

## АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

*Цель работы:* определение параметров автоколебаний нелинейной системы регулирования угла поворота вала двигателя.

### Теоретическая часть

Нелинейными называются системы автоматического регулирования, характеризующиеся нелинейными дифференциальными уравнениями.

Чаще всего нелинейности в САР появляются при использовании технических элементов с существенно нелинейными статическими характеристиками (реле, контакторы, датчики с высоким порогом чувствительности, редукторы и т.п.) или при использовании преобразований сигналов, эквивалентных нелинейным математическим преобразованиям (умножению, делению и т.д.).

Рассмотрим структурную схему системы регулирования угла поворота вала двигателя, в которую для повышения быстродействия включено реле. Статическую характеристику реле будем считать идеальной (рис.1).

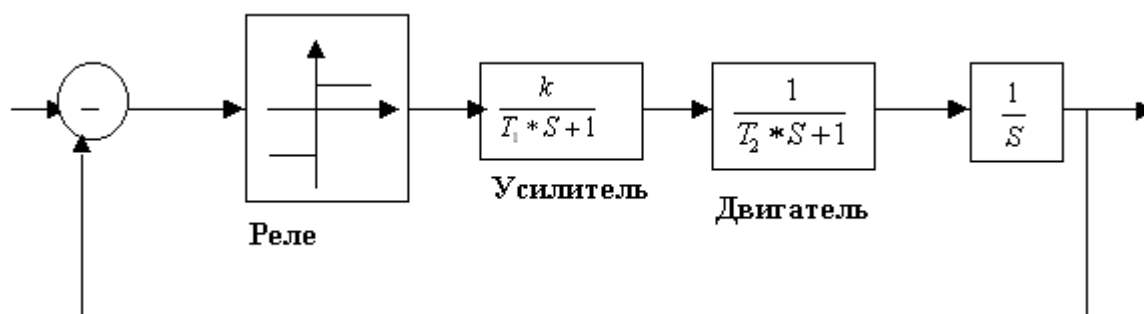


Рис.1.

Принципиальной отличительной особенностью нелинейных систем является возможность появления в системе так называемых автоколебаний, т.е. периодических сигналов с постоянной частотой и амплитудой. Автоколебания характеризуются следующими свойствами:

- не вынуждаются какими-либо внешними периодическими процессами, а представляют собой собственные (свободные) движения системы;
- имеют амплитуду и частоту, которые не зависят от начальных условий, а определяются исключительно параметрами системы;
- возникают не при каком-то одном наборе значений параметров системы, но наблюдаются в некоторой, обычно достаточно широкой, области значений этих параметров.

Для анализа нелинейных систем (с одним существенно нелинейным элементом) используют эквивалентную структурную схему, состоящую из двух

блоков. Один блок характеризует нелинейный элемент, второй - всю линейную часть системы. Например, для системы, схема которой соответствует рис.1, эквивалентная структурная схема приведена ниже (рис.2).

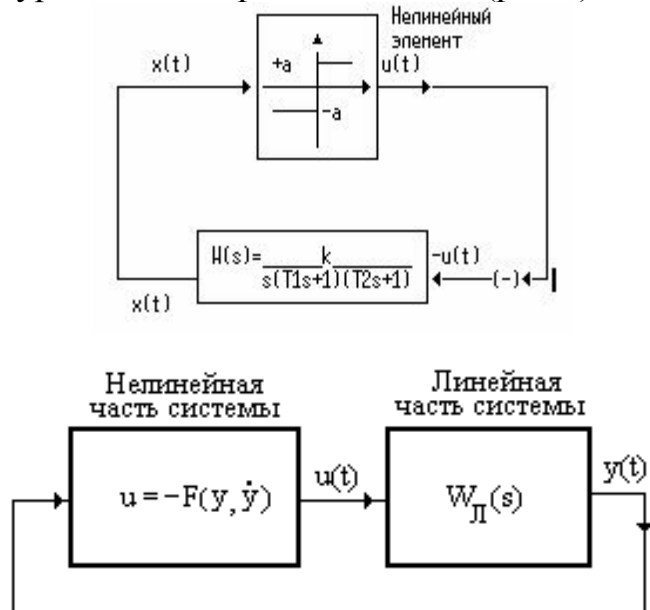


Рис. 2. Структурная схема нелинейной системы.

Элемент сравнения (в большинстве эквивалентных схем он отсутствует) включен в схему для напоминания о том, что в системе существует отрицательная обратная связь.

Для проектирования нелинейных САР широко применяются 2 основных метода: метод фазовой плоскости и метод гармонической линеаризации.

В методе *фазовой плоскости* используется представление переходных процессов в системе в виде графиков (фазовых портретов или фазовых траекторий) в координатной плоскости, осями которой являются: ось выходного сигнала ( $X$ ) и ось производной выходного сигнала ( $Y$ ). Если в системе присутствуют автоколебания, то они изображаются на фазовой плоскости в виде замкнутой кривой, близкой по форме к эллипсу.

Метод *гармонической линеаризации* основан на анализе гармонических свойств линейных и нелинейных элементов системы и не имеет ничего общего с классическими методами линеаризации. Этот метод позволяет заменить имеющуюся нелинейную зависимость линейной функцией специального вида. Например, для идеального реле такая функция имеет вид

$$u(t) = [ 4c/3, 14 A ] x(t). \quad (1)$$

Здесь  $x(t)$  - сигнал на входе нелинейного элемента;

$u(t)$  - сигнал на выходе нелинейного элемента;

$c$  - уровень сигнала на выходе реле;

A - амплитуда гармонического сигнала (на входе реле), для которого справедлива зависимость (1). (Кроме того, A будет характеризовать и амплитуду автоколебаний.)

Существуют различные аналитические способы определения амплитуды и частоты автоколебаний, основанные на применении метода гармонической линеаризации. Рассмотрим один из них.

В соответствии с эквивалентной структурной схемой запишем передаточную функцию линейной части системы в виде

$$W(s) = x(s)/u(s) = - N(s)/L(s), \quad (2)$$

где ( для системы, изображенной на рис.1 )

$$N(s) = k,$$

$$L(s) = s(T_1s + 1)(T_2s + 1) = T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s. \quad (3)$$

Из ( 2 ) получим соотношение

$$L(s)x(s) + N(s)u(s) = 0$$

и переведем его во временную область, используя вместо s оператор дифференцирования p:

$$L(p)x(t) + N(p)u(t) = 0. \quad (4)$$

Подставим в ( 4 ) u(t) из ( 1 ) и получим

$$L(p) x(t) + N(p)[ 4c/3,14 A ] x(t) = 0. \quad (5)$$

Запишем для линейного уравнения ( 5 ) характеристическое уравнение с учетом конкретных N и L

$$\{ T_1T_2 *I^3 + (T_1 + T_2) *I^2 + I \} + k[4c/3,14 A] = 0. \quad (6)$$

Из ( 5 ) можно получить одно из двух уравнений, необходимых для определения параметров автоколебаний A и w. Так как замечено, что при появлении гармонических решений предпоследний определитель Гурвица становится равным нулю, сформируем матрицу Гурвица

$$\begin{bmatrix} (T_1 + T_2) & [4c/3,14A]k & 0 \\ T_1T_2 & 1 & 0 \\ 0 & (T_1 + T_2) & [4c/3,14 A]k \end{bmatrix}$$

Из условия равенства нулю предпоследнего (2-го) определителя найдем

$$A = \frac{4cT_1T_2k}{3,14(T_1 + T_2)} \quad (7)$$

Для получения 2-го уравнения переведем уравнение ( 5 ) в частотную область, т.е. заменим  $I$  на  $jw$  и выделим вещественную  $U(w)$  и мнимую  $V(w)$  составляющие, которые так же, как и вся левая часть ( 5 ), должны быть равны нулю:

$$U(w) = - (T_1 + T_2)w^2 + [4ck/3,14A] = 0;$$

$$V(w) = - T_1T_2w^3 + w = 0.$$

Для вычисления частоты автоколебаний  $w$  может быть взято любое из этих двух уравнений:

$$w^2 = \frac{1}{T_1T_2} \quad (8)$$

Автоколебания в нелинейных системах могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Если при вычислении  $A$  и  $w$  по формулам ( 7 ) и ( 8 ) получились действительные положительные числа, то автоколебания в системе устойчивые.

### ***Порядок выполнения работы***

1. Используя систему Simulink, собрать схему моделирования системы, изображенную на рис.3. Установить нулевой уровень входного сигнала и произвольные ненулевые начальные условия  $X(0)$ ,  $dX(0)/dt$ . Параметры системы взять из табл.1.

Указание: Релейная характеристика находится в библиотеке Simulink Library Browser – Simulink – Nonlinear - Relay. Характеристика элемента библиотеки является гистерезисной, поэтому для преобразования ее в идеальную релейную характеристику необходимо установить следующие параметры:

**Switch on point:0**

**Switch off point:0**

**Output when on (c):1**

**Output when off (-c): -1**

Для построения фазового портрета используется следующий элемент библиотеки :  
Simulink Library Browser – Simulink - Sinks - XY Graph (в данном случае  $y=dx/dt$ ). Блок XY  
Graph имеет два входа – один связан с переменной  $x$ , а другой - с ее производной.

Структурная схема должна иметь вид:

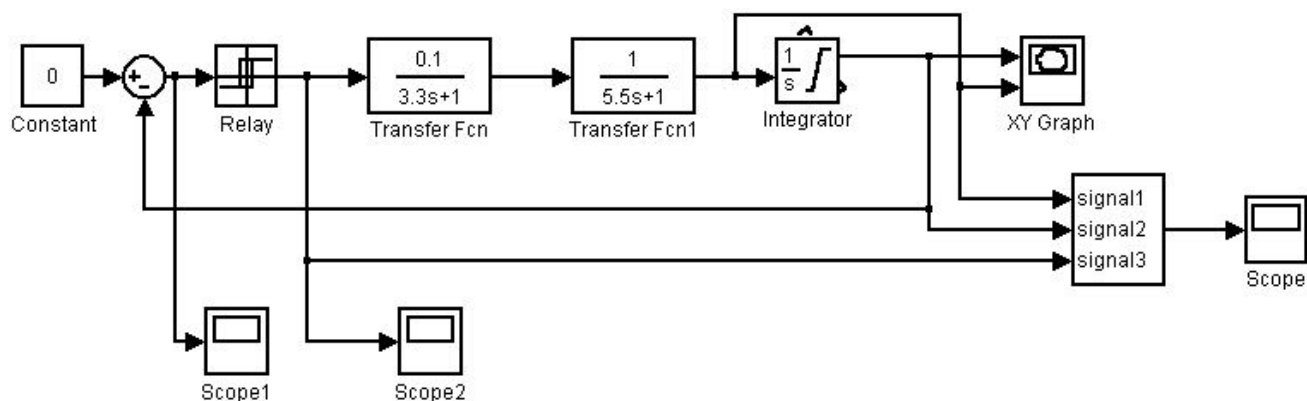


Рис.3

Таблица 1

Номер по списку группы	k	T1	T2
1	8,2	0,1	1,2
2	5	0,2	1,8
3	0,3	2	0,8
4	0,2	1	0,1
5	2,0	0,4	4,4
6	10	0,1	1,5
7	4	1,4	0,2
8	80	0,01	0,2
9	20	0,05	1,0
10	0,5	1,2	4,3
11	0,4	2,2	3,5
12	0,1	3,3	5,5

2. Провести моделирование системы, наблюдать переходный процесс на фазовой плоскости и получить график фазовой траектории.

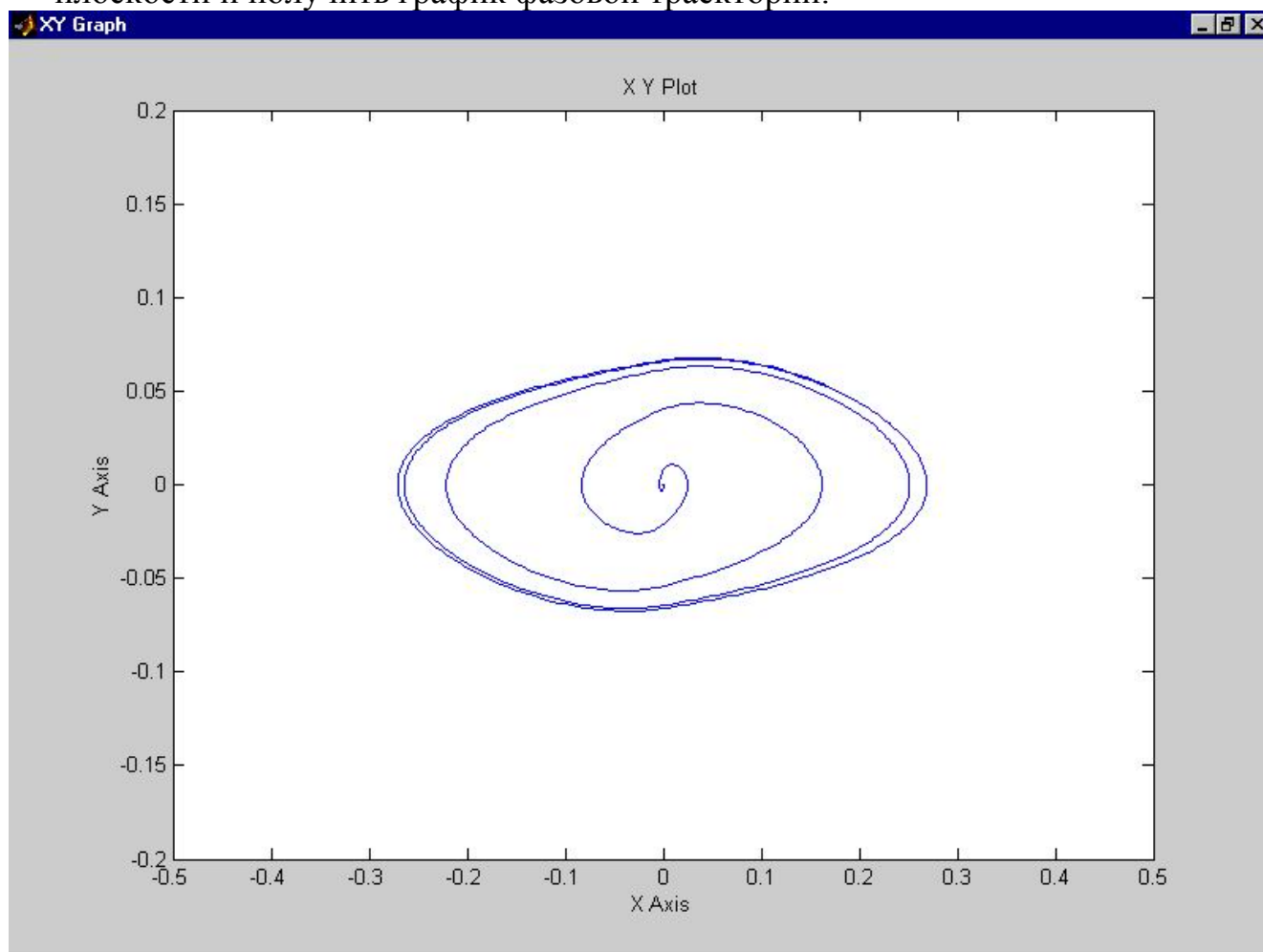


Рис.4

3. Изменить несколько раз произвольным образом начальные условия и убедиться в том, что амплитуда  $A$  и частота  $\omega$  автоколебаний не зависят от начальных условий.
4. Вычислить по формулам (7) и (8) амплитуду и частоту автоколебаний. Измерить параметры автоколебаний по переходному процессу и сопоставить с расчетными.
5. Получить по трем - четырем экспериментам зависимость амплитуды и частоты автоколебаний от коэффициента усиления системы. Сравнить эти результаты с аналитическими из формул (7) и (8) .
6. Получить по трем - четырем экспериментам зависимость амплитуды и частоты автоколебаний от инерционных свойств системы (наибольшей постоянной времени). Сравнить эти результаты с аналитическими из формул (7) и (8).

***Отчет по лабораторной работе должен содержать:***

1. Структурную схему исследуемой нелинейной системы.
2. Копию экрана с фазовой траекторией.
3. Графики аналитических и экспериментальных зависимостей амплитуды и частоты автоколебаний от коэффициента усиления системы.
4. Графики аналитических и экспериментальных зависимостей амплитуды и частоты автоколебаний от максимальной постоянной времени системы.
5. Выводы по работе.