Математический анализ
Раздел: операционное исчисление

Тема: ***Дискретное преобразование Лапласа***

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

§ 15. Дискретное преобразование Лапласа

Пусть $f(t)$: $[0; +\infty) \to \mathbb{C}$.

Определим на $\mathbb{Z}$ функцию следующим образом:

$$n \to f(n)\,, \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\}\,,$$
$$n \to 0\,, \qquad \forall n \in \{-1, -2, \ldots\}\,.$$

Эту функцию обозначают $f(n)$ и называют ***решетчатой функцией***.

Функция $f(t)$ называется ***порождающей для*** $f(n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Дискретным преобразованием Лапласа*** *решетчатой функции* $f(n)$ *называют функцию* $F^*(p)$ *комплексного аргумента* $p = \lambda + \mu i$, *определяемую равенством*

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} \cdot f(n) \qquad (1)$$

(предполагается, что ряд в (1) *сходится)*

Решетчатую функцию $f(n)$ называют также ***оригиналом дискретного преобразования Лапласа***, функцию $F^*(p)$ – ***ее изображением***.

Записывают: $F^*(p) \div f(n)$, $f(n) \div F^*(p)$, $\mathrm{D}[f(n)] = F^*(p)$.

Значение $s \in \mathbb{R}$ такое, что при $\lambda = \mathrm{Re}\,p > \mathrm{s}$ ряд (1) сходится, а при $\lambda = \mathrm{Re}\,p < \mathrm{s}$ – расходится, называется ***абсциссой сходимости***.

Доказано:

1) Если $f(t)$ – оригинал обычного (непрерывного) преобразования Лапласа, то $f(t)$ порождает решетчатую функцию, для которой определено дискретное преобразование Лапласа. При этом $s > s_0$, где s_0 – порядок роста $f(t)$.
2) $F^*(p)$ является периодической функцией с периодом $2\pi \mathrm{i}$, аналитической в полуплоскости $\lambda = \mathrm{Re}\,p > \mathrm{s}$.

СВОЙСТВА
ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Будем обозначать $f(n)$, $g(n)$,… – оригиналы, $F^*(p)$, $G^*(p)$,… – их изображения.

1) Линейность дискретного преобразования Лапласа.

Пусть $f(n)$, $g(n)$ – оригиналы, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

Тогда $\alpha f(n)+\beta g(n)$ – оригинал

и $\alpha f(n) + \beta g(n) \div \alpha F^*(p) + \beta G^*(p)$

2) Теоремы опережения и запаздывания.

Пусть $f(n) \div F^*(p)$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$1)\ f(n+k) \div e^{kp} \cdot [F^*(p) - f(0) - f(1)e^{-p} - \ldots - f(k-1)e^{-(k-1)p}] =$$

$$= e^{kp} \cdot \left[F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-mp} \cdot f(m)\right] = e^{kp} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} e^{-np} \cdot f(n)$$

(*теорема опережения*)

В частности, если $f(0) = f(1) = \ldots = f(k-1) = 0$,

то $$f(n+k) \div e^{kp} \cdot F^*(p).$$

2) $f(n-k) \div e^{-kp} \cdot F^*(p)$. (*теорема запаздывания*)

3) Теорема смещения (затухания)

Справедливо утверждение: $F^*(p-\alpha) \div \mathrm{e}^{\alpha n} \cdot f(n)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

4) Дифференцирование изображения

Справедливо утверждение:

$$[F^*(p)]' \div -n \cdot f(n) \,,$$

$$[F^*(p)]'' \div n^2 \cdot f(n) \,,$$

$$[F^*(p)]''' \div -n^3 \cdot f(n) \,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[F^*(p)]^{(k)} \div (-n)^{(\mathrm{k})} \cdot f(n) \,.$$

5) Интегрирование изображения

ТЕОРЕМА 1 (об интегрировании дискретного преобразования Лапласа).

Пусть $f(n) \div F^*(p)$ *и* $f(n)$ *удовлетворяет условиям:*

$$1)\ f(0) = 0\,, \qquad 2)\ \left.\frac{f(t)}{t}\right|_{t=0} = \lim_{t \to +0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

Тогда $\dfrac{f(n)}{n}$ *является оригиналом и*

$$D\left[\frac{f(n)}{n}\right] = \int_p^{\infty} F^*(p)\,dp$$

Замечания.

1) При $f(0) \neq 0$ интеграл $\displaystyle\int_p^{\infty} F^*(p)\,dp$ будет расходящимся.

2) При $\left.\dfrac{f(t)}{t}\right|_{t=0} = a \neq 0$ справедливо утверждение

$$D\left[\frac{f(n)}{n}\right] = a + \int_p^{\infty} F^*(p)\,dp$$

6) Дифференцирование по параметру

Пусть оригинал и изображение содержат параметр ε , не зависящий от n и p и $f(n,\varepsilon) \div F^*(p,\varepsilon)$.

Тогда
$$\frac{\partial f(n,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \div \frac{\partial F^*(p,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}$$

7) Интегрирование по параметру

Пусть оригинал и изображение содержат параметр ε , не зависящий от n и p и $f(n,\varepsilon) \div F^*(p,\varepsilon)$.

Тогда
$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} f(n,\varepsilon)d\varepsilon \div \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F^*(p,\varepsilon)d\varepsilon$$

8) Умножение изображений

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(n)$, $g(n)$ – оригиналы,

$$f(n) \div F^*(p)\ ,\ \ g(n) \div G^*(p)\ .$$

Тогда $F^*(p) \cdot G^*(p) \div \sum_{m=0}^{n} f(n-m)\cdot g(m) = \sum_{m=0}^{n} f(m)\cdot g(n-m)$

9) Изображение разностей

Пусть $f(t)$ – функция действительного переменного,
$\Delta t = h$ – фиксированное приращение аргумента (шаг)

Первой разностью (разностью 1-го порядка) *называется выражение* $f(t+h) - f(t)$.

Обозначают: $\Delta f(t)$.

Разностью второго порядка называют выражение

$$\Delta(\Delta f(t)) = \Delta f(t+h) - \Delta f(t) .$$

Обозначают: $\Delta^2 f(t)$.

Разностью третьего порядка называют выражение

$$\Delta(\Delta^2 f(t)) = \Delta^2 f(t+h) - \Delta^2 f(t) .$$

Обозначают: $\Delta^3 f(t)$.

И т.д.

Разностью k-го порядка называют выражение

$$\Delta(\Delta^{k-1} f(t)) = \Delta^{k-1} f(t+h) - \Delta^{k-1} f(t) .$$

Обозначают: $\Delta^k f(t)$.

В общем случае справедлива формула

$$\Delta^k f(t) = f(t+kh) - C_k^1 f(t+(k-1)h) + C_k^2 f(t+(k-2)h) - \ldots =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot (-1)^j \cdot f(t+(k-j)h)$$

Конечные разности для решетчатой функции принято считать с шагом h = 1 . Для решетчатой функции они играют ту же роль, что производные для непрерывной функции.

Дискретное преобразование Лапласа действует на конечные разности подобно тому, как непрерывное преобразование Лапласа действует на производную.

А именно: если $f(n) \div F^*(p)$,

то $\Delta f(t) \div (e^{p} - 1) \cdot F^*(p) - e^{p} \cdot f(0)$,

$\Delta^2 f(t) \div (e^{p} - 1)^2 \cdot F^*(p) - e^{p} \cdot (e^{p} - 1) \cdot f(0) - e^{p} \cdot \Delta f(0)$,

…………………………………..

$$\Delta^k f(t) \div (e^p - 1) \cdot F^*(p) - e^p \cdot \sum_{j=0}^{k-1} (e^p - 1)^{k-j-1} \cdot \Delta^j f(0)$$

где $\Delta^0 f(0) = f(0)$.

10) Изображение суммы

Если $f(n) \div F^*(p)$, то $$g(n) = \sum_{m=0}^{n-1} f(m) \div \frac{F^*(p)}{e^p - 1}$$

Замечание. Очевидно, что $f(n)$ служит для суммы $g(n)$ первой разностью.

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ

Если известна $F^*(p)$, то $f(n)$ можно найти по формуле

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(p) e^{np} dp$$

где c – любое число $\in \mathbb{R}$, $c > s$ (s – абсцисса сходимости).

Если $F^*(p)$ – правильная рациональная дробь относительно e^p, то справедливо равенство

$$f(n) = \sum_k \operatorname*{res}_{p=p_k} [F^*(p) \cdot e^{(n-1)p}]$$

где p_k – полюсы $F^*(p)$, попадающие в полосу $-\pi < \mathrm{Im}\, p \leq \pi$.

Кроме того, справедлива формула

$$\operatorname*{res}_{p=p_k} [F^*(p) \cdot e^{(n-1)p}] = \operatorname*{res}_{z=z_k} [F^*(z) \cdot z^{(n-1)}]$$

где $F^*(z) \cdot z^{(n-1)}$ – функция, получаемая из $F^*(p) \cdot e^{(n-1)p}$ заменой $z = e^p$; $z_k = e^{p_k}$

РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Разностным уравнением*** *называется уравнение вида* $\Phi_1[n, f(n), \Delta f(n), \ldots, \Delta^k f(n)] = 0$, (1)
где $f(n)$ *– неизвестная решетчатая функция.*

Так как конечные равности $\Delta^k f(n)$ выражаются через $f(n + m)$, то уравнение (1) можно записать в виде

$$\Phi_2[n, f(n), f(n + 1), \ldots, f(n + k)] = 0 \qquad (2)$$

Если уравнение (2) – линейное с постоянными коэффициентами, т.е. имеет вид

$$f(n+k) + a_1 \cdot f(n+k-1) + a_2 \cdot f(n+k-2) + \ldots + a_n \cdot f(n) = \varphi(n) ,$$

где a_j – числа, $\varphi(n)$ – известная решетчатая функция; и заданы начальные условия

$$f(0) = f_0 , \ f(1) = f_1 , \ldots, f(k - 1) = f_{k-1} ,$$

то решение разностного уравнения можно найти с помощью дискретного преобразования Лапласа