За опорную систему координат примем трехгранник $\xi\eta\zeta$, связанный с корпусом прибора. В общем случае трехгранник $\xi\eta\zeta$ вращается в пространстве с угловой скоростью $\overline{\omega}^{пер}$, проекции которой на оси трехгранника есть ω_ξ, ω_η, ω_ζ (рис. 1.2). Свяжем с кольцом трехгранник $x_1 y_1 z_1$ так, чтобы оси x_1 и y_1 были направлены по осям соответственно наружных и внутренних торсионов. Положение кольца и связанного с ним трехгранника $x_1 y_1 z_1$ относительно опорного зададим углами φ и α, определяющими последовательные повороты кольца вокруг осей ζ и y_1. С ротором ДНГ свяжем трехгранник $x' y' z'$ так (рис. 1.3), чтобы ось x' была направлена по оси наружных торсионов, а ось z' — перпендикулярно плоскости ротора. Положение ротора и связанного с ним трехгранника $x' y' z'$ относительно кольца зададим углом β поворота ротора вокруг оси x_1 (x').

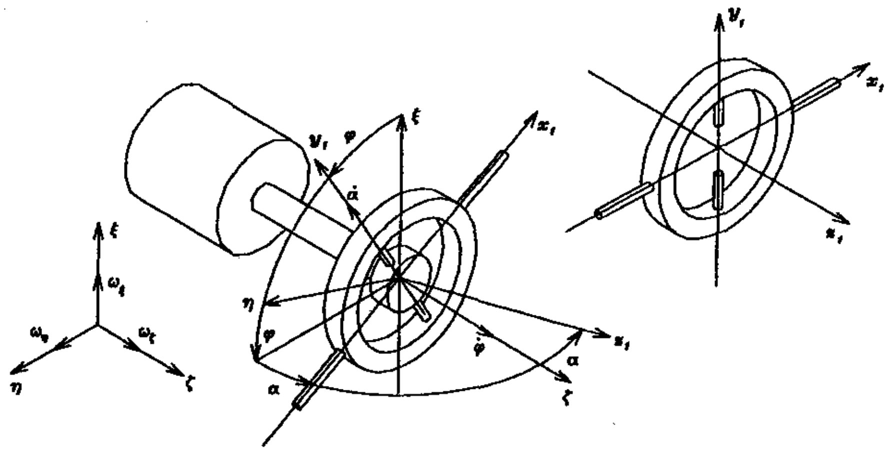

Рис. 1.2. К определению положения кольца

Таким образом, положение трехгранника $x' y' z'$, связанного с ротором, относительно опорного трехгранника $\xi\eta\zeta$ определится углами φ, α, β, как это изображено на рис. 1.3. Удобство такого представления объясняется тем, что последовательные повороты кольца и ротора осуществляются в этом случае вокруг их естественных осей вращения, а именно вокруг оси вала двигателя, осей внутренних и наружных торсионов.

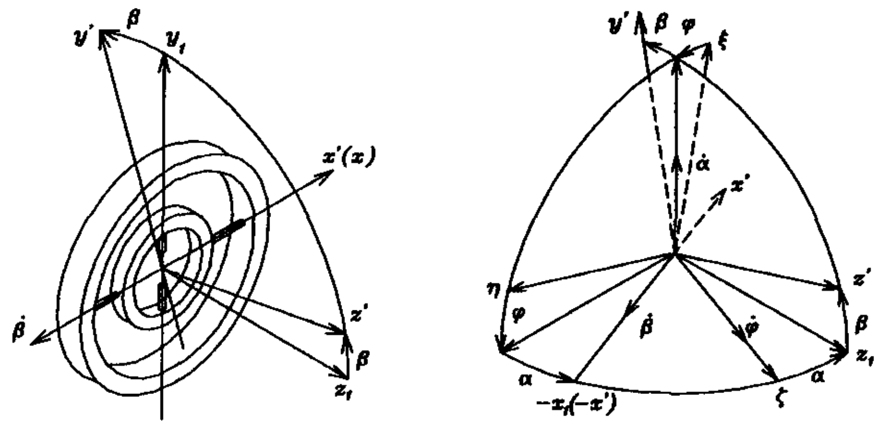

Рис. 1.3. К определению положения ротора

Однако при этом информация о положении вращающегося со скоростью $\dot\varphi$ ротора гироскопа, заключенная в углах α и β, выдается во вращающейся системе координат, что во многих случаях исследований движения ДНГ оказывается неудобным. Кроме того, измерение углов α и β технически затруднено.

Поэтому для задания положения ротора ДНГ используется невращающаяся (астатическая) система координат xyz и другая последовательность поворотов ротора, обычно применяемая для задания положения трехстепенного гироскопа с невращающимся наружным кардановым подвесом. В этом случае положение ротора ДНГ относительно опорного трехгранника $\xi\eta\zeta$ задается углами α_1, β_1, φ_1, причем первый поворот осуществляется относительно оси ξ на угол α_1, а последний — относительно оси z' симметрии ротора на угол φ_1, как это показано на рис. 1.4.

Получим соотношения между углами α, β и α_1, β_1. Для этого запишем выражение для вектора $\overline{\Omega}$ угловой скорости движения ротора относительно трехгранника $\xi\eta\zeta$ в виде геометрической суммы проекций на эти оси угловых скоростей $\dot\varphi$, $\dot\alpha$, $\dot\beta$, (см. рис. 1.3):

$$\overline{\Omega} = (\dot\alpha\cos\varphi - \dot\beta\cos\alpha\sin\varphi)\bar{i} + (\dot\alpha\sin\varphi + \\ + \dot\beta\cos\alpha\cos\varphi)\bar{j} + (\dot\beta\sin\alpha + \dot\varphi)\bar{k}. \tag{1.1}$$

Здесь $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — орты осей ξ, η, ζ. Проецируя на эти оси угловые скорости $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\beta}_1$, $\dot{\varphi}_1$ (см. рис. 1.4), аналогично получаем

$$\begin{aligned}\overline{\Omega} = (\dot{\alpha}_1 + \dot{\varphi}_1 \sin\beta_1)\bar{i} + (\dot{\beta}_1 \cos\alpha_1 - \dot{\varphi}_1 \cos\beta_1 \sin\alpha_1)\bar{j} + \\ + (\dot{\beta}_1 \sin\alpha_1 + \dot{\varphi}_1 \cos\beta_1 \cos\alpha_1)\bar{k}.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Приравнивая коэффициенты при ортах $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ в выражениях (1.1) и (1.2), получаем

$$\begin{aligned}&\dot{\alpha}\cos\varphi - \dot{\beta}\cos\alpha \sin\varphi = \dot{\alpha}_1 + \dot{\varphi}_1 \sin\beta_1;\\ &\dot{\alpha}\sin\varphi + \dot{\beta}\cos\alpha\cos\varphi = \dot{\beta}_1 \cos\alpha_1 - \dot{\varphi}_1 \cos\beta_1 \sin\alpha_1;\\ &\dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\varphi} = \dot{\beta}_1 \sin\alpha_1 + \dot{\varphi}_1 \cos\beta_1 \cos\alpha_1.\end{aligned} \tag{1.3}$$

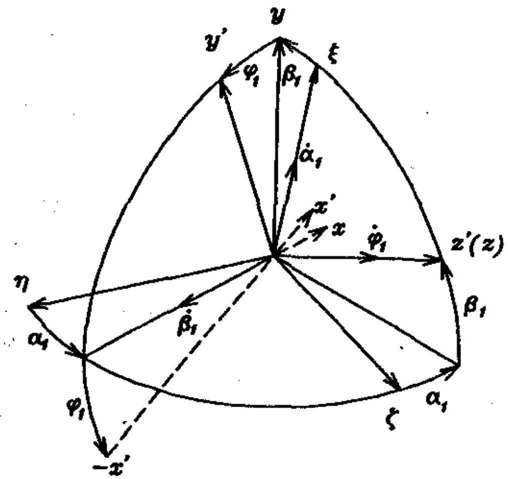

Рис. 1.4. К определению положения ротора

Погрешности ДНГ в значительной степени определяются значениями углов α, β (или α_1, β_1). Поэтому ДНГ применяется только в устройствах, обеспечивающих малость указанных углов, например, в индикаторных гиростабилизаторах (ГС) или в ДУС. В этом случае можно принять, что

$$\begin{aligned}&\sin\alpha \approx \alpha, \quad \sin\beta \approx \beta, \quad \cos\alpha \approx 1, \quad \cos\beta \approx 1,\\ &\sin\alpha_1 \approx \alpha_1, \ \ \sin\beta_1 \approx \beta_1, \ \ \cos\alpha_1 \approx 1, \ \ \cos\beta_1 \approx 1.\end{aligned} \tag{1.4}$$

С учетом (1.4) получаем из (1.3)

$$\begin{aligned}&\dot{\alpha}\cos\varphi - \dot{\beta}\sin\varphi = \dot{\alpha}_1 + \dot{\varphi}_1\beta_1,\\ &\dot{\alpha}\sin\varphi + \dot{\beta}\cos\varphi = \dot{\beta}_1 - \dot{\varphi}_1\alpha_1,\\ &\dot{\beta}\alpha + \dot{\varphi} = \dot{\beta}_1\alpha_1 + \dot{\varphi}_1.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $\dot{\varphi}$ — угловая скорость вращения вала двигателя — известна. Из третьего уравнения (1.5) получаем выражение для $\dot{\varphi}_1$:

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} + \dot{\beta}\alpha - \dot{\beta}_1\alpha_1. \tag{1.6}$$

Поскольку $\dot{\varphi}_1 >> \dot{\beta}$, $\dot{\varphi}_1 >> \dot{\beta}_1$, а углы α и α_1 — малые, можно считать, что

$$\dot{\varphi}_1 \approx \dot{\varphi}. \tag{1.7}$$

Тогда получаем из (1.5) окончательно

$$\begin{aligned}&\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1 \cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\varphi\alpha_1 + \dot{\beta}_1 \sin\varphi + \dot{\varphi}\cos\varphi\beta_1;\\ &\dot{\beta} = -\dot{\alpha}_1 \sin\varphi - \dot{\varphi}\cos\varphi\alpha_1 + \dot{\beta}_1 \cos\varphi - \dot{\varphi}\cos\varphi\beta_1.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Интегрируя и дифференцируя по времени выражения (1.8), получаем с точностью до постоянных интегрирования для $\dot{\varphi}$ = const:

$$\begin{aligned}&\alpha = \alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi;\\ &\beta = -\alpha_1 \sin\varphi + \beta_1 \cos\varphi;\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{\alpha} = \ddot{\alpha}_1 \cos\varphi - 2\dot{\alpha}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}^2\alpha_1 \cos\varphi +\\ &\quad + \ddot{\beta}_1 \sin\varphi + 2\dot{\beta}_1\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\beta_1 \sin\varphi;\\ &\ddot{\beta} = -\ddot{\alpha}_1 \sin\varphi - 2\dot{\alpha}_1\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2\alpha_1 \sin\varphi +\\ &\quad + \ddot{\beta}_1 \cos\varphi - 2\dot{\beta}_1\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}^2\beta_1 \cos\varphi.\end{aligned} \tag{1.10}$$

1.2. Уравнения движения гироскопа

Уравнения движения составим для двух тел механической системы ДНГ — ротора и кольца — на основании динамических уравнений Эйлера. При этом уравнение вала двигателя предполагается известным:

$$\dot{\varphi} = \text{const}.$$

Будем считать, что масса торсионов мала по сравнению с массой ротора и кольца, что дает основание принять торсионы безынерционными упругими элементами. Оси x', y', z', связанные с ротором, x_1, y_1, z_1, связанные с кольцом, а также оси x, y, z считаем главными осями инерции, а центры масс кольца и ротора ДНГ — совпадающими с центром подвеса, куда помещены начала трехгранников $\xi\eta\zeta$, $x'y'z'$, $x_1y_1z_1$, $x\,y\,z$.

1.2.1. Уравнения движения кольца

Составим уравнение движения кольца вокруг оси y_1, отнесенное к вращающемуся трехграннику $x_1\,y_1\,z_1$, с помощью необобщенных динамических уравнений Эйлера. Согласно [5] имеем

$$B_1\dot{\Omega}_{y_1} - (C_1 - A_1)\Omega_{x_1}\Omega_{z_1} = M_{y_1}, \tag{1.11}$$

где A_1, B_1, C_1 — осевые моменты инерции кольца относительно осей x_1, y_1, z_1 соответственно; Ω_{x_1}, Ω_{y_1}, Ω_{z_1} — проекции абсолютной угловой скорости $\overline{\Omega}_1$ движения кольца на оси x_1, y_1, z_1 соответственно; M_{y_1} — момент внешних сил, действующих на кольцо вокруг оси y_1, включая момент реакции $M^R_{y_1}$ со стороны ротора, передаваемый через наружные торсионы.

Абсолютная угловая скорость $\overline{\Omega}_1$ движения кольца составлена из переносной угловой скорости движения трехгранника $\xi\eta\zeta$ — $\overline{\omega}^{\text{пер}}$ и скорости движения кольца относительно опорного трехгранника, определяемой составляющими $\dot{\varphi}$ и $\dot{\alpha}$.

Если обозначить проекции угловой скорости $\overline{\omega}^{\text{пер}}$ на оси x_1, y_1, z_1, связанные с кольцом, через ω_{x_1}, ω_{y_1}, ω_{z_1} соответственно, то выражения для проекций Ω_{x_1}, Ω_{y_1}, Ω_{z_1} абсолютной угловой скорости движения кольца будут иметь следующий вид (см. рис. 1.2):

$$\begin{aligned} \Omega_{x_1} &= -\dot{\varphi}\sin\alpha + \omega_{x_1}; \\ \Omega_{y_1} &= \dot{\alpha} + \omega_{y_1}; \\ \Omega_{z_1} &= \dot{\varphi}\cos\alpha + \omega_{z_1}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

или для малого α и $\dot{\varphi} >> \omega_{z_1}$

$$\begin{aligned} \Omega_{x_1} &\cong -\dot{\varphi}\alpha + \omega_{x_1}; \\ \Omega_{y_1} &\cong \dot{\alpha} + \omega_{y_1}; \\ \Omega_{z_1} &\cong \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Выражения для ω_{x_1}, ω_{y_1} получаются проецированием угловой скорости $\overline{\omega}^{\text{пер}}$ на оси x_1, y_1 согласно рис. 1.5:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= (\omega_\xi \sin\varphi - \omega_\eta \cos\varphi)\cos\alpha - \omega_\zeta \sin\alpha = \\ &= \omega_\xi \sin\varphi\cos\alpha - \omega_\eta \cos\varphi\cos\alpha - \omega_\zeta \sin\alpha; \\ \omega_{y_1} &= \omega_\xi \cos\varphi + \omega_\eta \sin\varphi, \end{aligned} \tag{1.14}$$

или для малого α

$$\omega_{x_1} = \omega_\xi \sin\varphi - \omega_\eta \cos\varphi - \omega_\zeta\alpha;$$
$$\omega_{y_1} = \omega_\xi \cos\varphi + \omega_\eta \sin\varphi.$$

Подставляя выражения (1.13) в уравнение (1.11), получаем

$$\begin{aligned} &B_1\ddot{\alpha} + (C_1 - A_1)\dot{\varphi}^2\alpha = \\ &= -B_1\dot{\omega}_{y_1} + \\ &+ (C_1 - A_1)\dot{\varphi}\,\omega_{x_1} + M_{y_1}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

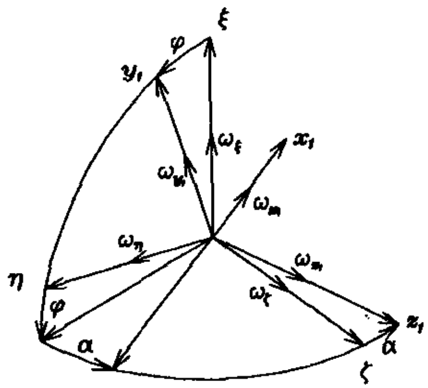

Рис. 1.5. К составлению уравнения движения кольца

Подставляя сюда выражение для ω_{x_1} из (1.14) и учитывая, что на основании (1.14)

$$\dot{\omega}_{y_1} = \dot{\omega}_\xi \cos\varphi - \omega_\xi \dot{\varphi} \sin\varphi + \dot{\omega}_\eta \sin\varphi + \omega_\eta \dot{\varphi} \cos\varphi ,$$

находим

$$B_1\ddot{\alpha} + (C_1 - A_1)\dot{\varphi}^2\alpha = -B_1(\dot{\omega}_\xi \cos\varphi - \omega_\xi\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\omega}_\eta \sin\varphi + \\ + \omega_\eta\dot{\varphi}\cos\varphi) + (C_1 - A_1)\dot{\varphi}(\omega_\xi \sin\varphi - \omega_\eta \cos\varphi - \omega_\xi\alpha) + M_{y_1},$$

или

$$B_1\ddot{\alpha} + (C_1 - A_1)\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \omega_\xi)\alpha = -B_1(\dot{\omega}_\xi \cos\varphi + \dot{\omega}_\eta \sin\varphi) + \\ + (B_1 + C_1 - A_1)\dot{\varphi}\,\omega_\xi \sin\varphi - (B_1 + C_1 - A_1)\dot{\varphi}\,\omega_\eta \cos\varphi + M_{y_1}. \quad (1.16)$$

Здесь M_{y_1} — внешний момент, действующий на кольцо вокруг оси y_1 внутренних торсионов. Он состоит из демпфирующего момента $M_{y_1}^{д}$, упругого момента $M_{y_1}^{т}$ внутренних торсионов и момента $M_{y_1}^{R}$ воздействия на кольцо со стороны ротора, передаваемого через наружные торсионы, жесткость которого вокруг оси y_1 может быть принята бесконечной. Таким образом,

$$M_{y_1} = M_{y_1}^{д} + M_{y_1}^{т} + M_{y_1}^{R}, \quad (1.17)$$

$$M_{y_1}^{д} = -D_\alpha\dot{\alpha}, \quad (1.18)$$

где D_α — коэффициент демпфирования;

$$M_{y_1}^{т} = -k_\alpha\alpha, \quad (1.19)$$

где k_α — жесткость внутренних торсионов.

Подставляя в (1.16) выражения (1.17), (1.18), (1.19) и пренебрегая ω_ζ по отношению к $\dot{\varphi}$, получаем окончательно

$$B_1\ddot{\alpha} + D_\alpha\dot{\alpha} + [k_\alpha + (C_1 + A_1)\dot{\varphi}^2]\alpha = -B_1(\dot{\omega}_\xi \cos\varphi + \dot{\omega}_\eta \sin\varphi) + \\ + (B_1 + C_1 - A_1)\dot{\varphi}\,\omega_\xi \sin\varphi - (B_1 + C_1 - A_1)\dot{\varphi}\,\omega_\eta \cos\varphi + M_{y_1}^{R}. \quad (1.20)$$

1.2.2. Уравнения движения ротора

Составим уравнения движения ротора вокруг осей x и y, отнесенные к системе координат $x\,y\,z$, с помощью обобщенных уравнений Эйлера [5]. Напомним, что трехгранник $x\,y\,z$ участвует во всех движениях ротора, кроме вращения с угловой скоростью $\dot{\varphi}_1$:

$$\frac{d\Theta_x}{dx} + \Theta_z\omega_y - \Theta_y\omega_z = M_x; \\ \frac{d\Theta_y}{dx} + \Theta_x\omega_z - \Theta_z\omega_x = M_y. \quad (1.21)$$

Здесь Θ_x, Θ_y, Θ_z — проекции полного вектора $\overline{\Theta}$ момента количества движения ротора на оси x, y, z; ω_x, ω_y, ω_z — проекции абсолютной угловой скорости трехгранника $x\,y\,z$ на его оси; M_x, M_y — внешние моменты, действующие на ротор вокруг осей x и y.

Выражения для ω_x, ω_y, ω_z получаем, суммируя проекции на оси x, y, z, вектора $\overline{\omega}$ переносной угловой скорости опорного трехгранника $\xi\eta\zeta$, а также угловые скорости $\dot{\alpha}_1$ и $\dot{\beta}_1$ относительно движения трехгранника $x\,y\,z$ (рис. 1.6):

$$\omega_x = -\dot{\beta}_1 - \omega_\eta \cos\alpha_1 - \omega_\zeta \sin\alpha_1; \\ \omega_y = \dot{\alpha}_1 \cos\beta_1 + \omega_\xi \cos\beta_1 - (\omega_\zeta \cos\alpha_1 - \omega_\eta \sin\alpha_1)\sin\beta_1; \quad (1.22) \\ \omega_z = \dot{\alpha}_1 \sin\beta_1 + (\omega_\zeta \cos\alpha_1 - \omega_\eta \sin\alpha_1)\cos\beta_1.$$

Учитывая, что в ДНГ углы α_1 и β_1 очень малы, на основании (1.4) получаем

$$\omega_x = -\dot{\beta}_1 - \omega_\eta - \omega_\zeta\alpha_1; \\ \omega_y = \dot{\alpha}_1 + \omega_\xi - (\omega_\zeta - \omega_\eta\alpha_1)\beta_1; \quad (1.23) \\ \omega_z = \dot{\alpha}_1\beta_1 + (\omega_\zeta - \omega_\eta\alpha_1).$$

Пренебрегая слагаемыми, в которые сомножителями входят малые углы α_1 и β_1, находим окончательно

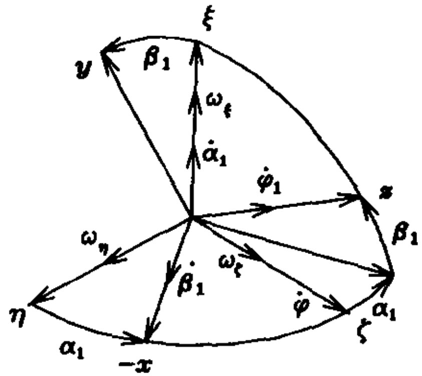

Рис. 1.6. К составлению уравнений движения ротора

$$\omega_x = -\dot\beta_1 - \omega_\eta;$$
$$\omega_y = \dot\alpha_1 + \omega_\xi; \qquad (1.24)$$
$$\omega_z = \omega_\zeta.$$

Выражения для проекций Ω_x, Ω_y, Ω_z абсолютной угловой скорости ротора $\overline{\Omega}$ получим, проецируя на оси $x\,y\,z$ векторное равенство

$$\overline{\Omega} = \overline{\omega} + \overline{\dot\varphi}_1. \qquad (1.25)$$

Тогда с учетом (1.24)

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \omega_x = -\dot\beta_1 - \omega_\eta; \\ \Omega_y &= \omega_y = \dot\alpha_1 + \omega_\xi; \\ \Omega_z &= \omega_z + \dot\varphi_1 \cong \dot\varphi_1 \cong \dot\varphi. \end{aligned} \qquad (1.26)$$

В последнем выражении учтено, что

$$\dot\varphi_1 >> \omega_z.$$

Выражения для проекций Θ_x, Θ_y, Θ_z полного момента количества движения ротора имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta_x &= A\Omega_x = -A(\dot\beta_1 + \omega_\eta); \\ \Theta_y &= A\Omega_y = A(\dot\alpha_1 + \omega_\xi); \\ \Theta_z &= C\Omega_z = C\dot\varphi, \end{aligned} \qquad (1.27)$$

где A и C — осевые моменты инерции ротора относительно осей x, y и z.

Подставим выражения (1.24), (1.27) в уравнения (1.21):

$$-A(\ddot\beta_1 + \dot\omega_\eta) + C\dot\varphi(\dot\alpha_1 + \omega_\xi) - A(\dot\alpha_1 + \omega_\xi)\omega_\zeta = M_x,$$
$$A(\ddot\alpha_1 + \dot\omega_\xi) - A(\dot\beta_1 + \omega_\eta)\omega_\zeta + C\dot\varphi(\dot\beta_1 + \omega_\eta) = M_y.$$

Пренебрегая малыми центробежными моментами, зависящими от произведения малых угловых скоростей $\dot\alpha_1$, $\dot\beta_1$, ω_ξ, ω_η, получаем

$$\begin{aligned} A(\ddot\beta_1 + \dot\omega_\eta) - C\dot\varphi(\dot\alpha_1 + \omega_\xi) &= -M_x; \\ A(\ddot\alpha_1 + \dot\omega_\xi) + C\dot\varphi(\dot\beta_1 + \omega_\eta) &= M_y. \end{aligned} \qquad (1.28)$$

Далее определим состав внешних моментов. Со стороны наружных торсионов на ротор действует момент $M_x^{\text{т}}$, направленный по оси x':

$$M_{x'}^{\text{т}} = k_\beta \beta + D_\beta \dot\beta, \qquad (1.29)$$

где k_β — жесткость наружных торсионов; D_β — коэффициент демпфирования.

Со стороны кольца на ротор действует момент реакции $-M_{y_1}^R$, передаваемый на ротор через наружные торсионы и действующий вокруг оси y_1. Этот момент равен по величине и направлен противоположно моменту $M_{y_1}^R$, определенному из уравнения движения кольца (1.20). Разложим этот момент на составляющие, действующие вокруг осей y' и z' (рис. 1.7):

$$\begin{aligned} -M_{y'}^R &= -M_{y_1}^R \cos\beta \cong -M_{y_1}^R, \\ -M_{z'}^R &= -M_{y_1}^R \sin\beta \cong -M_{y_1}^R \beta. \end{aligned} \qquad (1.30)$$

Момент $M^{\text{д}}$, развиваемый двигателем (за исключением моментов трения шарикоподшипников), действует вокруг оси вращения вала ζ и через внутренние торсионы передается на кольцо. Разложим этот момент на составляющие, направленные по осям η и z_1 (рис. 1.8):

$$\begin{aligned} M_\eta^{\text{д}} &= M^{\text{д}} \mathrm{tg}\alpha \cong M^{\text{д}}\alpha, \\ M_{z_1}^{\text{д}} &= M^{\text{д}} \frac{1}{\cos\alpha} \cong M^{\text{д}}. \end{aligned} \qquad (1.31)$$