}{2!} g(s) + \dots \end{aligned}$$

Здесь c_0, c_1, c_2, \dots — т.н. коэфф. ошибок.

При $\nu = 0$

$$c_0 = \frac{1}{1+k};$$

$$c_1 = \frac{(\alpha_1 - \beta_1 k) k}{(1+k)^2}; \dots$$

Основными являются коэффициенты c_0 .

При $\nu = 1$

$$W(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{1 + \beta_1 s + \dots}{1 + \alpha_1 s + \dots}$$

$$\varepsilon(s) = s \cdot \frac{1 + \alpha_1 s + \dots}{k + (1 + \beta_1 k) s + \dots} \cdot g(s);$$

$$c_0 = 0;$$

$$c_1 = \frac{1}{k}; \dots$$

Основными явл. коэффициенты c_0, c_1 .

При $\nu = 2$

$$c_0 = 0;$$

$$c_1 = 0;$$

$$\frac{1}{2} c_2 = \frac{1}{k}; \dots$$

Основными явл. коэффициенты c_2

Обр. преобразование Лапласа даёт:

$$\varepsilon(t) = c_0 g(t) + \frac{c_1}{1!} \frac{dg}{dt} + \frac{c_2}{2!} \frac{d^2g}{dt^2} + \dots$$

Видно, что ошибка зависит не только от заданного воздействия, но и от его производных.

Разложим $g(t)$ в ряд Маклорена:

$$g(t) = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_n t^n, \quad n = \overline{1, \infty}$$

В общем случае САР детерминирована:

$$W(s) = \frac{W_0(s)}{s^{\nu}}. \quad \text{Тогда тогда}$$

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{s^{\nu}}{s^{\nu} + W_0(s)} = s^{\nu} \cdot \Phi_{\varepsilon_0}(s);$$

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2} + \dots + \frac{n! g_n}{s^{n+1}};$$

$$\varepsilon_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) =$$

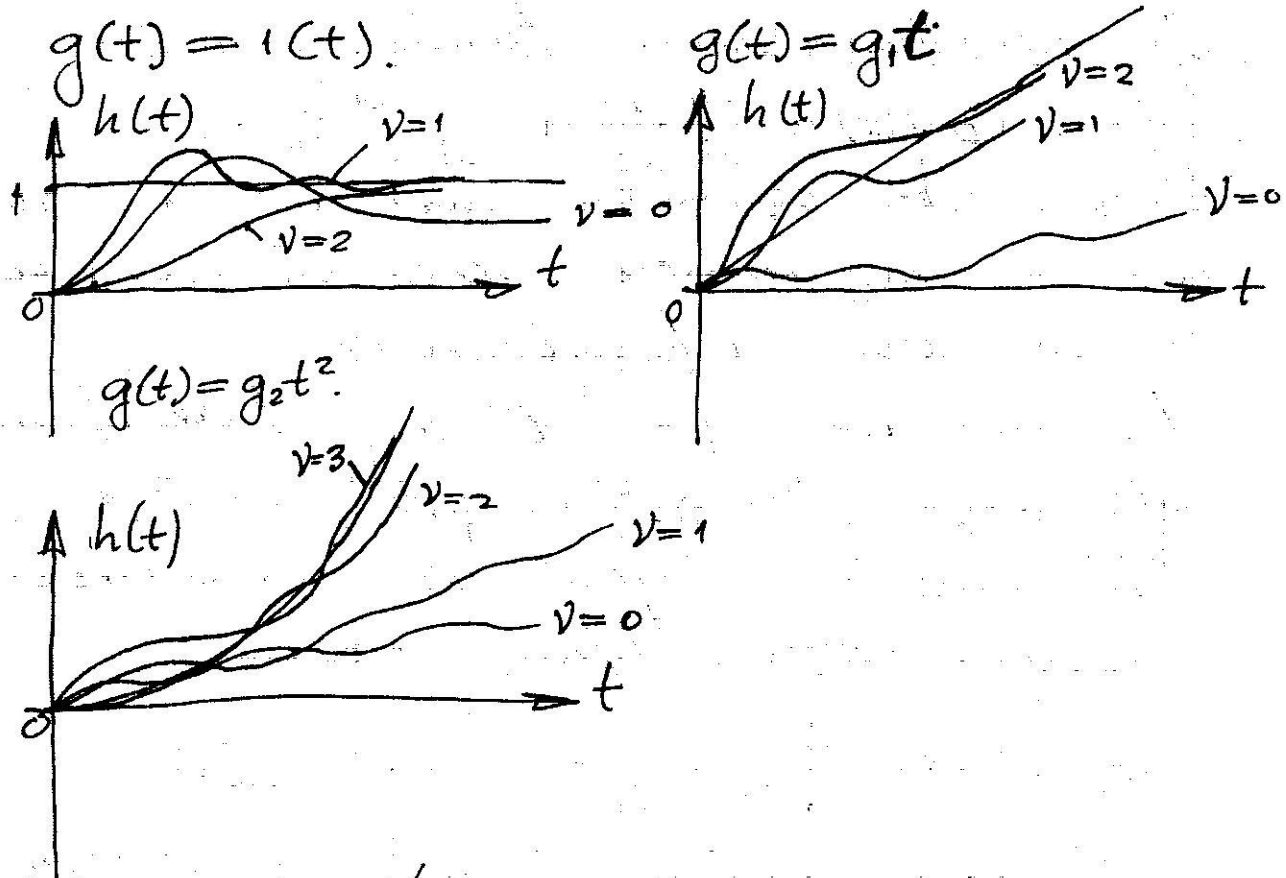
$$= \lim_{s \rightarrow 0} s^{\nu+1} \Phi_{\varepsilon_0}(s) \cdot G(s) =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon_0}(s) (g_0 s^{\nu} + g_1 s^{\nu-1} + \dots + n! g_n s^{\nu-n})$$

Возможные случаи:

- 1) $\nu > n$; $\varepsilon_{уст} = 0$;
- 2) $\nu = n$; $\varepsilon_{уст} = const$;
- 3) $\nu < n$; $\varepsilon_{уст} = \infty$.

Поэтому, если скоро мы рассмотрим САР с $\nu = 0, 1, 2$, значит будем выбирать $n = 0, 1, 2$.



Можно рассматривать точность САУ не только по положению, но и по скорости и ускорению. Величина, обр. коэфф. ошибки, наз. добротностью:

$$D_{\varphi} = \frac{1}{c_0} \text{ — по положению;}$$

$$D_{\omega} = \frac{1}{c_1} \text{ — по скорости;}$$

$$D_{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{2}c_2} \text{ — по ускорению.}$$

Тогда для статической САУ

$$\varepsilon(t) \approx \frac{1}{1+k} g(t) + \frac{1}{D_{\omega}} \frac{dg}{dt} + \frac{1}{D_{\varepsilon}} \frac{d^2g}{dt^2};$$

для астатической САУ

$$\varepsilon(t) \approx \frac{1}{D_{\omega}} \frac{dg}{dt} + \frac{1}{D_{\varepsilon}} \frac{d^2g}{dt^2} \text{ или } v=1,$$

$$\varepsilon(t) \approx \frac{1}{D_{\varepsilon}} \frac{d^2g}{dt^2} \text{ или } v=2.$$

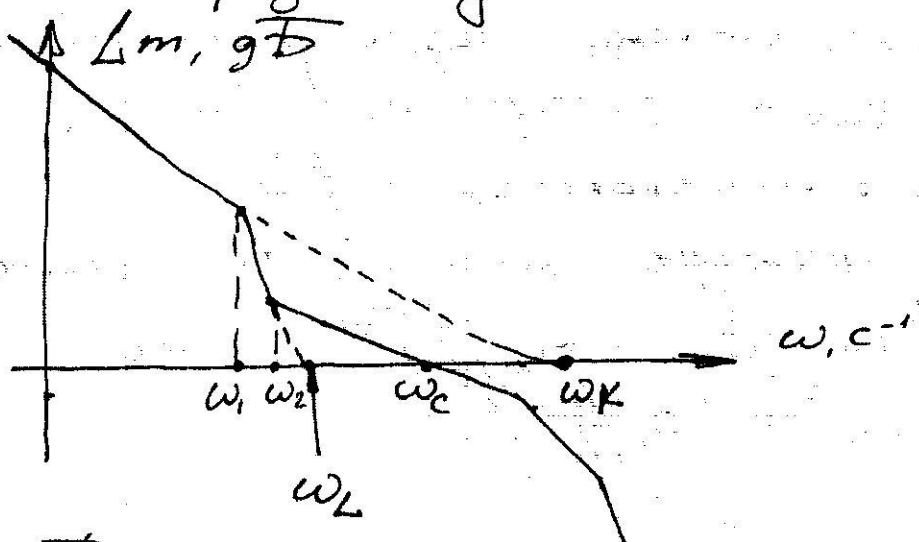
Например, при $g(t) = t^2$

$$\varepsilon(t) \approx \frac{t^2}{1+k} + 2C_1 t + C_2 \quad \text{при } \nu = 0;$$

$$\varepsilon(t) \approx \frac{2}{k} t + C_2 \quad \text{при } \nu = 1;$$

$$\varepsilon(t) \approx C_2 = \frac{2}{k} \quad \text{при } \nu = 2.$$

Связь коэф. ошибок с ЛАХ
фазанкнутаой снмы



Для точки ω_k и нулевой частоты участка $L_m(\omega_k) = 20 \lg \frac{k}{\omega_k} = 0$; откуда $\frac{k}{\omega_k} = 1$; $\omega_k = k$. Мы построили ЛАХ САФ с $\nu = 1$. В общем случае $\omega_k^\nu = k$. Действительно,

$$W(s) = \frac{k}{s^\nu} \cdot W_0(s), \quad \text{где } |W_0(s)| = 1;$$

$$L_m(\omega_k) = 20 \lg \left[\frac{k}{\omega_k^\nu} W_0(s) \right] = 0,$$

откуда $\frac{k}{\omega_k^\nu} = 1$, $\omega_k^\nu = k$.

Мы установили таким образом, что при $\nu = 1$

$$D_\omega = \omega_k.$$

Также можно показать, что $D_E = \omega_L^2$.

Интегральные оценки качества САУ

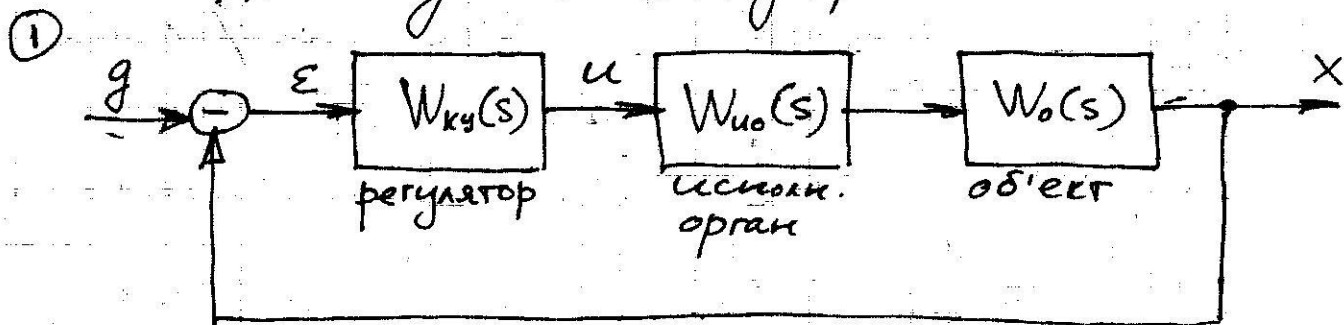
есть функционал общего вида

$$I = \int_0^{\infty} f(x, \frac{dx}{dt}, \dots) dt.$$

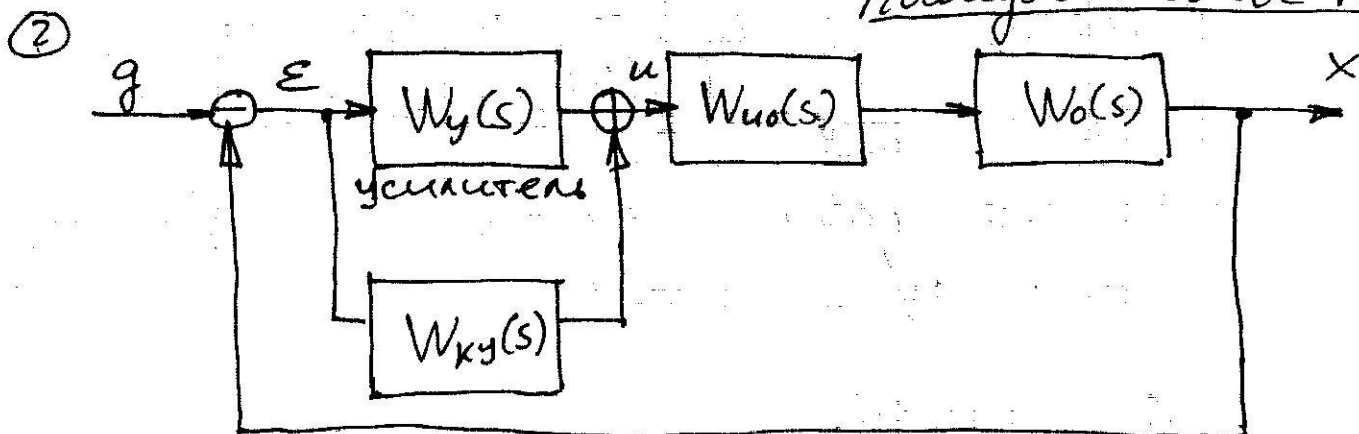
Для монотонных переходных процессов часто выбирают $f = \varepsilon$, для немонотонных $f = \varepsilon^2$.

Более точно оценку получают при $f = (\tau_0 \varepsilon + \tau_1 \frac{d\varepsilon}{dt})^2$ или $f = (\tau_0 \varepsilon)^2 + (\tau_1 \frac{d\varepsilon}{dt})^2$.

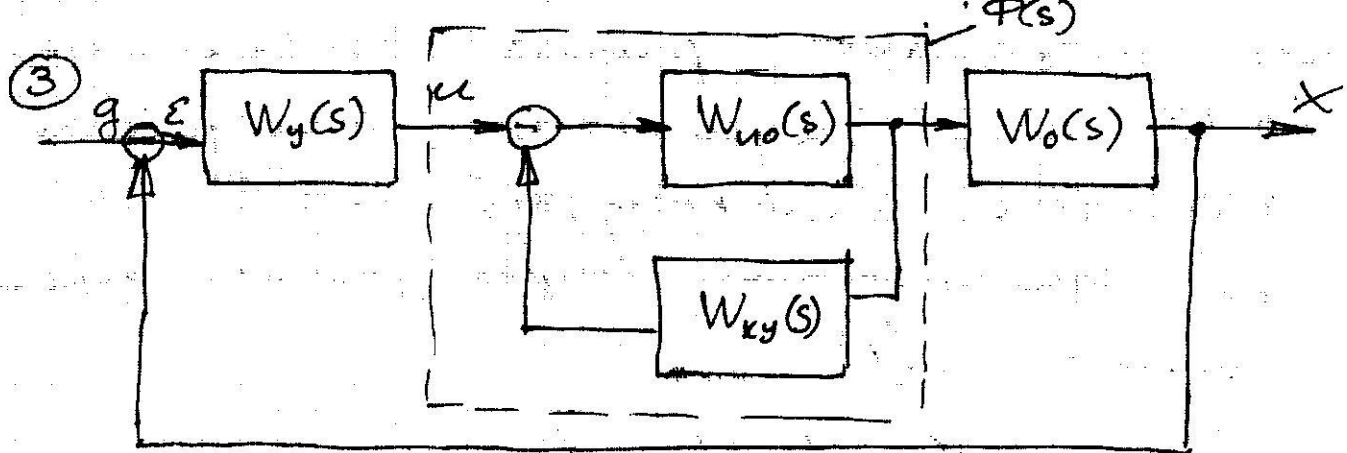
Синтез корректирующей цепи в САУ



Последовательное КУ



Параллельное КУ



КУ типа местной ОС
(встречно-//ное КУ)

Последовательные КУ проще, но более подвержены помехам. КУ типа местной обратной связи убавляют от помех, придают системе устойчивость, но, как правило, громоздкие и дорогие.

Частотный метод синтеза КУ
Соловьянова.

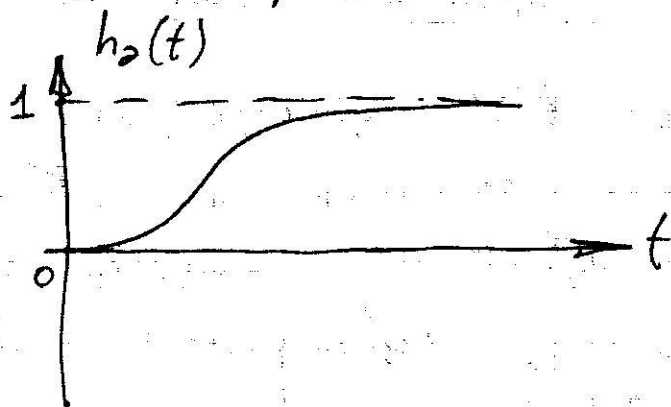
При единичной ОС

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}; \quad \Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

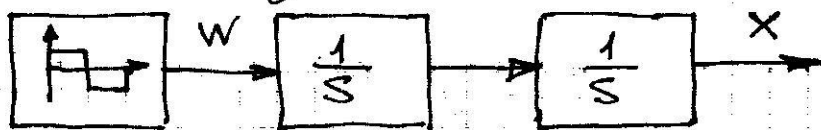
Задаётся ЛАЧХ неумножаемой части (объекта и исполнитель. органа) L_H и желаемая ЛАЧХ L_x всей системы (обе при разомкнутой ОС). Основное достижение автора метода состоит в отыскании связи между ЧХ замкнутых и разомкнутых САУ.

что позволяет указать желаемую ЛАЧХ при заданных показателях качества замкнутой САУ и её стационарным переходным процессом $h_2(t)$

В качестве $h_2(t)$ выбирается, например, такой:



(соответствующий материальной точке под действием силы:

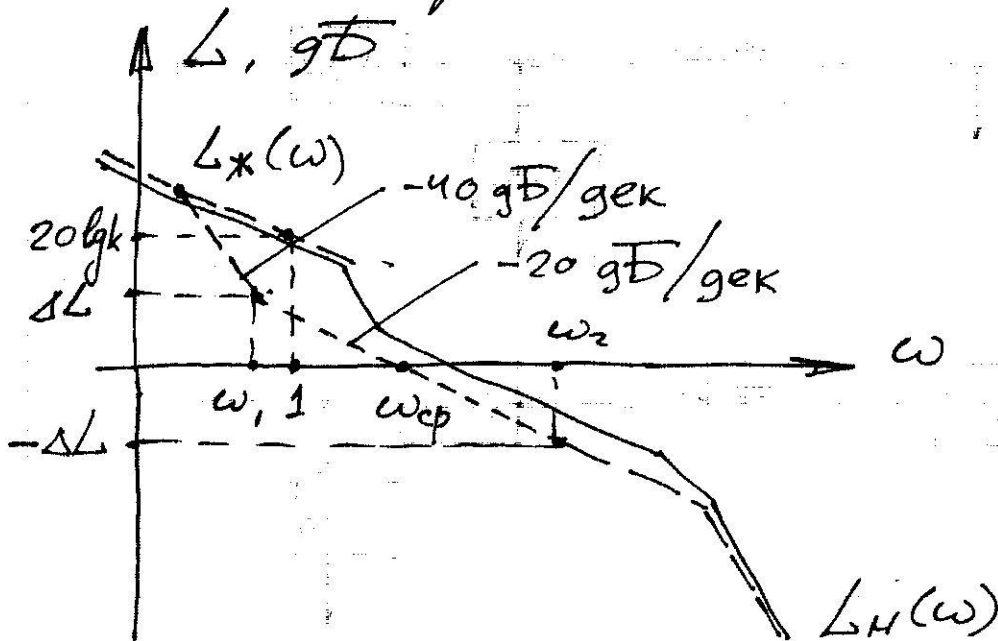


$$\ddot{x} = w = \frac{F}{m}$$

Затем рисуем графическое представление с помощью ЛАЧХ КУ:

$$L_{КУ}(\omega) = L_x(\omega) - L_H(\omega)$$

Построение желаемой ЛАЧХ

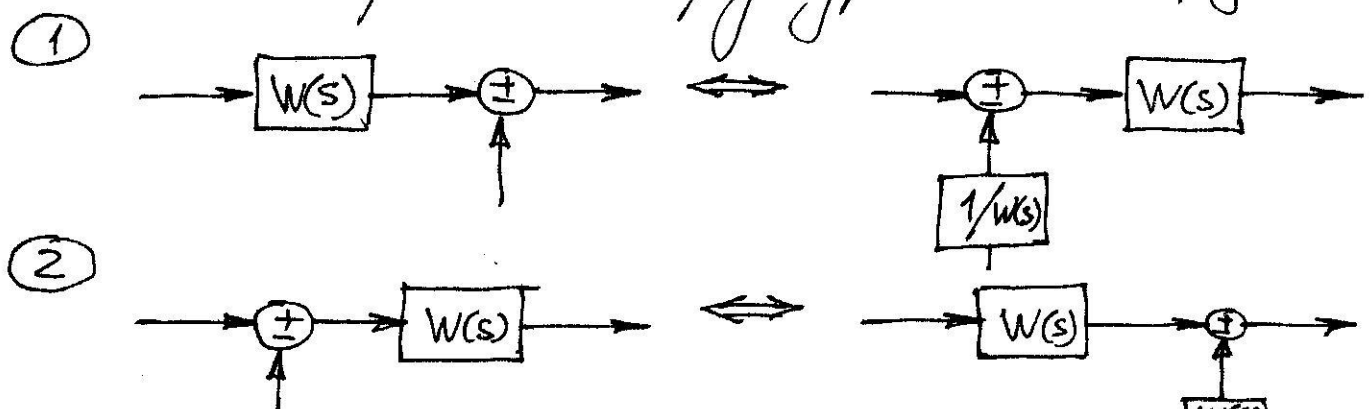


Задание для замкнутой САУ: ν, t_p, σ, k .
 По номограммам ν, t_p, σ отыскать частота ω_{max} и далее ω_{cp} .

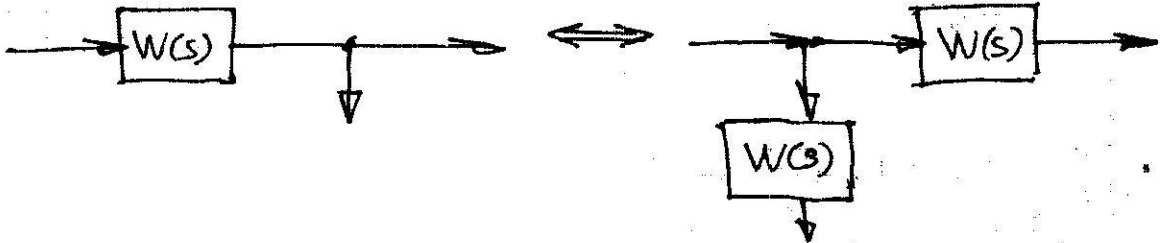
Через точку $(\omega_{cp}, 0)$ проводится прямая под наклоном $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$, на ней откладываются границы среднечастотной области $(\omega_1, L), (\omega_2, L)$.

Для этого по номограмме замкания находят требуемые запасы устойчивости и поробуют ω_1, ω_2 так, чтобы эти запасы обеспечить.

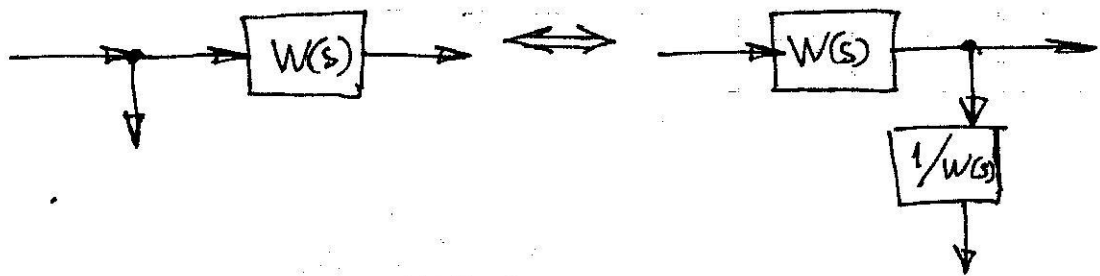
Правила структурных преобразований



3



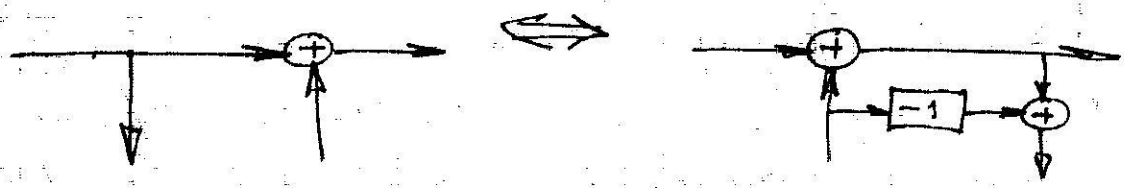
4



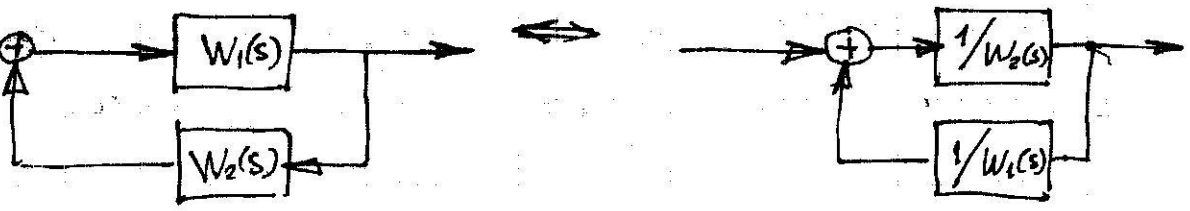
5



6



7

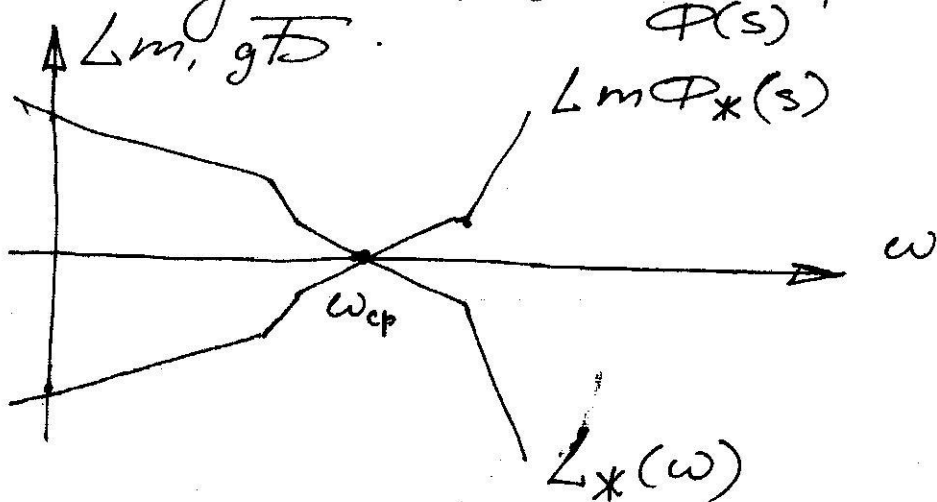


Синтез безразмерно-// -х КУ

$$\Phi(s) = \frac{W_{uo}(s)}{1 + W_{ky}(s) \cdot W_{uo}(s)}$$

если $|W_{uo}(s) \cdot W_{ky}(s)| \gg 1$ $\Phi(s) \approx \frac{1}{W_{ky}(s)}$

Отсюда $W_{ky}(s) \approx \frac{1}{\Phi(s)}$; $Lm W_{ky}(s) = -Lm \Phi(s)$

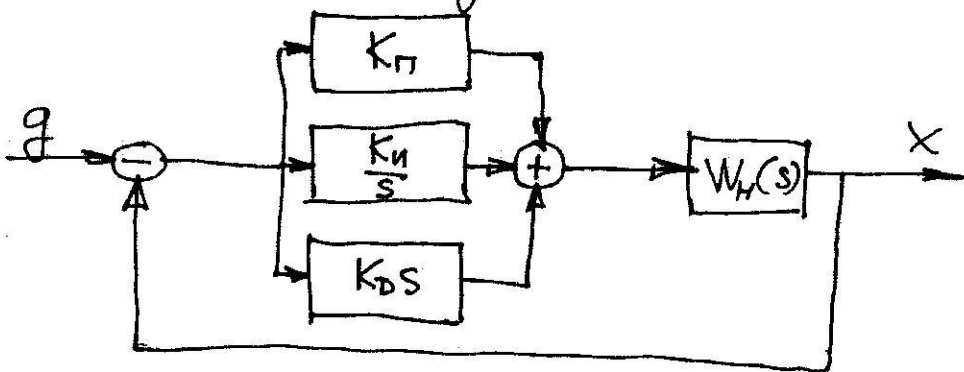


$$L_H = Lm(W_y(s) \cdot W_{uo}(s) \cdot W_o(s))$$

$$L_* = Lm(W_y(s) \cdot \Phi_*(s) \cdot W_o(s))$$

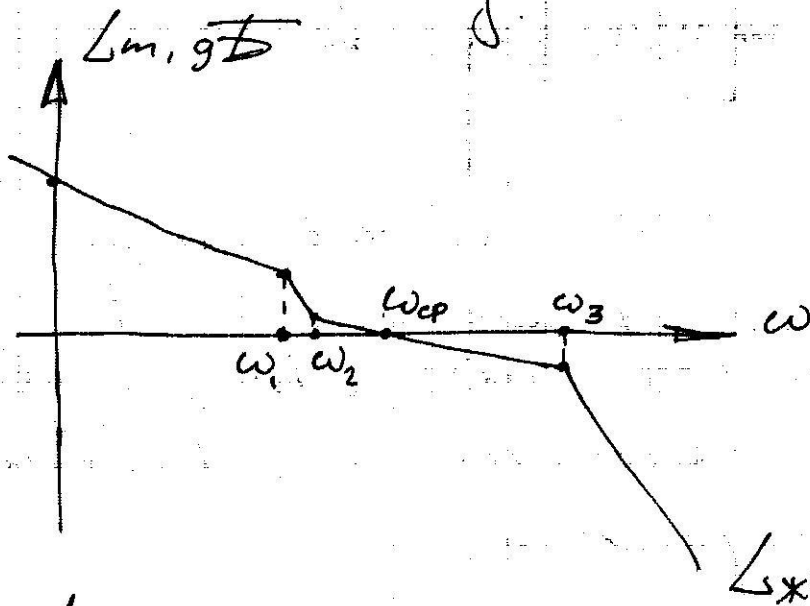
Синтез // -х КУ

ТНД-регулятор



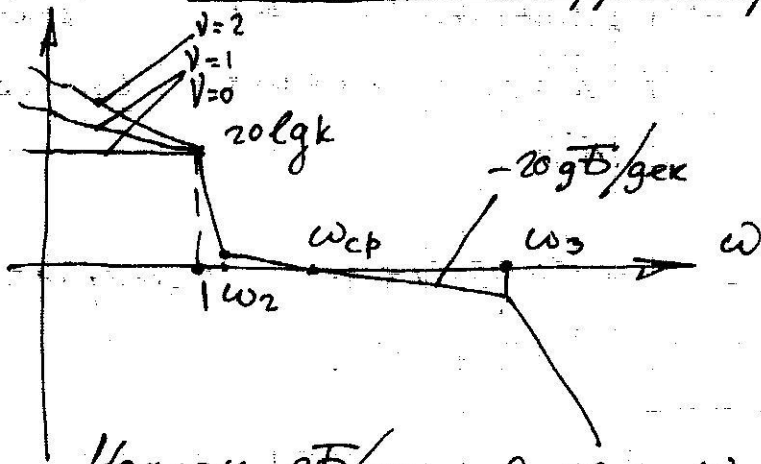
$$W_{uo}(s) = K_p + \frac{K_n}{s} + K_d s$$

Упрощенная методика синтеза последовательного КУ



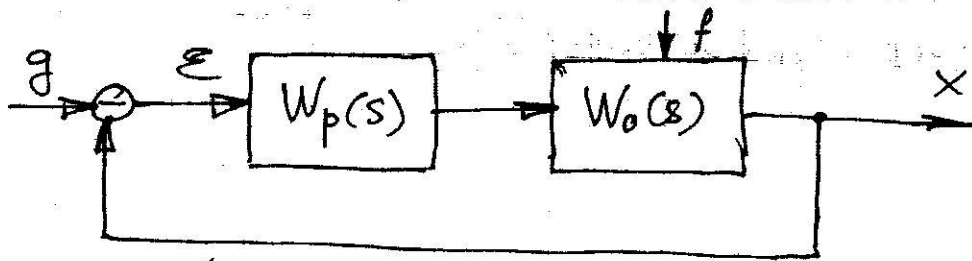
Получают $\omega_3 = (2 \div 4) \omega_{cp}$; $\omega_2 \omega_3 = \omega_{cp}^2$;
 у номограммы получают ω_1 .

Тимовые корректирующие устройства

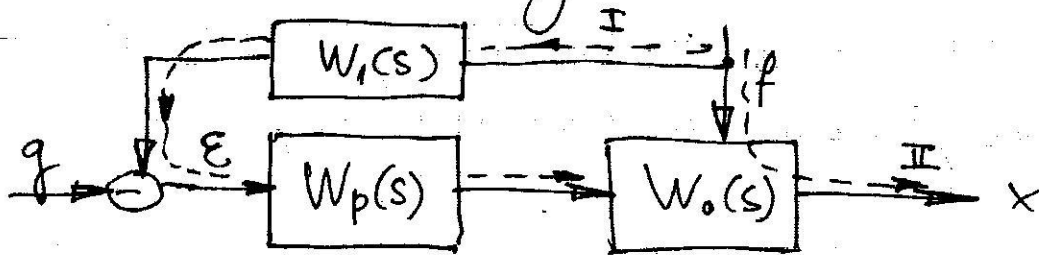


	Наклон, dB/дек	$0 \dots \omega_1$	$\omega_1 \dots \omega_2$	$\omega_2 \dots \omega_3$	$\omega_3 \dots \infty$
1) $\frac{k(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)}$	-20	-20	-40	-20	-40
2) $\frac{k(T_2s+1)^2}{s(T_1s+1)^2(T_3s+1)}$	-20	-20	-60	-20	-40
3) $\frac{k(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)^2}$	-20	-20	-40	-20	-60
4) $\frac{k(T_2s+1)^2}{s(T_1s+1)^2(T_3s+1)}$	-20	-20	-60	-20	-60

Инвариантные САУ

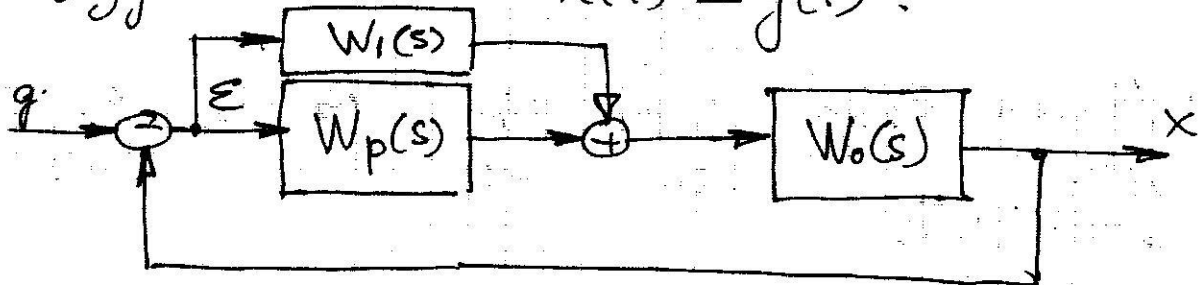


Инвариантные САУ — не зависящие от внешнего возмущения f . Ее можно построить либо скомпенсированной по отклонению (см. выше) либо по возмущению:



Эти — это двухканальное (каналы I и II) возмущенное и компенсированное САУ.

Сущ. САУ для повторения заданного воздействия: $x(t) \equiv g(t)$.



$$W_1(s) = \frac{1}{A(s)}$$

Действительно

$$\Phi_{\text{ЭКВ}}(s) = W_0(s) \cdot \frac{W_p(s) + W_1(s)}{1 + W_p(s)}$$

$$W_{\text{ЭКВ}}(s) = W_0(s) \cdot \frac{W_p(s) + W_1(s)}{1 - W_0(s) \cdot W_1(s)}$$

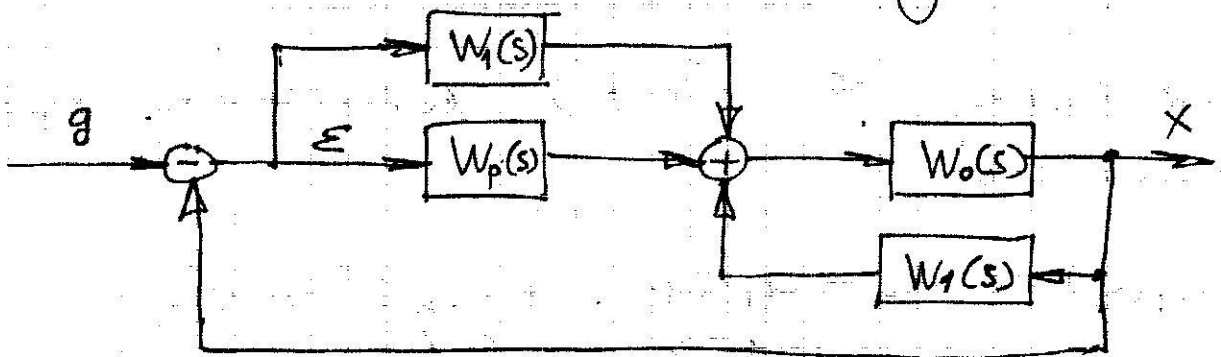
Передающая f-ция по ошибке

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{1 - W_0(s)W_1(s)}{1 + W_p(s) \cdot W_0(s)}$$

Если $\Phi_{\varepsilon}(s) = 0$, то сигнал передается без искажений. Три варианта этого условия

$$W_1(s) = \frac{1}{W_0(s)} \quad (*)$$

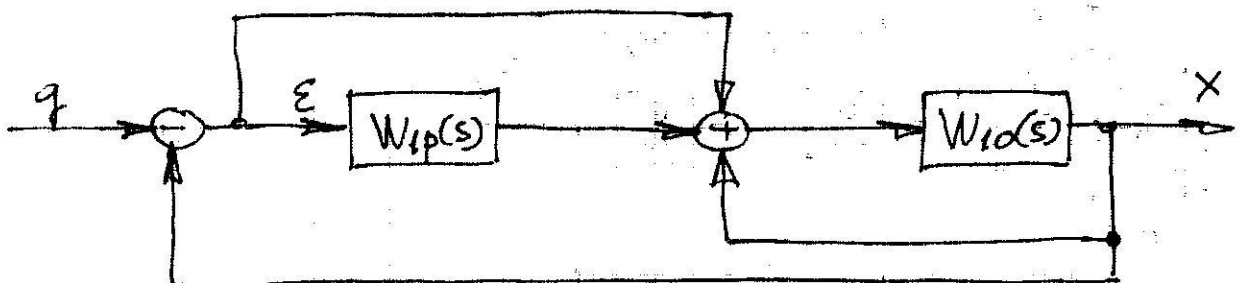
схема примет вид



Проверим:

$$\begin{aligned} W'_{\text{ЭКВ}}(s) &= \frac{W_0(s)W_1(s)}{1 - W_0(s)W_1(s)} \cdot \left[1 + \frac{W_p(s)}{W_1(s)} \right] = \\ &= W_0(s) \cdot \frac{W_p(s) + W_1(s)}{1 - W_0(s)W_1(s)} = W_{\text{ЭКВ}}(s) \end{aligned}$$

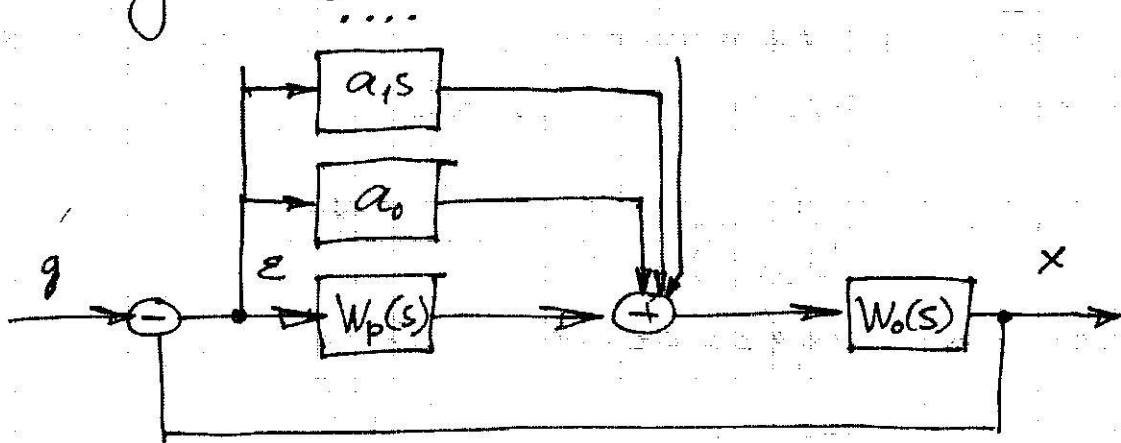
Сокращенно



Разложим $W_1(s)$ в ряд:

$$W_1(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots \quad (**)$$

Тогда, учитывая (*), имеем:



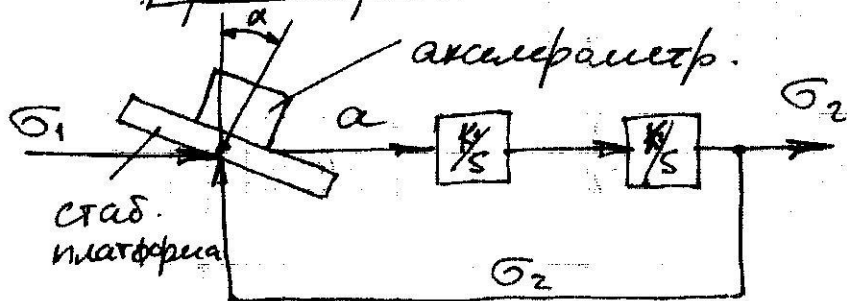
Оставляя в (**) конечное число членов:

$$W_1(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n + \delta,$$

получим САУ, инвариантную с точностью до δ .

$W_1(s)$ не влияет на устойчивость, но влияет на качество передачи от q к x .

Пример.



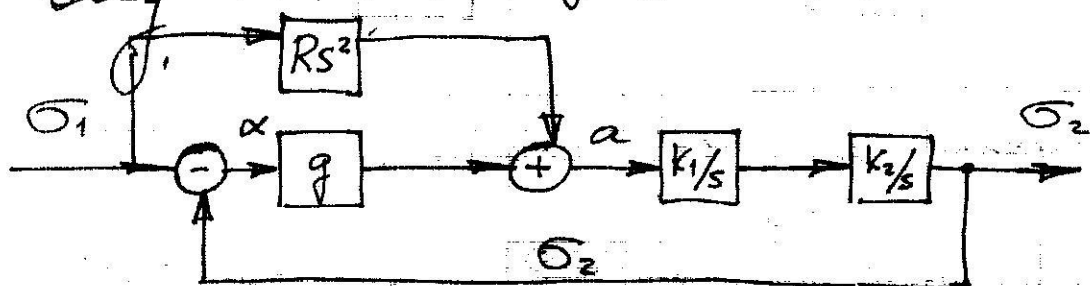
Если σ_1 - угловое перемещение платформы, R - радиус Земли, то

$$a - g\alpha = R s^2 \sigma_1.$$

Сигнал обратной связи

$$\sigma_2 = \frac{K_1 K_2}{s^2} \cdot a.$$

Тогда экв. структурная схема имеет вид



Добьемся того, чтобы $RS^2 = \frac{1}{\frac{K_1 K_2}{s^2}}$.

Тогда

$$K_1 K_2 = \frac{1}{R}$$

и передаточная функция по ошибке $\Phi_E(s) \neq 0$, т.е. достигнута полная инвариантность САУ.

При этом

$$W(s) = \frac{g}{RS^2} = \frac{B(s)}{A(s)};$$

характеристическое ур-е

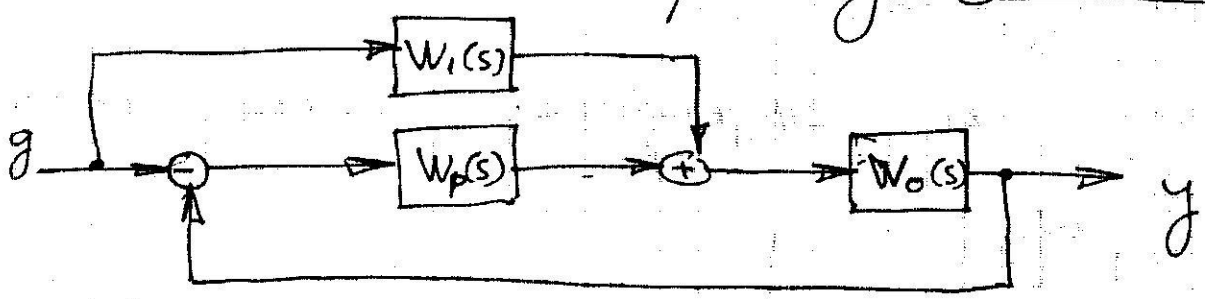
$$D(s) = A(s) + B(s) = s^2 + \frac{g}{R} = 0,$$

откуда

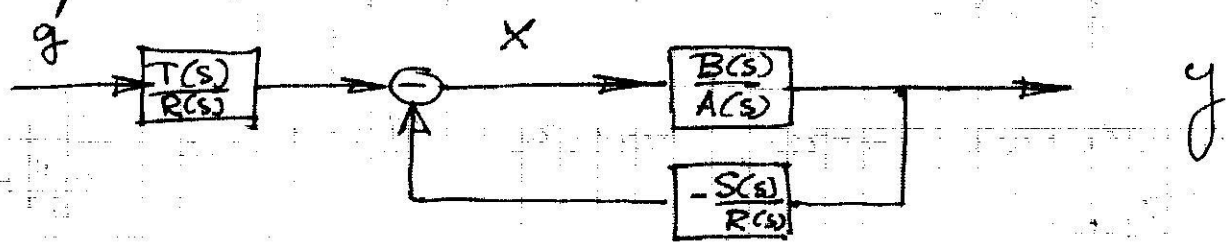
$$s_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{g}{R}} = \pm j \Omega_0.$$

Величина $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 84,6$ мкс
наз. периодом Пулфера.

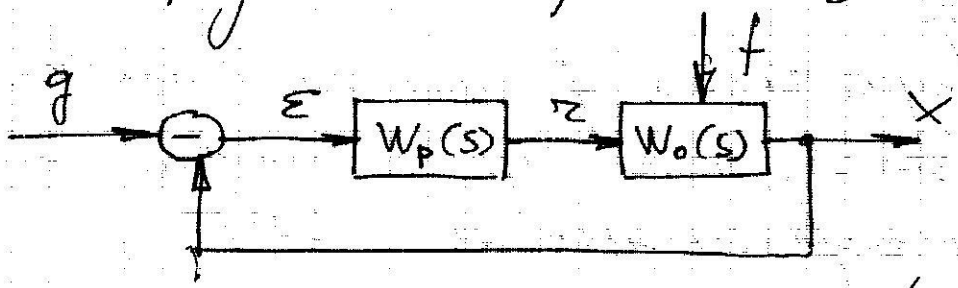
Схема управления с обратной связью



Приведём к экв. схеме:



Передаточные функции замкнутой САУ



Если положить $p = \frac{d}{dt}$, то

$$\begin{cases} D(p) \cdot x(t) = M(p) f(t) + C(p) \cdot z(t); \\ B(p) z(t) = N(p) \epsilon(t); \\ \epsilon(t) = g(t) - x(t). \end{cases}$$

или, в изображениях,

$$\begin{cases} D(s) \cdot X(s) = M(s) \cdot F(s) + C(s) \cdot R(s) + M_{H1}(s); \\ B(s) \cdot R(s) = N(s) \cdot E(s) + M_{H2}(s); \\ E(s) = G(s) - X(s), \end{cases}$$

где $M_{H1}(s), M_{H2}(s)$ — начальные условия

Torga

$$\begin{cases} X(s) = \frac{N(s) \cdot C(s) \cdot G(s) + B(s) M(s) \cdot F(s) + M_H(s)}{D(s) B(s) + C(s) \cdot N(s)} \\ E(s) = \frac{D(s) B(s) \cdot G(s) - B(s) \cdot M(s) \cdot F(s) - M_H(s)}{D(s) \cdot B(s) + C(s) \cdot N(s)} \end{cases}$$

Deja na $D(s) \cdot B(s)$, unuen:

$$\begin{cases} X(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} \cdot G(s) + \frac{V(s)}{1+W(s)} \cdot F(s) + \frac{V_H(s)}{1+W(s)} \\ E(s) = \frac{1}{1+W(s)} G(s) - \frac{V(s)}{1+W(s)} \cdot F(s) - \frac{V_H(s)}{1+W(s)} \end{cases}$$

zge

$$W(s) = \frac{C(s) \cdot W(s)}{D(s) \cdot B(s)}; \quad V(s) = \frac{M(s)}{D(s)}; \quad V_H(s) = \frac{M_H(s)}{D(s)}$$

unuen

$$\begin{cases} X(s) = \Phi(s) \cdot G(s) + Y(s) F(s); \\ E(s) = \Phi_E(s) \cdot G(s) - Y(s) \cdot F(s) \end{cases}$$

npu nyrebox n. y, zge

$$Y(s) = \frac{V(s)}{1+W(s)}; \quad \Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)};$$

$$\Phi_E(s) = 1 - \Phi(s) = \frac{1}{1+W(s)}$$

Ecun $F(s) = 0$, to

$$X(s) = \Phi(s) \cdot G(s); \quad \Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)}$$

Ecun $G(s) = 0$, to

$$X(s) = Y(s) \cdot F(s); \quad Y(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$$

Для разветвленной САУ 2-е уравнение

$$B(p)z(t) = N(p) \cdot g(t)$$

или, в изображениях,

$$B(s) \cdot R(s) = N(s) \cdot G(s) \dots$$

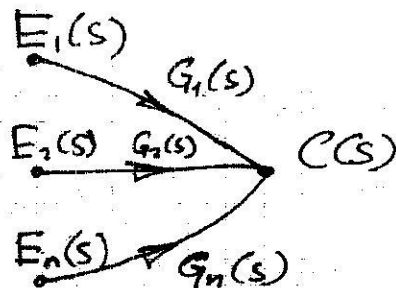
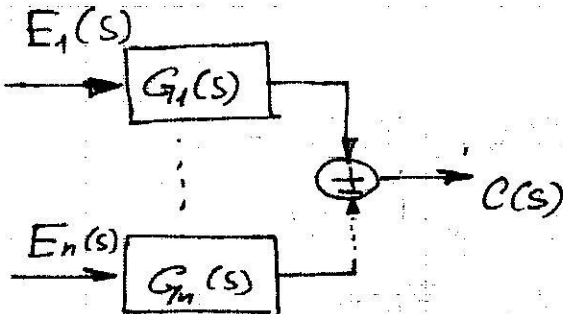
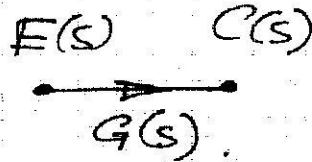
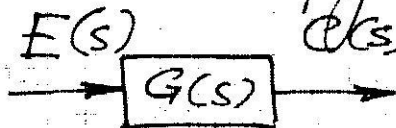
откуда

$$X_p(s) = \frac{M(s)}{D(s)} F(s) + \frac{N(s) \cdot C(s)}{B(s) \cdot D(s)} G(s)$$

либо $F(s) = 0$ $W(s) = \frac{N(s) \cdot C(s)}{B(s) \cdot D(s)}$

либо $G(s) = 0$ $V(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$

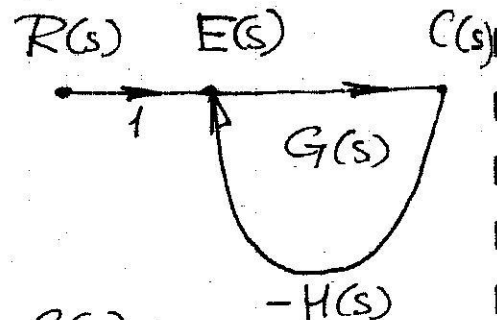
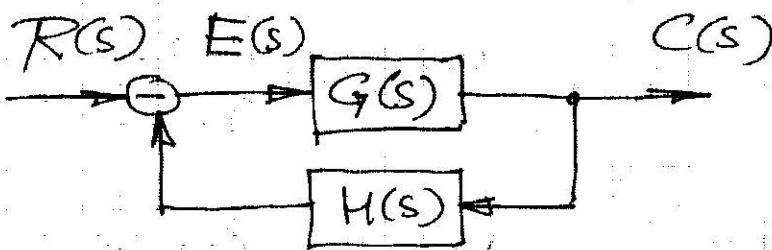
Структурные цепи и графы



Пример.

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - H(s) \cdot C(s) \\ C(s) = G(s) \cdot E(s) \end{cases}$$

$$C(s) = G(s) \cdot E(s)$$



$$C(s) = G(s) \cdot R(s) - G(s)H(s) \cdot C(s);$$

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} \cdot R(s);$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



Можно найти $T(s)$ и др. способами

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & H(s) \\ G(s) & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} E(s) \\ C(s) \end{bmatrix}}_{\bar{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{Y}}$$

или

$$A\bar{X} = \bar{Y}$$

Эту СЛАУ решим методом Крамера

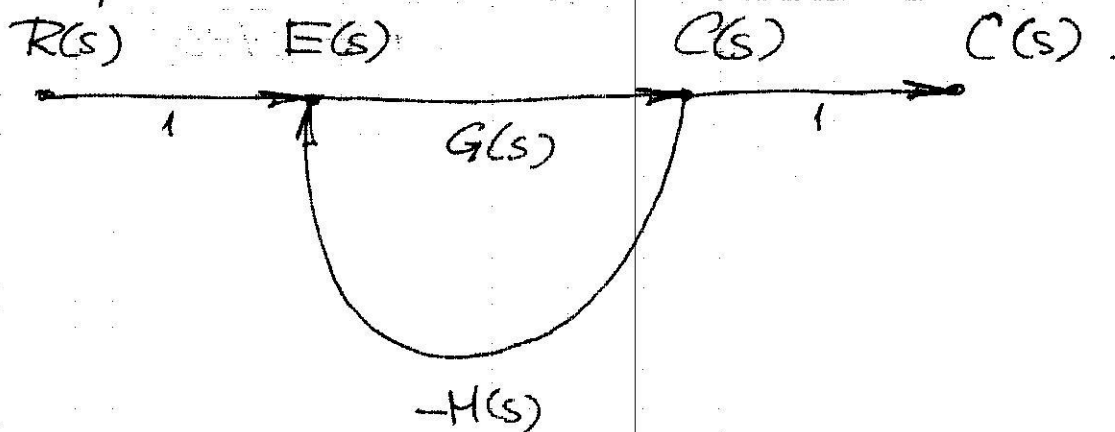
$$C(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & R(s) \\ G(s) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & H(s) \\ G(s) & -1 \end{vmatrix}} = \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

откуда

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Формула Мейсона

Узел-источник - такой, из которого только вытекают; узел-сток - такой, в который только втекают.



Источник - $R(s)$; сток $C(s)$

Коэфф. передачи пути (контура) - число
 введение ^{передаточных функций} всех ветвей, образующих путь
 (контур).

Ф-ла Мейсона:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^P M_k \Delta_k, \text{ где}$$

T - коэфф. передачи от источника к стоку

P - число прямых путей;

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots,$$

где L_i, L_j, L_k - коэфф. передачи контуров;

$(L_i, L_j), (L_i, L_j, L_k), \dots$ не касаются;

M_k - коэфф. передачи k -го прямого пути;

Δ_k - значение Δ для той части графа, края не касается k -го прямого пути.

В нашем случае

$$L_1 = -G(s)H(s);$$

$$\Delta = 1 - L_1 = 1 + G(s)H(s);$$

$$M_1 = 1 \cdot G(s) \cdot 1 = G(s);$$

$$\Delta_1 = 1;$$

$$T(s) = \frac{M_1(s) \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$