ИНС
В. М. Терешков, ИУ2-93
Пр.: О. С. Салычев, ИУ2

Корректируемые (интегрированные) ИНС

Осн. положения теории оценивания

Понятие переменных состояния

Переменные состояния — вся совокупность параметров модели системы, позволяющая представить эту модель в виде n дифф. ур-й 1-го порядка, где n — порядок модели с-мы.

Пример

Пусть модель с-мы имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + ay = bw; \\ \dot{y} + x = 0 \end{cases}$$

Здесь x, y — выход с-мы, а $w = w(t)$ — входные возмущения. Эта модель имеет 3-й порядок: $n = 3$.

Введем переменные состояния:

$$x_1 = x; \quad x_2 = \dot{x}; \quad x_3 = y.$$

Получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -ax_3 + bw; \\ \dot{x}_3 = -x_1 \end{cases}$$

В векторной форме ур-е примет вид:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot w$$

Как эта, так и любая др. лин. с-ма может быть записана в виде

$\dot{x} = Ax + Bw$, где

$\underset{n\times1}{x}$ – вектор состояния;

$\underset{n\times n}{A}$ – матрица системы;

$\underset{r\times1}{w}$ – вектор входных возмущений (у нас полагаемый белым шумом);

$\underset{n\times r}{B}$ – матрица входа.

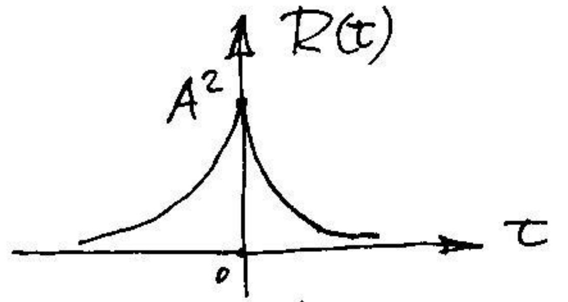
Заметим, что для лин. стационарной с-мы эл-ты матриц A и B не зависят от времени, для нестационарной – зависят.

Белый <u>шум</u> – абсолютно случайный сигнал; его корреляц. ф-ция есть δ-ф-ция, т.е. он никоим образом в своих соседних значениях не корр.; включает все частоты бесконечного спектра с одинаковой амплитудой. Белый <u>шум</u> – матем. фикция, но он удобен для моделирования реальных случайных процессов путем вырезания из спектра белого шума спектра реального процесса (цветного шума). Это осущ. т. н. формирующим фильтром. Под этим фильтром понимается дифф. ур-е, на входе к-рого — белый шум, на выходе — требуемый цветной шум с заданной коррелц. f-цией $R(\tau)$.

<u>Пример:</u>

Пусть нужно смоделировать процесс $x = x(t)$ с коррелц. f-цией

$$R(\tau) = A^2 e^{-\beta|\tau|}.$$



Форм. фильтр имеет тогда вид

$$\dot{x} = -\beta x + A\sqrt{2\beta}\cdot w.$$

Иными словами, форм. фильтр играет роль „окрашивателя" белого шума в любой случайный процесс.

<u>Пример</u>: упрощенная модель ошибок ИНС.

$$\begin{cases} \delta\dot{V}_E = -g\Phi_N; \\ \dot{\Phi}_N = \frac{\delta V_E}{R} + \omega_N^{gp} \\ \dot{\omega}_N^{gp} = -\beta\omega_N^{gp} + A\sqrt{2\beta}\cdot w \end{cases}$$

Если полагать

$x_1 = \delta V_E$; $x_2 = \Phi_N$; $x_3 = \omega_N^{gp}$,

то

$\dot{x} = Ax + Bw$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ 1/R & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A\sqrt{2\beta} \end{bmatrix}$$

Точность модели будет определяться интенсивностью белого шума в правой части ур-й. Чем выше эта интенсивность, тем более неточна модель. При $w(t) \equiv 0$ модель становится детерминированной (абсолютно точной), а процесс — полностью предсказуемым

Представление модели в рекуррентной (дискретной) форме

Пусть дана с-ма ур-й

$\dot{x} = Ax + B\dot{w}$.

Для $t=t_k$

$$\dot{x}(t_k) = Ax(t_k) + Bw(t_k).$$

При малой величине $T=t_{k+1}-t_k$

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1})-x(t_k)}{T};$$

$$x_{k+1}-x_k = ATx_k + BTw_k;$$

$$x_{k+1} = \underbrace{(I+AT)}_{\Phi} x_k + \underbrace{BT}_{G} w_k,$$

где Φ — матрица перехода;
G — дискретная матрица входа;
$x_k = x(t_k)$;
$x_{k+1}=x(t_{k+1})$;
$w_k = w(t_k)$.

Т.о., любая лин. с-ма может быть представлена в дискретной форме в виде ур-я

(SS2) $x_{k+1} = \Phi x_k + G w_k$.

Переменные состояния — те параметры, к-рые позволяют представить с-му в форме (SS1) или (SS2), в то время как реально подлежат измерению лишь некоторые из этих переменных. Поэтому ур-я объекта дополняются ур-ями измерений

$$z_k = Hx_k + v_k,$$ где

$\underset{m\times 1}{z_k}$ – вектор измеряемых величин;

$\underset{m\times n}{H}$ – матрица измерений;

$\underset{m\times 1}{v_k}$ – измерит. шум (у нас полагаемый белым шумом)

Пример:
Пусть объект движется с постоянной скоростью вдоль оси x; измеряется только его координата:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0; \\ z = x + v. \end{cases}$$

В переменных состояния

$x_1 = x$; $x_2 = \dot{x}$

имеем:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}; \quad z = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v$$

или, в дискр. форме,

$$\begin{bmatrix} x^1_{k+1} \\ x^2_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1_k \\ x^2_k \end{bmatrix}$$

Модель об'екта – понятие субъективное, а модель измерений – объективное.

Фильтр Калмана

Постановка задачи фильтра Калмана такова, что на основе модели (SSZ), а также статистической информации о входных W_k и измерительных ϑ_k шумах, измерениях Z_k оценить весь вектор состояния так, чтобы след. ф-ционал принимал минимум:

$$J = tr\left[M\left[\underbrace{(X_k - \hat{X}_k)}_{\tilde{X}_k} \underbrace{(X_k - \hat{X}_k)^T}_{\tilde{X}_k^T} \right] \right] =$$

$$= M\left[\tilde{X}_k^{1\,2} \right] + M\left[\tilde{X}_k^{2\,2} \right] + \ldots + M\left[\tilde{X}_k^{n\,2} \right] \to \min$$

Здесь X_k – вектор состояния;
$\hat{X}_k$ – оценка вектора состояния;
$\tilde{X}_k$ – ошибка оценивания;
tr – след матрицы, т. е. сумма диагональных эл-тов.

Т.о., сумма дисперсий всех компонент X_k должна обращаться в минимум.

Под статистич. х-ками шумов понимаются величины

$$Q_k = M[w_k w_k^T]; \quad R_k = M[v_k v_k^T],$$

к-рые определяют интенсивности шумов w_k, v_k.

Алгоритм фильтра будет включать оценку вектора состояния, описываемую след. ур-ем:

$$\hat{x}_k = \underbrace{\Phi \hat{x}_{k-1}}_{\hat{x}_{k/k-1}} + K_k (z_k - H\Phi\hat{x}_{k-1})$$

Ур-е оценивания (554) состоит из 2 слагаемых. Первое – априорная оценка $\hat{x}_{k/k-1}$ – фактически моделирует детерминированную часть модели объекта (552). Точность этой оценки невелика по 2 причинам: во-первых, неизвестны входные шумы; во-вторых, неизвестно начальное значение вектора состояния. Чтобы подкорректировать $\hat{x}_{k/k-1}$, добавляется второе слагаемое – разность м/у измерениями и их априорной оценкой

Эта разница содержит как ошибку оценивания, так и измерит. шумы. Действительно,

$$z_k - H\underbrace{\Phi\hat{x}_{k-1}}_{\hat{x}_{k/k-1}} = Hx_k + v_k - H\hat{x}_{k/k-1} =$$

$$= H\underbrace{(x_k - \hat{x}_{k/k-1})}_{\tilde{x}_{k/k-1}} + v_k = H\tilde{x}_{k/k-1} + v_k$$

Второе слагаемое входит в оценку с весовым коэффициентом — т. н. матрицей усиления K_k. Норма K_k выбирается так, что если

$$\|H\tilde{x}_{k/k-1}\| \gg \|v_k\|,$$

то $\|K_k\|$ близко к 1; иначе $\|K_k\|$ близко к 0.

Для вычисления оптимального значения K_k исп. 3 рекуррентных ур-я:

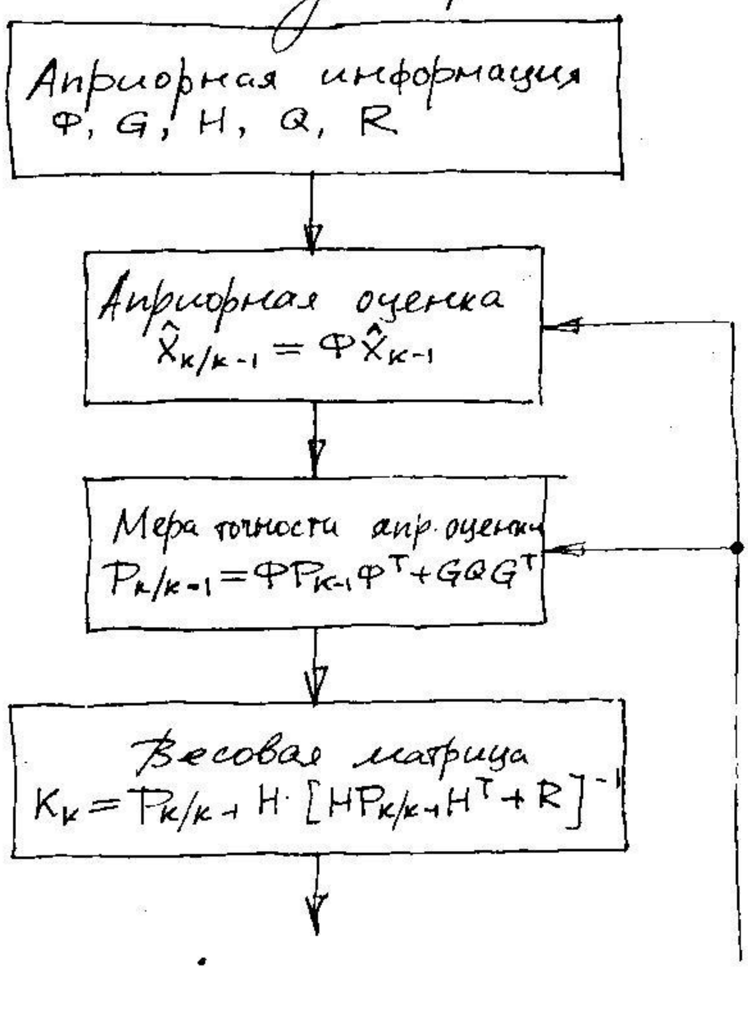
$$\begin{cases} P_{k/k-1} = \Phi P_{k-1}\Phi^T + GQG^T; & (555)\\ K_k = P_{k/k-1}H^T\left(HP_{k/k-1}H^T + R\right)^{-1}; & (556)\\ P_k = (I - K_kH)\cdot P_{k/k-1}. & (557)\end{cases}$$

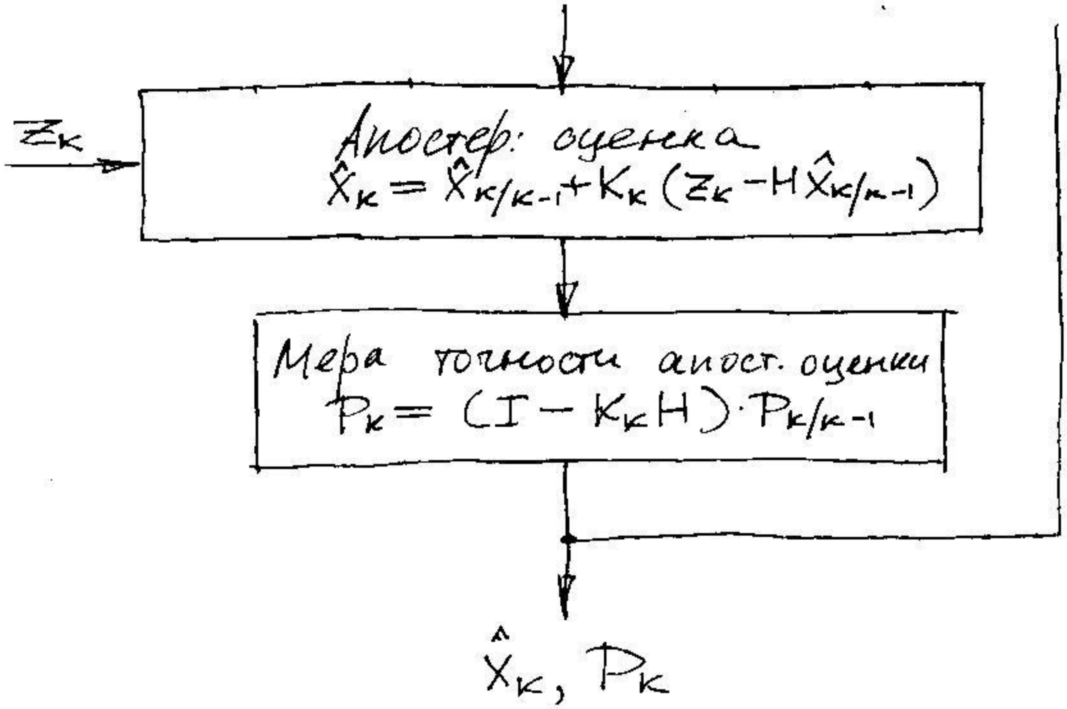
Здесь

$P_{k/k-1} = M[\tilde{X}_{k/k-1} \cdot \tilde{X}_{k/k-1}^T]$ — ковариац. матрица априорной ошибки оценивания.

$P_k = M[\tilde{X}_k \cdot \tilde{X}_k^T]$ — ковариац. матрица апостериорной (окончательной) ошибки оценивания. Х-ет величину ошибки после использования корректирующего слагаемого

Вычислит. блок-схема фильтра представлена диаграммой:





Из схемы следует, что алгоритм не только оценивает вектор состояния, но и определяет точность оценивания на всех этапах ч/з матрицы $P_{k/k-1}$; P_k.

Для инициализации схемы необходимы нач. условия

$$\hat{x}_0 = M[x_0]; \quad P_0 = M[x_0 x_0^T]$$

Поскольку эти величины в действительности неизвестны, то полагают

$$\hat{x}_0 = 0 \quad ; P_0 = diag(x_0^{1^2}, x_0^{2^2}, \dots x_0^{n^2}),$$

где величины $x_0^{i^2}$ завышают.

Понятие наблюдаемости вектора состояния.

Возможность оценивания x_k зависит от его наблюдаемости — возможности определить его начальное значение по текущим измерениям z_k за конечное время.

Определим условие наблюдаемости. Исп. модель

$x_k = \Phi x_{k-1}$,

где нет входных шумов, но это не влияет на наблюдаемость;

$z_k = H x_k$.

Для неск. моментов времени запишем:

$$\begin{cases} z_1 = Hx_1 = H\Phi x_0; \\ z_2 = Hx_2 = H\Phi x_1 = H\Phi^2 x_0; \\ \vdots \\ z_n = Hx_n = \dots = H\Phi^n x_0. \end{cases}$$

или, в матричной форме,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \Phi x_0.$$

Рассматривается матрица наблюдаемости

$$A_H = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Если существует A_H^{-1}, то ур-е (55в) можно разрешить отн. X_0 и, т. о., вектор состояния наблюдаем. Заметим, что матрица Φ всегда имеет обр. матрицу Φ^{-1}.

Пример

Пусть объект движется с постоянной скоростью вдоль оси X; измеряется только его координата:

$$\begin{cases} \ddot{X} = 0; \\ Z = X + v; \end{cases}$$

В переменных состояния

$X_1 = X, \quad X_2 = \dot{X}$

имеем:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix};$$

$$\Phi = I + AT = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

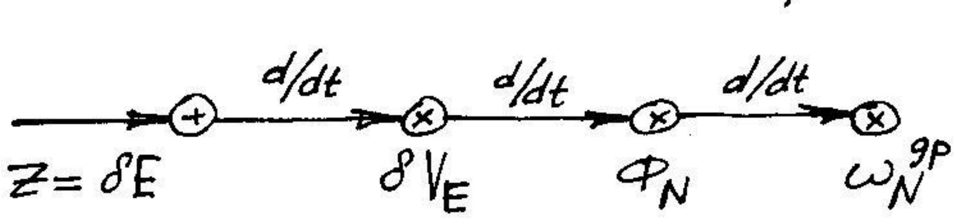
$$Z = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + v.$$

требуются нач. условия); та, к-рая получается дифференцированием, наблюдаема.

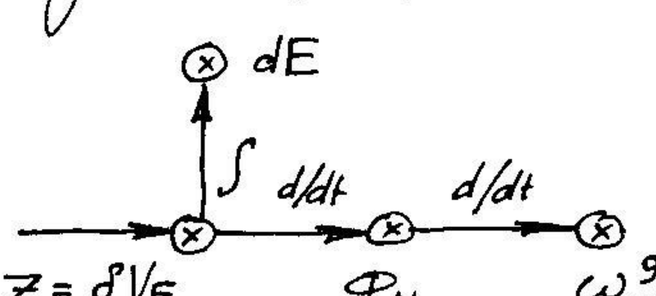
<u>Пример.</u> Ур-е ошибок ИНС

$$\begin{cases} \delta\dot{E} = \delta V_E\,; \\ \delta\dot{V}_E = g\Phi_N\,; \\ \dot{\Phi}_N = \dfrac{\delta V_E}{R} + \omega_N^{\text{др}}\,; \\ \dot{\omega}_N^{\text{др}} = 0 \end{cases}$$

Построим диаграмму наблюдаемости из условия того, что непосредств. измерению подлежит ошибка координат δE.



Пусть измеряется ошибка по скорости

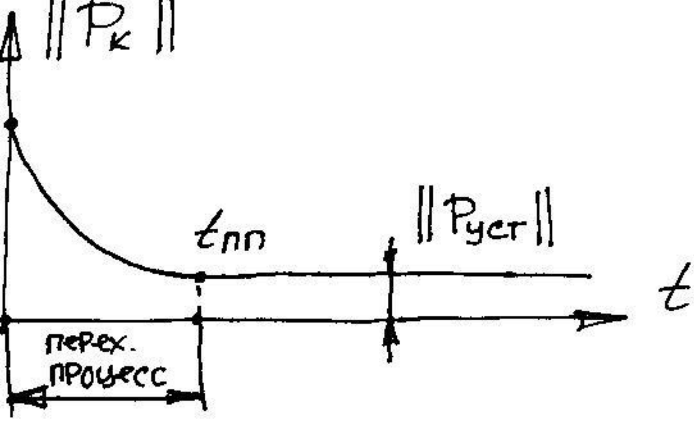


Величина dE во втором случае ненаблюдаема.

Из схем следует, что фильтр Калмана явл. неявным дифференцирующим устр-вом. Неявным потому, чтобы не увеличивать уровень высоко-частотных шумов.

Сходимость фильтра Калмана

Оценки фильтра Калмана с начала процедуры оценивания имеют время сходимости к их истинным значениям, что иллюстрируется след. диаграммой:



Время сходимости $t_{пп}$ будет определяться как размерностью модели (чем больше, тем дольше), так и уровнем измерит. шумов (чем больше, тем дольше). Уст. значение ошибок оценивания $\|P_{уст}\|$ принципиально ограничено уровнем входных шумов. Так, при $Q = 0$ $\|P_{уст}\| = 0$.

Манера сходимости фильтра Калмана последовательная, т.е. те компоненты, к-рые находятся ближе других к измеряемой величине на диаграмме наблюдаемости, сходятся быстрее. Т.о., время $t_{пп}$ определяется сходимостью самой далёкой компоненты.

<u>Пример.</u>

$$\dddot{x} = 0$$

В переменных состояния

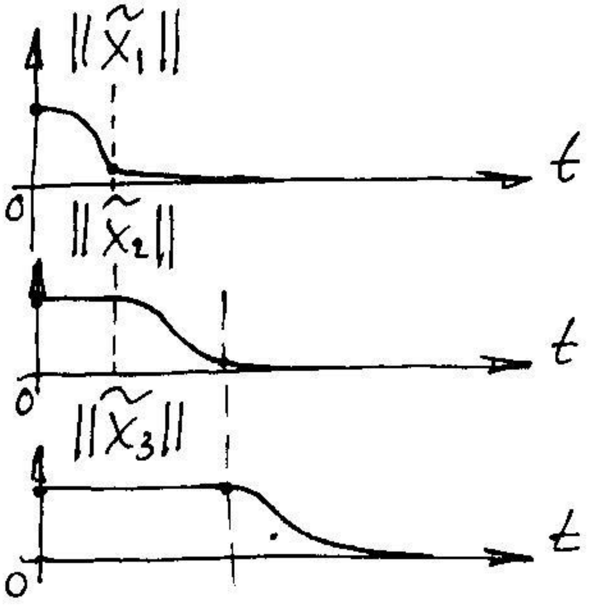
$x_1 = x$; $x_2 = \dot{x}$; $x_3 = \ddot{x}$

имеем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 0. \end{cases}$$

Положим $z = x_1$. Тогда диаграмма наблюдаемости имеет вид:

$$z = x_1 \xrightarrow{d/dt} x_2 \xrightarrow{d/dt} x_3$$



Те компоненты, к-рые сходятся быстро, наз. хорошо (сильно) наблюдаемыми; те, к-рые сходятся медленно, — слабо наблюдаемыми.

Сравним алгоритм фильтра Калмана с простым осреднением. Пусть

$$\dot{x} = 0;$$

$$z = x + v.$$

1). <u>Осреднение</u>

$$\hat{x}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i$$

В рекуррентной форме

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{k}\left(z_k - \hat{x}_{k-1}\right).$$

Точность осреднения, т. е. дисперсия ошибок, имеет вид

$$M[\tilde{x}_k^2] = \frac{M[v^2]}{k}.$$

Пусть $M[v^2] = r$. Тогда

$$M[\tilde{x}_k^2] = \frac{r}{k}.$$

г). <u>Фильтр Калмана</u>

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k(z_k - \hat{x}_{k-1});$$

$$K_k = \frac{P_0}{kP_0 + r};$$

$$M[\tilde{x}_k^2] = P_k = \frac{P_0 r}{kP_0 + r} = \frac{r}{k + \frac{r}{P_0}}.$$

Когда $P_0 \gg r$, т.е. уровень полезного сигнала много больше уровня шума, фильтр Калмана и осреднение дают почти одинаковую точность. Когда $r \gg P_0$, фильтр Калмана обеспечивает намного бо́льшую точность, чем осреднение. Этот эффект обусловлен тем, что фильтр Калмана исп. априорную информацию о соотношении сигнал/шум при вычислении коэфф. усиления, тогда как осреднение — нет. Т.о., использование априорной информации позволяет существенно повысить точность.

Фильтр Калмана при наличии детерминированного управления

Пусть

$$X_k = \Phi X_{k-1} + G W_{k-1} + C u_{k-1};$$
$$Z_k = H X_k + V_k.$$

Единственное отличие от обычной модели состоит в наличии управл. сигнала Cu_{k-1}. В этом случае алгоритм фильтра остается неизменным:

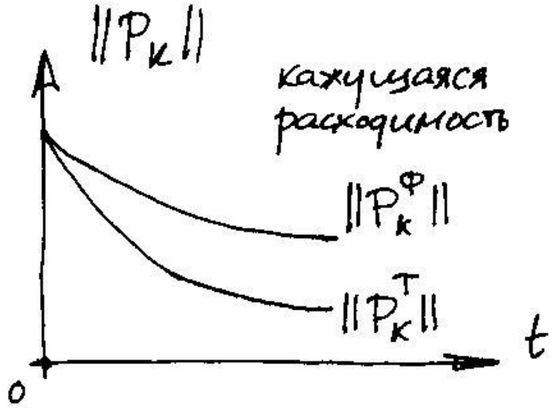
$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (Z_k - H\hat{X}_{k/k-1}),$$

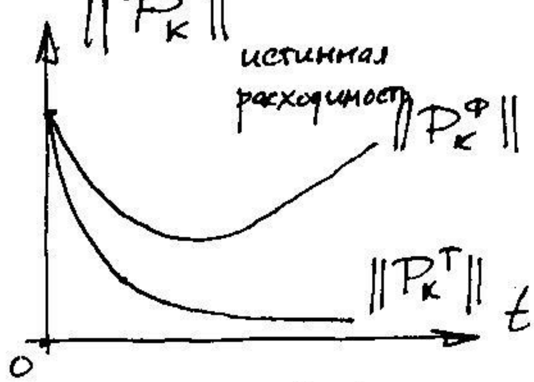
за искл. ф-лы для априорной оценки, к-рая теперь учитывает управление:

$$\hat{X}_{k/k-1} = \Phi \hat{X}_{k-1} + C u_{k-1}$$

Расходимость фильтра Калмана

Теоретически фильтр Калмана явл. устойчивым алгоритмом, т.е. его оценки сходятся с нек-рой точностью к ист. значениям переменных состояния. Однако это утверждение справедливо только в том случае, если априорная информация (модель с-мы и статистика шумов) выбрана правильно. В противном случае возможна расходимость, существующая в двух ипостасях: кажущаяся (apparent) и истинная (true).





Здесь P_k^{Φ} - фактическая ковариац. матрица ошибок; P_k^{T} - теоретич. матрица. При абсолютно правильно выбранной априорной информации $P_k^{\Phi} \equiv P_k^{T}$

Кажущаяся расходимость — случай, когда рассогласование м/у $\|P_k^{\Phi}\|$ и $\|P_k^{T}\|$ не растёт с течением времени. Если рассогласование растёт с течением времени, расходимость истинная.

Кажущаяся расходимость возникает тогда, когда допущенная в описании модели ошибка не явл. критической; т.е. различие м/у истинной моделью и используемой не растёт с течением времени. Иначе расходимость истинная.

<u>Пример</u>

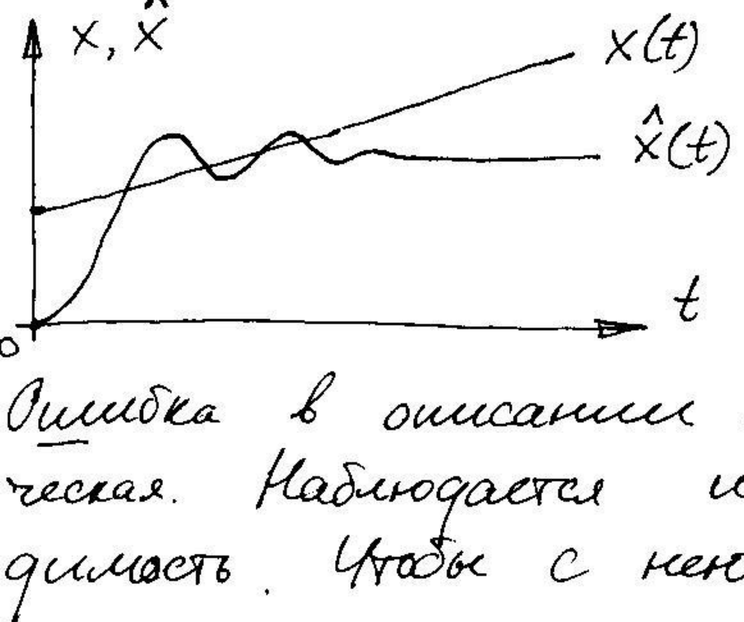
Пусть истинная модель

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ z = x + v \end{cases};$$

а используемая модель

$$\begin{cases} \dot{x} = 0; \\ z = x + v. \end{cases}$$

Тогда получим оценку:



Ошибка в описании модели критическая. Наблюдается истинная расходимость. Чтобы с нею бороться, достаточно пессимистичного взгляда на используемую модель, т.е. необходимо добавить в неё входные шумы.

Влияние входных и измерит. шумов на точность оценивания

Ошибка оценивания фильтром Калмана может быть описана ур-ем:

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k = \Phi x_{k-1} + G w_{k-1} - \Phi \hat{x}_{k-1} - K_k (H\Phi x_{k-1} + HG w_{k-1} + v_k - H\Phi \hat{x}_{k-1}) =$$

$$= \Phi \tilde{x}_{k-1} + G w_{k-1} - K_k (H\Phi \tilde{x}_{k-1} + HG w_{k-1} + v_k) = \qquad \text{(AE1)}$$

$$= (I - K_k H) \cdot \Phi \tilde{x}_{k-1} + (I - K_k H) \cdot G w_{k-1} - K_k v_k .$$

Фильтр Калмана устойчив, поскольку $\|(I-K_k H)\cdot\Phi\| < 1$ и $|\tilde{x}_k|$ с течением времени убывает, стремясь к нулю.

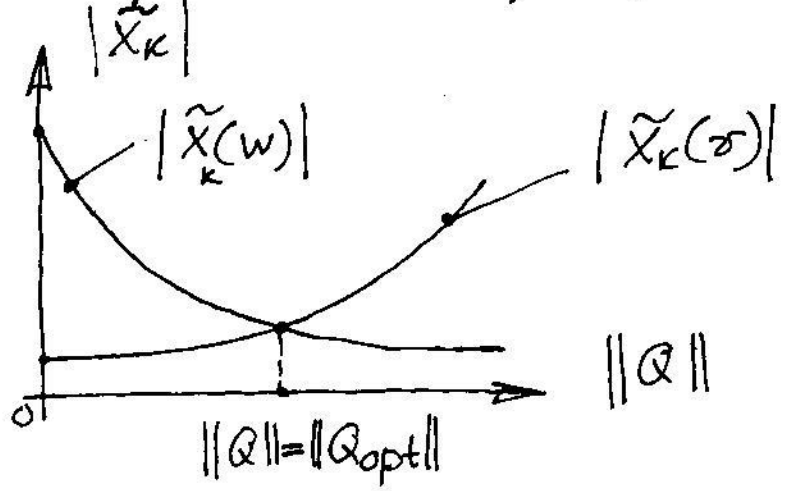
Подставляя в (AE1) само это ур-е k раз, получим:

$$\tilde{x}_k = \left[\prod_{i=1}^{k} (I - K_{k+1-i} H)\Phi \right] \cdot \tilde{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-2} \left[\prod_{i=1}^{j} (I - K_{k+1-i} H)\Phi \right] (I - K_{k-j} H) \cdot G w_{k-j-1} - \sum_{j=0}^{k-1} \left[\prod_{i=1}^{j} (I - K_{k+j-i} H)\Phi \right] \cdot K_{k-j} \cdot v_{k-j} .$$

Здесь второе слагаемое — ошибка оценивания $\tilde{x}_k(w)$, обусловленная входным шумом w; третье слагаемое — ошибка оценивания $\tilde{x}_k(v)$, обусловленная измерит. шумом v; первое слагаемое — ошибка оценивания, обусловленная нач. ошибкой $\tilde{x}_0$ и затухающая со временем.

Физ. интерпретация $\tilde{x}(v)$ — хаотичное поведение ошибок из-за недосглаживания измерит. шума. Влияние же входного шума вызывает временную задержку оценки $\hat{x}(t)$ по сравнению с ист. процессом $x(t)$, причём задержка тем больше, чем меньше $\|Q\|$. Это можно объяснить тем, что входные шумы фильтр может почувствовать только по текущим измерениям, и при коэфф. усиления, близком к единице, задержка минимальна (SS4,5,6). При высоком $\|Q\|$ оценка мало задерживается, но измерит. шумы будут свободно проходить ч/з фильтр. При низком $\|Q\|$ $|\tilde{x}_k(w)|$ будет большим, тогда как $|\tilde{x}_k(v)|$ будет малым. Др.

словами, оценка будет гладкая, но с большой задержкой. Т.о., процесс выбора Q можно проиллюстрировать диаграммой



Аналогично этот процесс можно было описать ч/з коэфф. усиления $\|K_k\|$:

$$\lim_{\|Q\|\to 0} \|K_k\| = \|K_k^{min}\|;$$

$$\lim_{\|Q\|\to \infty} \|K_k\| = \|K_k^{max}\|.$$

Инженерный подход к выбору Q состоит в многократном „прогоне" фильтра при различных Q. При завышенных $\|Q\|$ задержка минимальна, но шумы велики. Верно и обратное. Варьированием Q получают

$$|\tilde{x}_k(w)| \approx |\tilde{x}_k(v)|.$$

Фильтр Калмана-Шмидта

Пусть общая модель с-мы имеет вид:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_k \\ \hline f_k \end{bmatrix}}_{X_k^t} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \Phi & U \\ \hline 0 & \Psi \end{array}\right]}_{\Phi^t} \cdot \begin{bmatrix} X_{k-1} \\ \hline f_{k-1} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \hline \Gamma \end{bmatrix}}_{G^t} \cdot W_{k-1}$$

Здесь X_k^t - общий вектор состояния; Φ, U, Ψ - подматрицы, входящие в состав $\Phi_k^{(t)}$; X_k и f_k - подвекторы состояния, при этом X_k включает только хорошо наблюдаемые компоненты, а f_k - слабо наблюдаемые или вообще не наблюдаемые компоненты.

$$Z_k = \left[\begin{array}{c|c} H & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} X_k \\ \hline f_k \end{bmatrix} + v_k.$$

Требуется оценить только X_k, а f_k не оценивать

Осуществим запись оптимального фильтра Калмана для полного вектора состояния X_k^t:

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ \hline \hat{f}_k \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \Phi & U \\ \hline 0 & \Psi \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{X}_{k-1} \\ \hline \hat{f}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_k^1 \\ \hline K_k^2 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left(Z_k - \left[\begin{array}{c|c} H & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \Phi & U \\ \hline 0 & \Psi \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{X}_{k-1} \\ \hline \hat{f}_{k-1} \end{bmatrix} \right).$$

Для подвекторов $\hat{x}_k$ и $\hat{f}_k$

$$(KS1)\quad \hat{x}_k = \Phi\hat{x}_{k-1} + U\hat{f}_{k-1} + K_k^1 \cdot \left(z_k - H\Phi\hat{x}_{k-1} - HU\hat{f}_{k-1}\right);$$

$$(KS2)\quad \hat{f}_k = \Psi\hat{f}_{k-1} + K_k^2 \cdot \left(z_k - H\Phi\hat{x}_{k-1} - HU\hat{f}_{k-1}\right)$$

По постановке задачи f_k не оценивается, поэтому

$$\hat{f}_{k-1} = 0;$$

$$(KS3)\quad \hat{x}_k = \Phi\hat{x}_{k-1} + K_k^1\left(z_k - H\Phi\hat{x}_{k-1}\right).$$

Запишем ур-е для K_k^1, полученного из общих ур-й алгоритма фильтра Калмана для x_k^t:

$$(KS4)\quad P_k^t = M\left\{\begin{bmatrix}\tilde{x}_k \\ \hline \tilde{f}_k\end{bmatrix}\cdot\left[\tilde{x}_k^T \,\middle|\, \tilde{f}_k^T\right]\right\} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{M\left[\tilde{x}_k\tilde{x}_k^T\right]}^{P_k} & \overbrace{M\left[\tilde{x}_k\tilde{f}_k^T\right]}^{C_k} \\ \hline \underbrace{M\left[\tilde{f}_k\tilde{x}_k^T\right]}_{C_k^T} & \underbrace{M\left[\tilde{f}_k\tilde{f}_k^T\right]}_{D_k} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} P_k & C_k \\ \hline C_k^T & D_k \end{array}\right]$$

В случае отсутствия оценки $\hat{f}_k$ ошибка

$$\tilde{f}_k = f_k - \hat{f}_k = f_k.$$

Ур-я (SS5,6,7) примут вид:

$$
\begin{cases}
P^{t}_{k/k-1} = \Phi^{t} P^{t}_{k-1} (\Phi^{t})^{T} + G^{t} Q (G^{t})^{T}; \\
K^{t}_{k} = \left[\begin{array}{c} K^{1}_{k} \\ \hline K^{2}_{k} \end{array}\right] = P^{t}_{k/k-1} \cdot \left[\begin{array}{c} H^{T} \\ \hline 0 \end{array}\right] \cdot \\
\quad \cdot \left\{ \left[\begin{array}{c|c} H & 0 \end{array}\right] \cdot P^{t}_{k/k-1} \cdot \left[\begin{array}{c} H^{T} \\ \hline 0 \end{array}\right] + R \right\}^{-1}; \\
P^{t}_{k} = \left(I - \left[\begin{array}{c} K^{1}_{k} \\ \hline K^{2}_{k} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} H & 0 \end{array}\right] \right) \cdot P^{t}_{k/k-1}
\end{cases}
$$

Подставляя в последние 3 ур-я выражение (KS4) и перемножая матрицы, получим:

$$
\text{(KS6)} \begin{cases}
P_{k/k-1} = \Phi P_{k-1} \Phi^{T} + \Phi C_{k-1} U^{T} + \\
\qquad + U C^{T}_{k-1} \Phi^{T} + U D_{k-1} U^{T}; \\
C_{k/k-1} = \Phi C_{k-1} \Psi^{T} + U D_{k-1} \Psi^{T}; \\
D_{k/k-1} = \Psi P_{k-1} \Psi^{T} + \Gamma Q \Gamma^{T};
\end{cases}
$$

$$
K^{1}_{k} = P_{k/k-1} H^{T} \cdot \left(H P_{k/k-1} H^{T} + R \right)^{-1};
$$

$$
\text{(KS7)} \begin{cases}
P_{k} = (I - K^{1}_{k} H) \cdot P_{k/k-1}; \\
C_{k} = (I - K^{1}_{k} H) \cdot C_{k/k-1}; \\
D_{k} = D_{k/k-1}
\end{cases}
$$

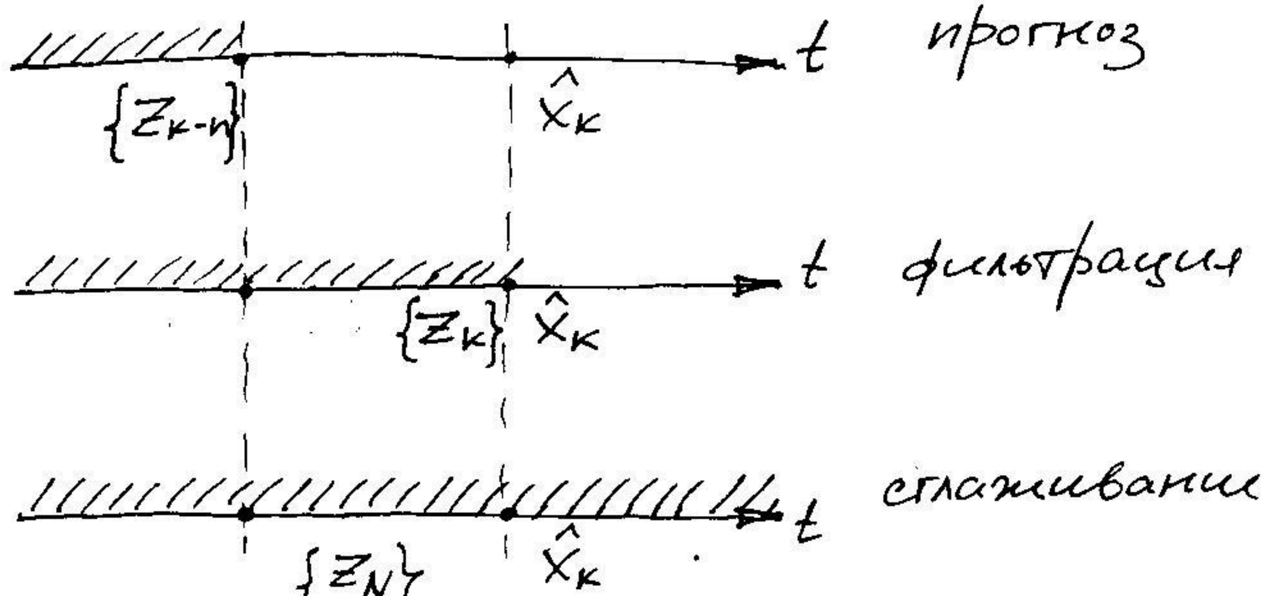
Обозначим

$$Q^* = \Phi C_{k-1} U^T + U C_{k-1}^T \Phi^T + U D_{k-1} U^T.$$

Отказ от оценивания подвектора f_k приводит к тому, что этот подвектор относится к входным шумам. Тем самым, оценка вектора состояния остаётся только для подвектора x_k, а влияние подвектора f_k учитывается в расчёте коэфф. K_k^1 как приведённый вх. шум с матрицей Q^*.

Режимы оценивания

Сущ. 3 режима:



Заштрихован интервал, для к-рого известны измерения $\{z_i\}$.

Задача фильтрации была рассмотрена выше (традиционный фильтр Калмана).

Задачей прогноза явл. оценка вектора состояния на n шагов вперёд в отсутствие измерений.

Задачей сглаживания (только в постобработке) явл. восстановление вектора состояния внутри нек-рого отрезка времени с полной совокупностью измерений

Рассмотрим задачу прогноза.

$$\hat{x}_k = \Phi \hat{x}_{k-1} + K_k (z_k - H\Phi \hat{x}_{k-1});$$

$$\begin{cases} P_{k/k-1} = \Phi P_{k-1} \Phi^T + GQG^T; \\ K_k = P_{k/k-1} H^T (H P_{k/k-1} H^T + R)^{-1}; \\ P_k = (I - K_k H) P_{k/k-1}. \end{cases}$$

Пусть в момент $k+1$ измерения пропадают. Нужно оценить x_k на n шагов вперёд.

Ур-я для прогноза получаются при бесконечном измерит. шуме:

$R=\infty$; $K_k=0$.

Имеем:

(Pr1) $\hat{x}_{k+1}=\Phi\hat{x}_k$;

(Pr2) $P_{k+1/k}=\Phi P_{k/k-1}\Phi^T+GQG^T$.

Тогда

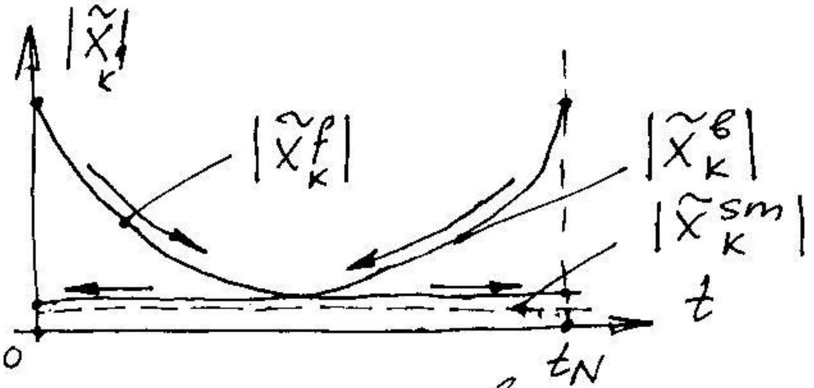
$$\hat{x}_{k+n}=\Phi^n\hat{x}_k.$$

Для определения точности прогноза подставим (Pr2) само в себя n раз:

$$P_{k+n/k}=\Phi^n P_k(\Phi^n)^T+ \\ +\sum_{i=1}^{n-1}\Phi^i GQG^T(\Phi^i)^T.$$

Отсюда следует, что точность прогноза зависит от точности последней оценки, т. е. от $\|P_k\|$, и от уровня вх. шумов в модели, т. е. от $\|Q\|$.

Рассмотрим задачу сглаживания. Осуществим 2 прохода: в прямом („f") и обратном („в") времени.



Идея сглаживания основана на том, что оценка сглаживания является линейной комбинацией оценок в прямом и обр. времени:

$$\hat{x}_k^{sm} = A_k \hat{x}_k^f + (I - A_k) \cdot \hat{x}_k^в . \tag{sm1}$$

Здесь A_k - матричный весовой коэфф., к-рый находится из условия

$$J = tr\, M\Big[\underbrace{(x_k - \hat{x}_k^{sm})}_{\tilde{x}_k^{sm}}(x_k - \hat{x}_k^{sm})^T\Big] \to \min$$

Именно,

$A_k = P_k^в (P_k^в + P_k^f)^{-1}$, где

P_k^f, $P_k^в$ - ковариационные матрицы ошибок оценивания

в прямом и обр. времени.
Для реализации алгоритма необходимы 3 этапа:
- фильтр прямого времени с запоминанием $\hat{x}_k^f$ и P_k^f;
- фильтр обратного времени с запоминанием $\hat{x}_k^b$ и P_k^b;
- собственно сглаживание по ф-ле (Sm1)

В реальности исп. идентичная процедура, но с меньшим объемом вычислений:

$$(Sm2)\quad \hat{x}_k^{sm} = \hat{x}_k^f + K_k^{sm}\left(\hat{x}_{k+1}^{sm} - \Phi \hat{x}_k^f\right);$$
$$(Sm3)\quad K_k^{sm} = P_k^f \Phi^T \left(\Phi P_k^f \Phi^T + Q\right)^{-1}$$

с нач. условием
$\hat{x}_N^{sm} = \hat{x}_N^f$.

Ф-ла (Sm2) совмещает 2 и 3 этапы традиционного алгоритма.

Сравним ф-лы (SS6) и (Sm2)

Фильтрация	Сглаживание
H	Φ
$P_{k/k-1}$	P_k^f
R	Q
.	

Из таблицы следует, что если фильтр Калмана сглаживает измерит. шумы, то сглаживающее устр-во исключает влияние вх. шумов. Это происходит оттого, что влияние вх. шумов — задержка оценки во времени. При этом оценки $\hat{x}_k^f$ и $\hat{x}_k^b$ имеют одинаковые задержки, но в разных направлениях, так что их комбинация не имеет задержки.

Адаптивный фильтр Калмана 1 и 2 рода

Под адаптацией понимается св-во алгоритма ф-ционировать при отсутствии к.-л. априорной статистич. информации. Адапт. фильтр исп. обр. связь по ошибке оценивания к процедуре вычисления K_k. Реальную ошибку оценивания можно получить ч/з обновляющую послед-ть

$$\nu_k = z_k - H\hat{x}_{k/k-1} =$$

$= HX_k + v_k - H\hat{X}_{k/k-1} = H\tilde{X}_{k/k-1} + v_k$.

Этот процесс обладает след. св-вами:

$M[\nu_k] = 0$;

$C_k = M[\nu_k \nu_k^T] = HP_{k/k-1}H^T + R$.

Использование $\{\nu_k\}$ позволяет „почувствовать" влияние реальных ошибок оценивания и соотв. образом откорректировать K_k.

Рассмотрим адапт. фильтр 1 рода (отсутствует информация о матрице R). В этом случае оценка R выбирается на основе послед-ти $\{\nu_k\}$:

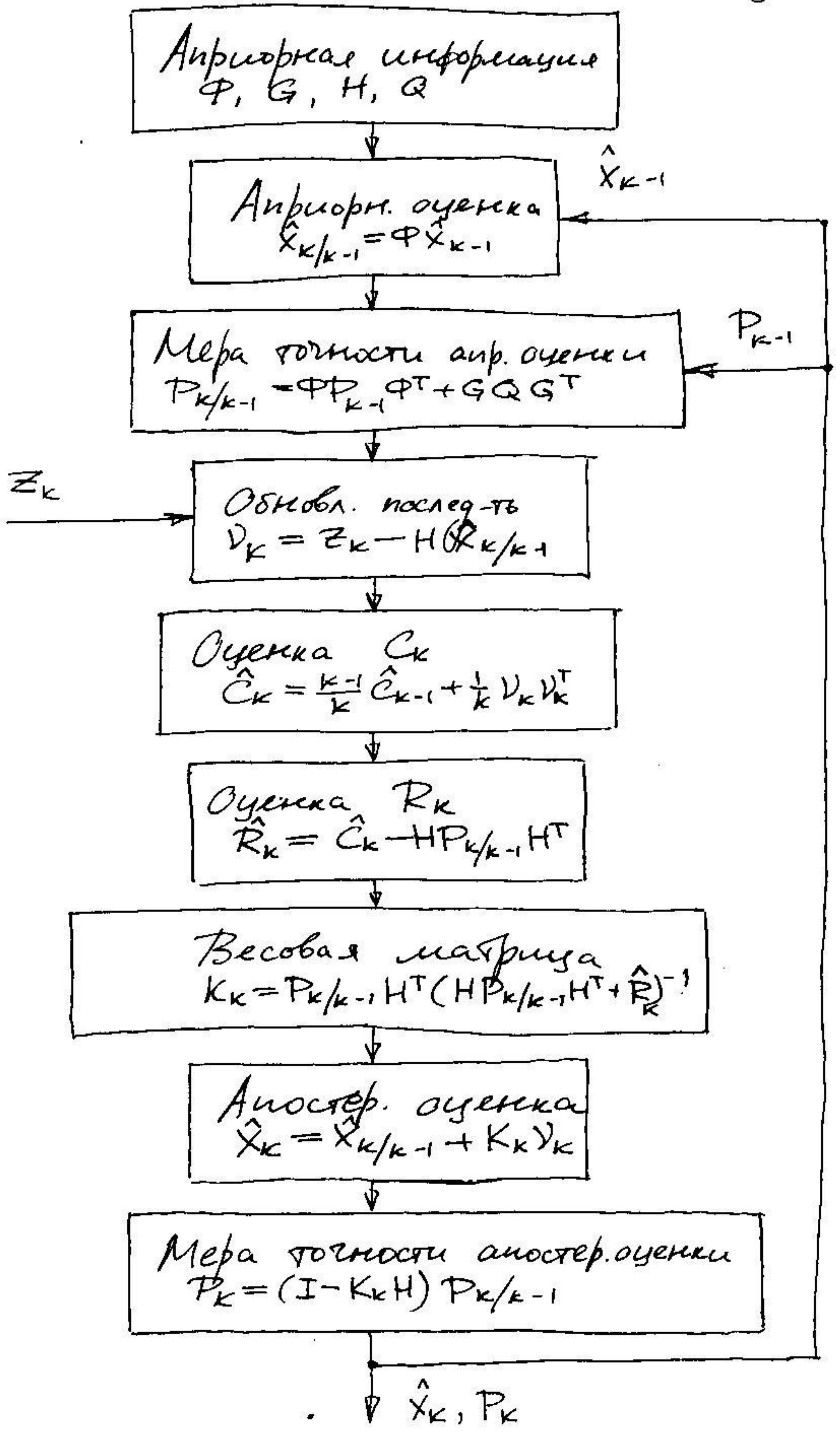
$$(AF1)\quad \hat{R}_k = \hat{C}_k - HP_{k/k-1}H^T;$$

$$(AF2)\quad \hat{C}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \nu_i \nu_i^T.$$

Для реализации (AF2) в рекуррентной форме можно исп. ф-лу

$$\hat{C}_k = \frac{k-1}{k}\hat{C}_{k-1} + \frac{1}{k}\nu_k \nu_k^T.$$

В этом случае вычислит. схема адапт. фильтра примет вид:



Предлагаемая схема в случае скачков измерит. шума увеличивает $\|\hat{C}_k\|$, $\|\hat{R}_k\|$, снижает $\|K_k\|$, так что аномальные измерения не засчитываются в фильтре Калмана.

Рассмотрим адапт. фильтр 2 рода (отсутствует информация о матрице Q).

Запишем ур-е модели:

$$x_k = \Phi x_{k-1} + G w_{k-1}.$$

Перепишем его относительно оценок:

$$\text{(AF3)} \quad \hat{x}_k - \Phi \hat{x}_{k-1} = G \hat{w}_{k-1}.$$

Кроме того,

$$\hat{x}_k = \Phi \hat{x}_{k-1} + K_k \nu_k$$

или

$$\text{(AF4)} \quad \hat{x}_k - \Phi \hat{x}_{k-1} = K_k \nu_k.$$

Приравнивая правые части (AF3) и (AF4), получим:

$$G \hat{w}_{k-1} = K_k \nu_k$$

или, для ковариац. матриц,

$$G\hat{Q}G^T = K_k C_k K_k^T$$

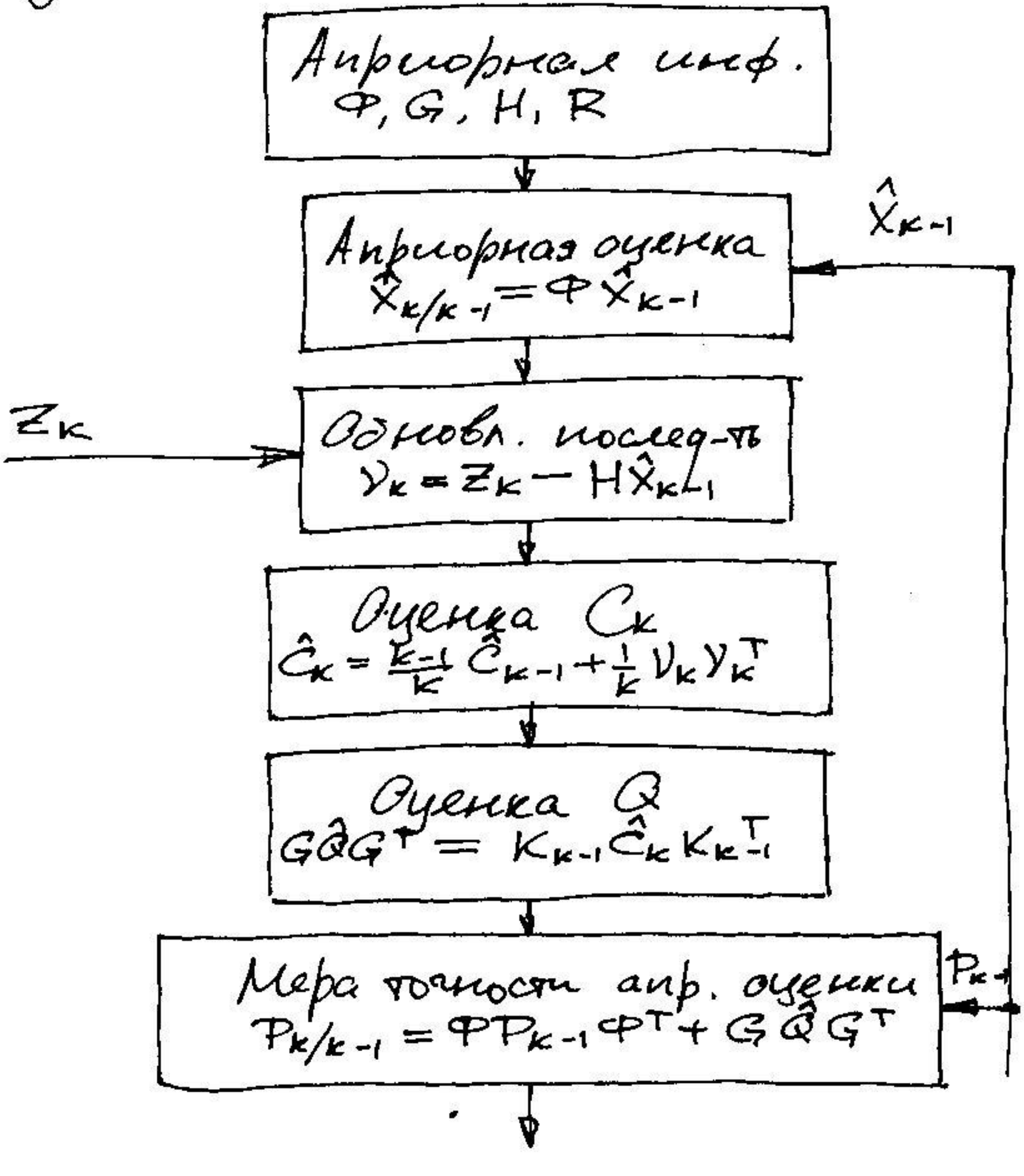
Заметим, что для соседних тактов можно считать

$$K_k = K_{k-1}.$$

Поэтому

$$(AF5)\quad G\hat{Q}G^T = K_{k-1} C_k K_{k-1}^T.$$

С учетом (AF5) вычислит. схема адапт. фильтра примет вид:



Весовая матрица
$K_k = P_{k/k-1} H^T \cdot (H P_{k/k-1} H^T + R)^{-1}$

Апостер. оценка
$\hat{X}_k = \Phi \hat{X}_{k/k-1} + K_k \nu_k$

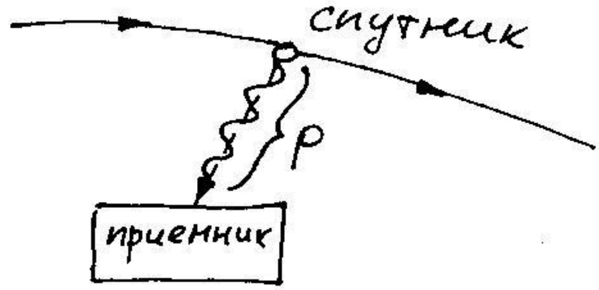
Мера точности апост. оценки
$P_k = (I - K_k H) P_{k/k-1}$

$\hat{X}_k, P_k$

При неадекватности модели реальному процессу возрастают $\|C_k\|$, $\|Q\|$, $\|K_k\|$, т.е. фильтр мгновенно учитывает текущие измерения с большим весом.

Спутниковые навигационные с-мы (GPS, Glonass)

Спутниковая навигац. с-ма включает 24 спутника, к-рые расположены на таких орбитах, что в любой момент времени из любой точки пов-сти Земли наблюдается не менее 4 спутников.



$\tilde{\rho} = c[\tilde{t}_B - t_A]$, где

$\tilde{\rho}$ – псевдорасстояние от спутника до приёмника;

c – скорость света;

t_A – момент испускания сигнала по часам спутника,

$\tilde{t}_B$ – момент приёма сигнала по часам приемника.

$$\tilde{\rho} = \underbrace{c[t_B - t_A]}_{\rho} + c\Delta T, \text{ где}$$

ρ – истинное расстояние;

ΔT – ошибка рассинхронизации часов.

Пусть одновременно приёмник получает сигналы от 4 спутников, т.е. измеряются 4 псевдорасстояния $\tilde{\rho}_1, \dots \tilde{\rho}_N$, $N=4$

$$\tilde{\rho}_i = \sqrt{(x^{si}-x^r)^2+(y^{si}-y^r)^2+(z^{si}-z^r)^2} + c\Delta T$$

Величины $x^{si}, y^{si}, z^{si}, t_A$ содержатся в сообщении от спутника.

Рассчитав $\tilde{\rho}_i$, из полученной с-мы 4 ур-й можно найти 4 неизвестных $x^{r}, y^{r}, z^{r}, \Delta T$. Для решения этой с-мы необходима линеаризация:

$$\tilde{\rho}-\tilde{\rho}_0=\delta\tilde{\rho}=\left.\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x}\right|_{x^{r0}}\cdot\delta x+\left.\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial y}\right|_{y^{r0}}\cdot\delta y+\left.\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z}\right|_{z^{r0}}\cdot\delta z+c\Delta T;$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x}\right|_{x^{r0}}=-\frac{x^{s}-x^{r0}}{\tilde{\rho}_0};$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial y}\right|_{y^{r0}}=-\frac{y^{s}-y^{r0}}{\tilde{\rho}_0};$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial z}\right|_{z^{r0}}=-\frac{z^{s}-z^{r0}}{\tilde{\rho}_0};$$

$$\delta x=x^{r}-x^{r0};$$
$$\delta y=y^{r}-y^{r0};$$
$$\delta z=z^{r}-z^{r0}.$$

В матричной форме

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}_{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial\tilde{\rho}^1}{\partial x} & \frac{\partial\tilde{\rho}^1}{\partial y} & \frac{\partial\tilde{\rho}^1}{\partial z} & c \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \\ & & \cdot & \end{bmatrix}}_{H} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \Delta T \end{bmatrix}}_{x};$$

$$z = Hx.$$

Здесь z - текущие измерения приращений расстояний; H - матрица измерений; x - вектор неизвестных приращений координат.

В соотв. с методом наименьших квадратов

$\hat{x} = H^{\#} z$, где

$H^{\#} = (H^T H)^{-1} \cdot H^T$ - псевдообратная матрица измерений.

Так определяются координаты приемника и рассинхронизация часов.

Х-кой геометрии созвездия спутников явл. т.н. DOP (Dilation of precision — распределение точности).

Пусть есть измерит. шумы:

$z = z_{ист} + v$;

$$\hat{x} = H^{\#} z = H^{\#} z_{ист} + H^{\#} v =$$
$$= H^{\#} z_{ист} + \underbrace{(H^T H^{-1}) \cdot H^T v}_{\tilde{x}}.$$

Из последнего ур-я следует, что ошибка $\tilde{x}$ определения координат зависит как от точности измерения псевдорасстояний (шума v), так и от матрицы $H^{\#}$, т. е. от геометрии наблюдаемых спутников. Численной х-кой последней завис-ти и служит

$$DOP = tr[(H^T H)^{-1}].$$

При $DOP < 12$ показаниям с-мы можно доверять.

Ошибки измерения псевдорасстояний складываются из след. величин:

$\delta\tilde{\rho} = OE + AD + Mp + RE + TDr + TE$, где

OE - орбитальные ошибки, обусловл. неточностью знания коорд. спутника на орбите;

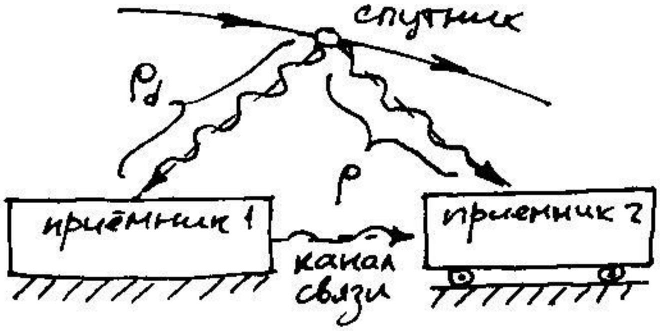
RE – шумы приемника.
TE – ошибки, обусловленные погрешностью времени;
TDr – ошибка дрейфа часов;
AD – атмосферная задержка сигнала, влияющая на скорость распространения сигнала.
Mp – ошибки, обусловленные влиянием отраженных от препятствий сигналов.

Величина $\delta \tilde{p} = (2 \div 3)$ м, так что общая ошибка определения координат при низком DOP составляет $(5 \div 6)$ м.

Приемники имеют конечную полосу пропускания, поэтому возникает задержка ок. 0,1 с по координатам и ок. 0,3 с по скорости.

Дифф. метод измерения координат

Пусть в неподв. точке уст. приемник 1 (базовая станция); на движущемся объекте – приемник 2.



Для базовой станции координаты $X_{ист}$ известны, поэтому известна и величина

$$\delta X = X_{ист} - \hat{X},$$

называемая дифф. поправкой. Эта поправка передаётся по каналу связи на подвижный объект. и вычитается из показаний приемника 2. При этом почти все низкочастотные погрешности с-мы будут скомпенсированы, так что итоговая среднеквадратич. погрешность составляет ок. 1 м, но она принципиально зависит от расстояния м/у приемниками 1 и 2. После (20 ÷ 30) км точность повышается очень незначительно.

Дифф. метод обычно исп. при выполнении посадки летат. аппаратов.

Кол-во каналов приемника — это кол-во независимых связей для получения сигналов от спутников. Совр. приёмники имеют (8÷12) каналов.

Обычно принимаются в расчёт только сигналы тех спутников, к-рые находятся не ниже 10° над горизонтом.

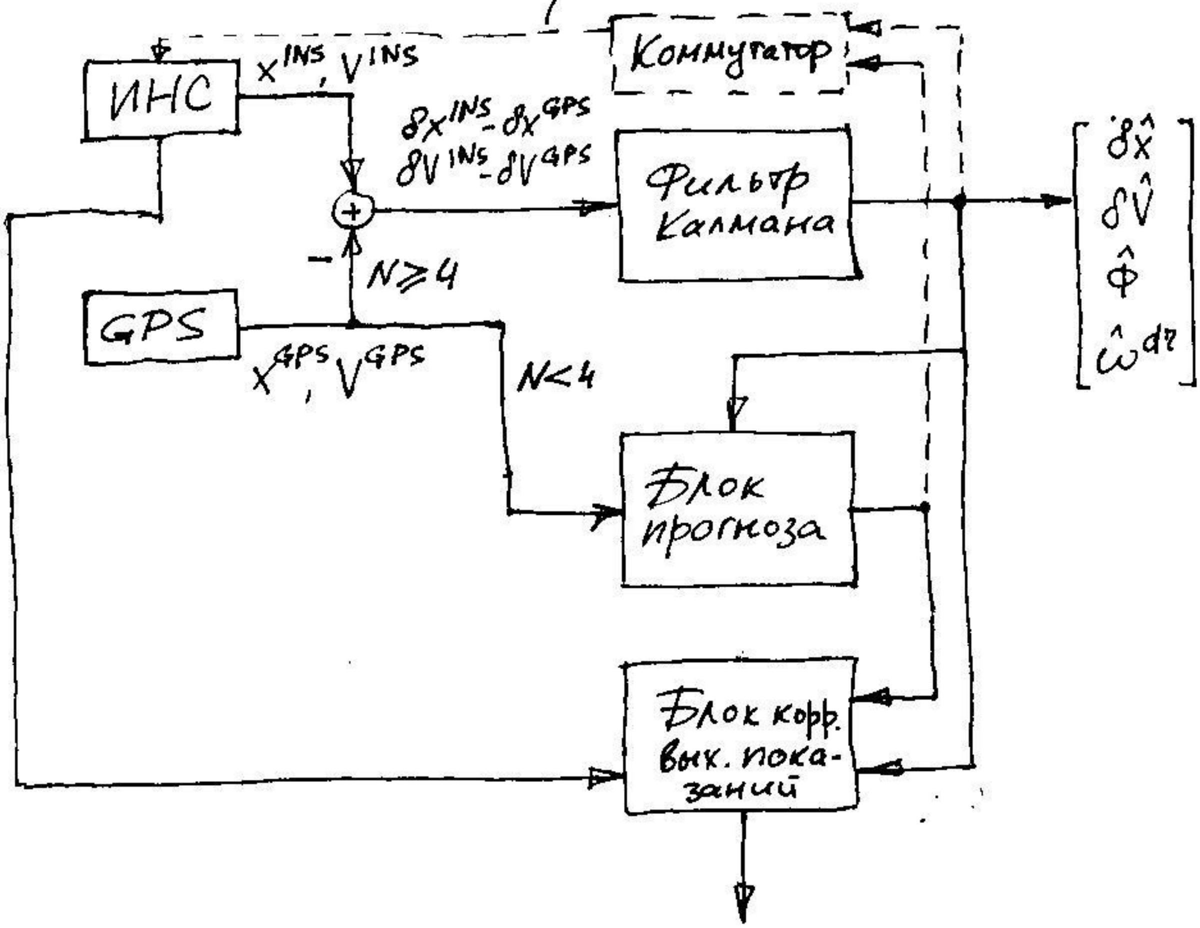
Методы создания интегрированных ИНС / GPS - систем

Свойства	ИНС	GPS
Автономность	да	нет
Частота вых. сигн.	(50÷100) Гц	(1÷10) Гц
Определение ориентации	да	нет
Долговрем. точность	низкая	высокая
Кратковрем. точность	высокая	высокая
Х-р ошибок	низкочастотные	высокочастотные

Из сравнит. таблицы следует, что обе с-мы явл. взаимно дополняющими, так что их комбинация обеспечивает выработку навигац. информации в оптимальном виде.

Схемы интегрирования ИНС/GPS

Каскадная схема



Здесь разности показаний ИНС и GPS по координатам и скоростям поступают в фильтр Калмана в кач-ве измерений. При этом ошибки ИНС играют роль непосредственно измеряемых компонент вектора состояния, а ошибки GPS- измерит. шума. В фильтре в кач-ве модели исп. ур-я ошибок ИНС, так что фильтр оценивает все наблюдаемые ошибки ИНС, что может быть использовано для коррекции показаний (как внутри ИНС (штриховая линия), так и на выходе. При отсутствии сигналов с 4 спутников фильтр переходит в режим прогноза.

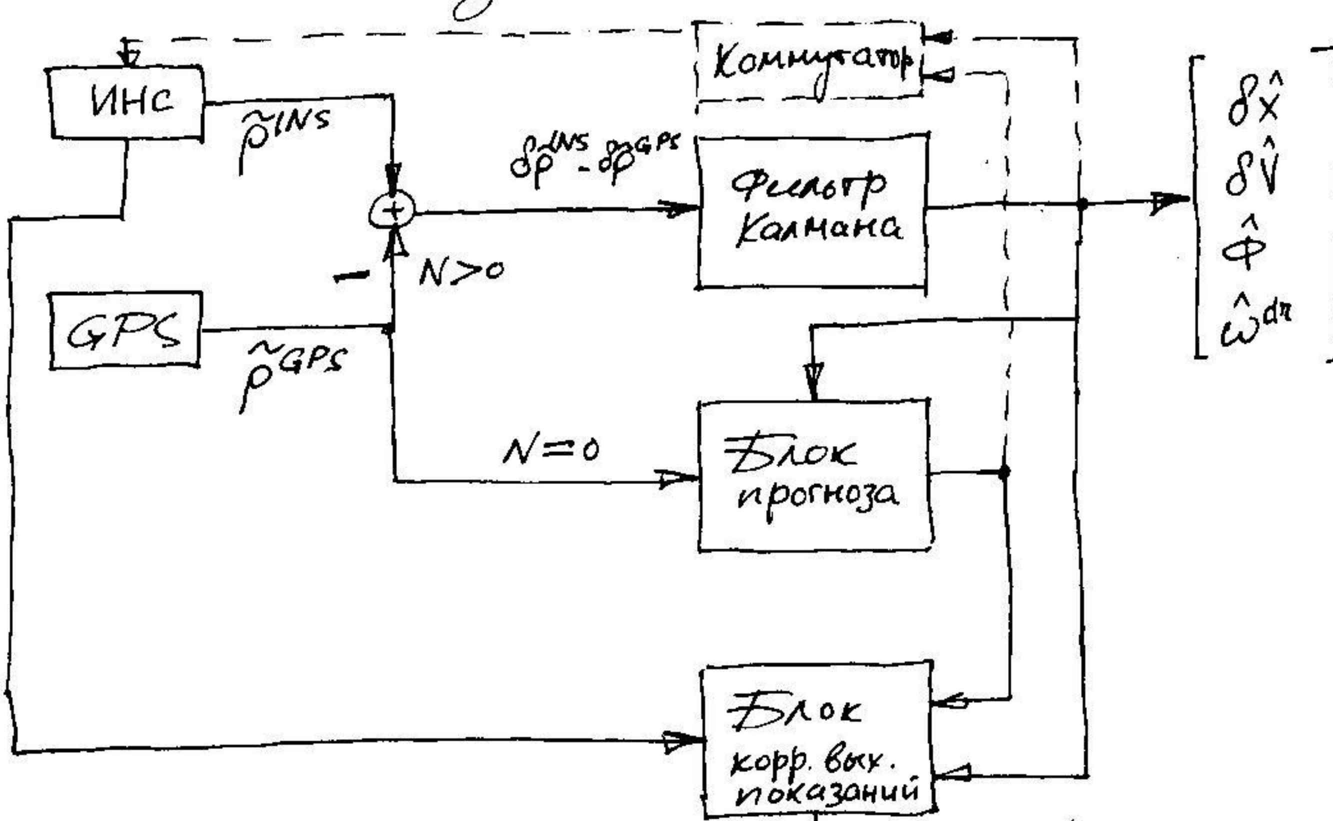
Достоинства:

- схема гарантирует разделение погрешностей ИНС и GPS.

Недостатки:

- в случае наличия сигналов меньше чем от (3÷4) спутников коррекции от GPS нет.

Слабо связанная схема



Отличие данной схемы от ранее рассмотренной только в том, что здесь исп. разности псевдорасстояний. В этом случае ур-я для измерений примут вид:

$$z_i = \tilde{\rho}_i^{INS} - \tilde{\rho}_i^{GPS} = -\underbrace{\frac{x_i^s - x^r}{\rho_i}}_{a_{xi}} \cdot \delta x^{INS} - \underbrace{\frac{y_i^s - y^r}{\rho_i}}_{a_{yi}} \cdot \delta y^{INS} - \underbrace{\frac{z_i^s - z^r}{\rho_i}}_{a_{zi}} \cdot \delta z^{INS} + c\Delta T \qquad \text{(IG1)}$$

Ур-я связи м/у земной с-мой координат. и географич. координатами имеют вид:

$$(IG2)\begin{cases} x = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda; \\ y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda; \\ z = [N(1-e^2)+h]\sin\varphi; \end{cases}$$ где

N – радиус Земли в данной точке,
φ, λ, h – географич. координаты;
x, y, z – координаты в земной с-ме.

Чтобы связать ошибки по x, y, z с ошибками φ, λ, h, нужно проварьировать ур-е (IG2):

$$(IG3)\begin{cases} \delta x = -(N+h)\sin\varphi\cos\lambda\,\delta\varphi - \\ \quad -(N+h)\cos\varphi\sin\lambda\,\delta\lambda + \\ \quad + \cos\varphi\cos\lambda\,\delta h; \\ \delta y = -(N+h)\sin\varphi\sin\lambda\,\delta\varphi + \\ \quad +(N+h)\cos\varphi\cos\lambda\,\delta\lambda + \\ \quad + \cos\varphi\sin\lambda\,\delta h; \\ \delta z = [N(1-e^2)+h]\cdot\cos\varphi\,\delta\varphi + \\ \quad + \sin\varphi\,\delta h. \end{cases}$$

Подставляя (IG3) в (IG1), получим:

$$(IG4)\quad z_i = \Big[-a_{xi}(N+h)\sin\varphi\cos\lambda - \\ -a_{yi}(N+h)\sin\varphi\sin\lambda + \\ + a_{zi}[N(1-e^2)+h]\Big]\delta\varphi +$$

$$+\left[-a_{xi}(N+h)\cos\varphi\sin\lambda + a_{yi}(N+h)\cos\varphi\cos\lambda\right]\cdot\delta\lambda +$$

$$+\left[a_{xi}\cos\varphi\cos\lambda + a_{yi}\cos\varphi\sin\lambda + a_{zi}\sin\varphi\right]\cdot\delta h + c\Delta T - v^{GPS}.$$

Измеряя одновременно несколько псевдорасстояний до спутников, ур-е измерений перепишем в виде:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{x1} & b_{y1} \dots & c \\ b_{x2} & b_{y2} \dots & c \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}}_{H} = \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta\lambda \\ \delta h \\ \Delta T \end{bmatrix}$$

Фильтр исп. матрицу H, размер к-рой изменяется в зав-ти от кол-ва одновременно обозреваемых спутников. В кач-ве модели по-прежнему исп. ур-я ошибок ИНС

Достоинства:

— исп. вся информация от GPS.

Недостатки:

— трудно разделить ошибки ИНС и GPS.

Сильно связанная схема

В схеме исп., кроме коррекции ИНС, управление полосой пропускания приемника GPS, т.е. ~~ее~~ ширина зависит от текущих параметров движения носителя (чем „быстрее" маневр, тем шире полоса).

Недостатки:

- вмешательство в аппаратуру приемника GPS.

Анализ наблюдаемости ошибок ИНС по измерениям от GPS

Запишем упрощенные ур-я ошибок для стационарных их составляющих:

$$\begin{cases} \delta\dot{E} = \delta V_E; \\ \delta\dot{V}_E = -g\Phi_N + B_E; \\ \dot{\Phi}_N = \dfrac{\delta V_E}{R} + \omega_N^{gp} \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta\dot{N} = \delta V_N; \\ \delta\dot{V}_N = g\Phi_E + B_N; \\ \dot{\Phi}_E = -\dfrac{\delta V_N}{R} + \omega_E^{gp} \end{cases}$$

Здесь δE, δN - ошибки определения пути в вост. и сев. направлениях; δV_E, δV_N - ошибки по скорости; Φ_E, Φ_N - ошибки „перекоса" платформы.

Из вида ур-й следует, что по

показаниям GPS (измеряются ошибки пути и скоростей) разделить величины $\pm g\varphi_{E,N}$ и $B_{E,N}$ не удаётся. Т.о., оценки углов „перекоса" не будет отделена от смещения нуля акселерометров. Обычно оценке подлежат только углы φ_E, φ_N, но при этом нужно помнить, что оценка этих углов будет получена с точностью до $\frac{B_N}{g}$ и $\frac{B_E}{g}$.

Проанализируем наблюдаемость по вост. каналу при $B_E=0$; $\dot{\omega}_N^{dp}=0$. Пусть

$$Z=\delta V_E=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{H}\cdot\begin{bmatrix}\delta V_E\\ \varphi_N\\ \omega_N^{dp}\end{bmatrix};$$

$$x_1=\delta V_E;\quad x_2=\varphi_N;\quad x_3=\omega_N^{dp}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -g & 0\\ 1/R & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{A}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix};$$

$$\Phi = I + AT = \begin{bmatrix} 1 & -gT & 0 \\ T/R & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_H = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ H\Phi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -gT & 0 \\ 1-\frac{gT^2}{R} & -2gT & -gT^2 \end{bmatrix};$$

$$\det A_H = g^2 T^3 \neq 0.$$

Т.о. все рассматриваемые компоненты вектора состояния наблюдаемы.

Составим диаграмму наблюдаемости:

$$\delta E \longrightarrow \delta V_E \longrightarrow \Phi_N + \frac{B_E}{g} \longrightarrow \omega_N^{др}$$

$$\xrightarrow{\hspace{6cm}}$$

наблюдаемость снижается.

Для БИНС погрешности акселерометров и гироскопов в сев. и вост. направлениях связаны с собств. погрешностями ч/з матрицу C_b^N:

$$\left[\frac{\omega^{\text{др}}}{B}\right]_N = \left[\begin{array}{c|c} C_b^N & 0 \\ \hline 0 & C_b^N \end{array}\right] \cdot \left[\frac{\omega^{\text{др}}}{B}\right]_b .$$

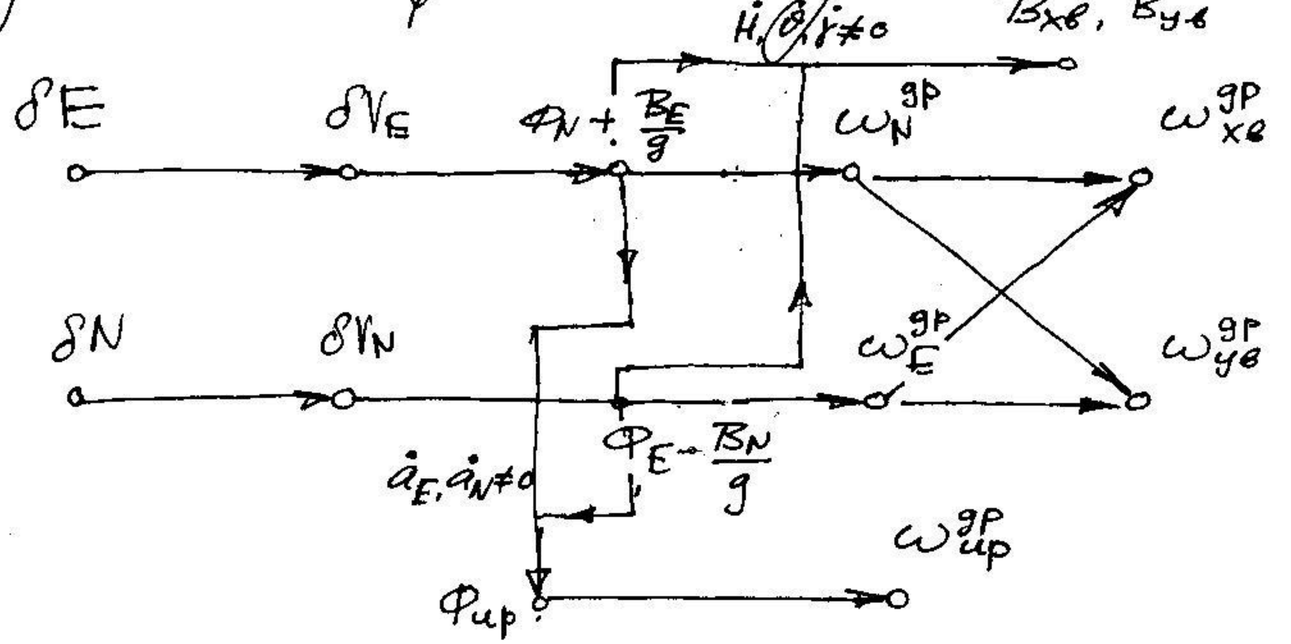
Принципиально разделить смещение нуля акселерометров в связанном трёхграннике и погрешности ориентации возможно, если компоненты матрицы C_b^N имеют достаточно долгие и интенсивные вариации. Однако это условие зависит от параметров движения носителя и не всегда выполняется.

Приведённый анализ относится только к стационарным ошибкам ИНС. Рассмотрим наблюдаемость нестационарных составляющих, напр., „перекос" в азимуте Φ_{up}:

$$\begin{cases} \delta \dot{V}_E = -g\Phi_N + \underline{a_N \Phi_{up}} + B_E ; \\ \dot{\Phi}_N = \dfrac{\delta V_E}{R} + \omega_N^{\text{др}} . \end{cases}$$

Из 1-го ур-я следует, что для выделения Φ_{up} необходимо, чтобы носитель имел существ.

вариации ускорений a_E, a_N.
Т.о, общая диаграмма наблюдаемости примет вид:



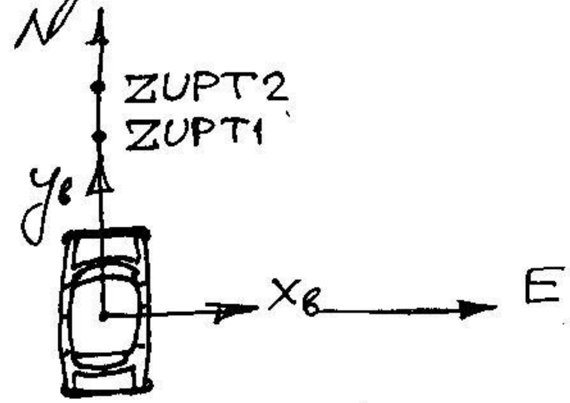
Полевая калибровка масшт. коэфф. и нелинейности акселерометров

Напомним, что нестационарная составляющая ошибок по скорости имеет вид:

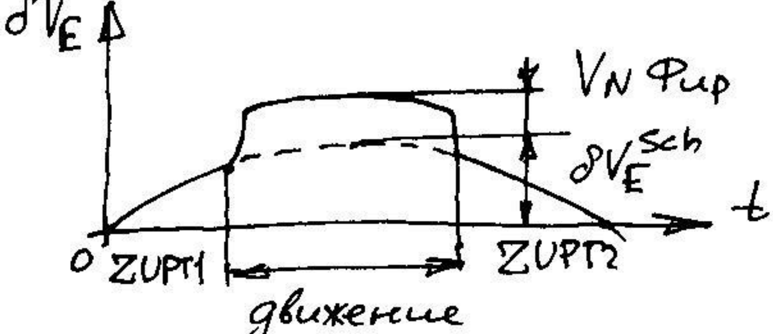
$$\begin{cases} \delta V_E^{NST} = V_N \Phi_{up} + V_E \mu_E + a_E \mu_E^* ; \\ \delta V_N^{NST} = -V_E \Phi_{up} + V_N \mu_N + a_N \mu_N^* . \end{cases}$$

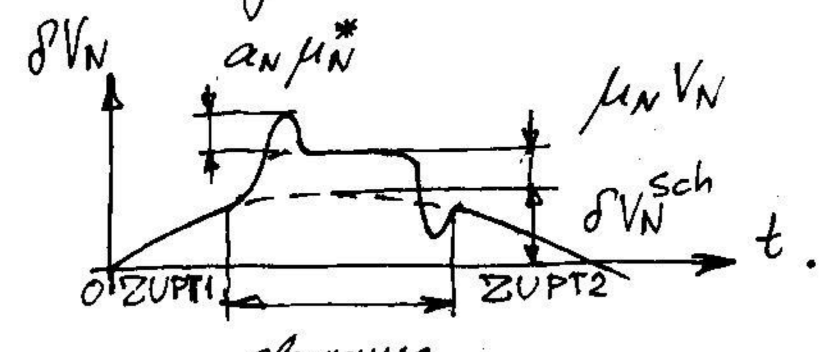
Здесь $\delta V_{E,N}^{NST}$ – нестационарная составляющая ошибок по скорости, Φ_{up} – ошибка невыставки в азимуте, μ_E, μ_N – ошибки масшт. коэфф. акселерометров; μ_E^*, μ_N^* – ошибки нелинейности

Для нахождения $\mu_{E,N}$, $\mu^*_{E,N}$ ИНС уст. на автомобиль, к-рый периодически останавливается:



ZUPT (Zero Velocity Updates) — точки остановки, в к-рых ИНС измеряет нулевую скорость.





Заметим, что сущ. принципиальная возможность определения μ_N и μ_N^*, если удается скомпенсировать шулеровскую составляющую

Используя показания по скорости в точках ZUPT в качестве измерений, возможно осущ. интерполяцию шулеровской ошибки на режимы движения, т.е. оценить и устранить δV_N^{Sch}, δV_E^{Sch}.

Для оценки μ_N, μ_N^* возможно сформировать измеряемые величины

$$
\begin{aligned}
z &= \dot{V}_N^{INS} - V_N^{GPS} - \delta\hat{V}_N^{Sch} = \\
&= \delta V_N - \delta\hat{V}_N^{Sch} - \delta V_N^{GPS} = \\
&= \mu_N V_N + \mu_N^* a_N - \delta V_N^{GPS}
\end{aligned}
$$

Используя модель

$$
\begin{cases}
\dot{\mu}_N = 0; \\
\dot{\mu}_N^* = 0
\end{cases}
$$

и вышеприведенные измерения z, можно оценить μ_N, μ_N^* фильтром Калмана.

В рассматриваемом движении

$$\mu_N^* = \mu_{y_B}^*; \quad \mu_N = \mu_{y_B}^*.$$

Чтобы откалибровать акселерометр по оси x_B, необходимо переустановить с-му так, чтобы x_B совпадала с продольной осью.

Интегрированная ИНС / GPS-с-ма на грубых микро-механич. гироскопах Motion Pak

ДУС:

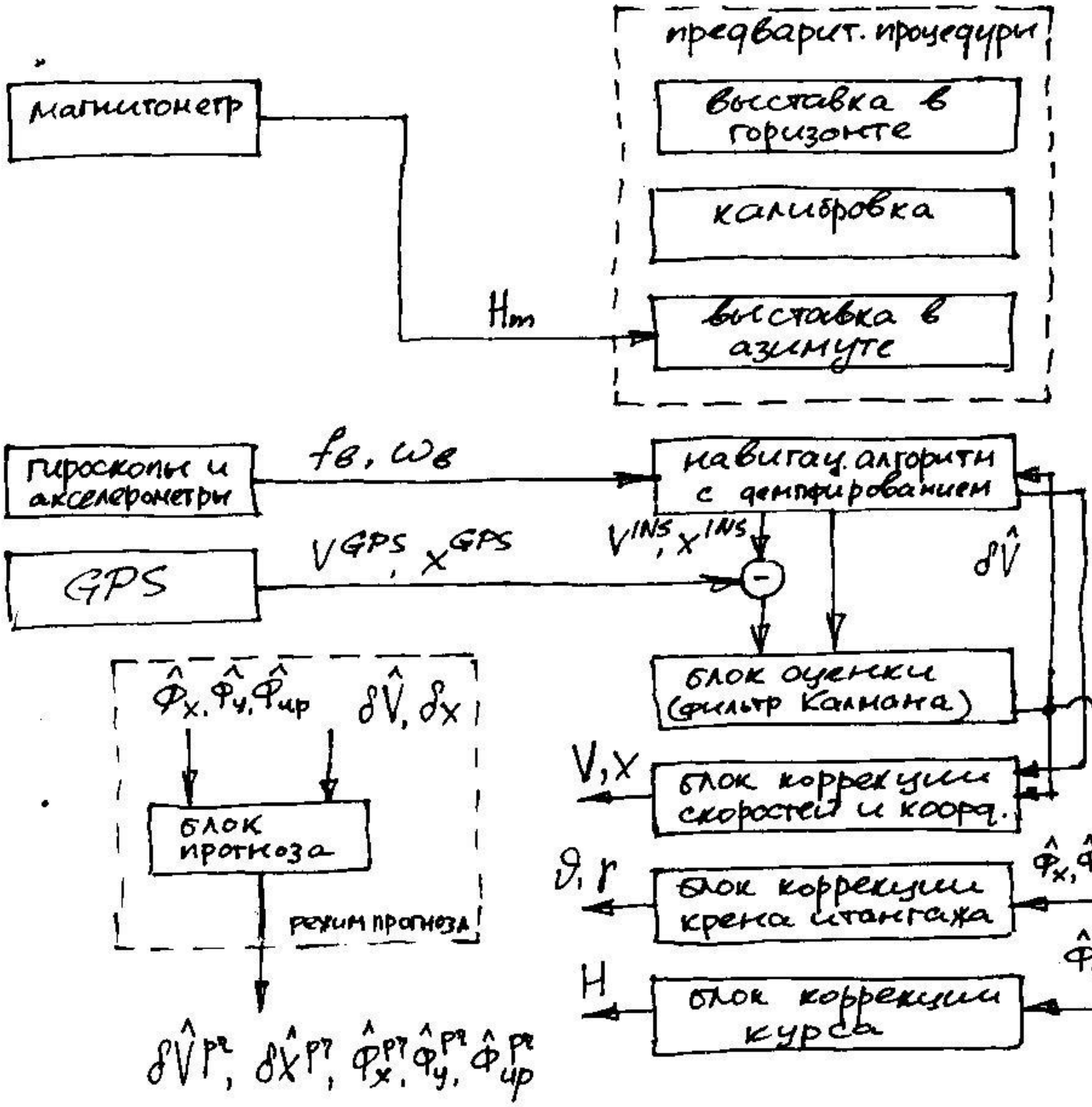
- дрейф от запуска к запуску : 500°/ч;
- дрейф в запуске : 50°/ч.

Акселерометры:

- смещение нуля от запуска к запуску : $5\cdot10^{-4}g$.

Из приведенной х-ки чувствит. эл-тов следует, что их использование позволит автономно выставиться в горизонте, однако для выставки в азимуте необходимы внешние источники информации, напр., магнитометр.

Функциональная схема БИНС имеет след. вид:



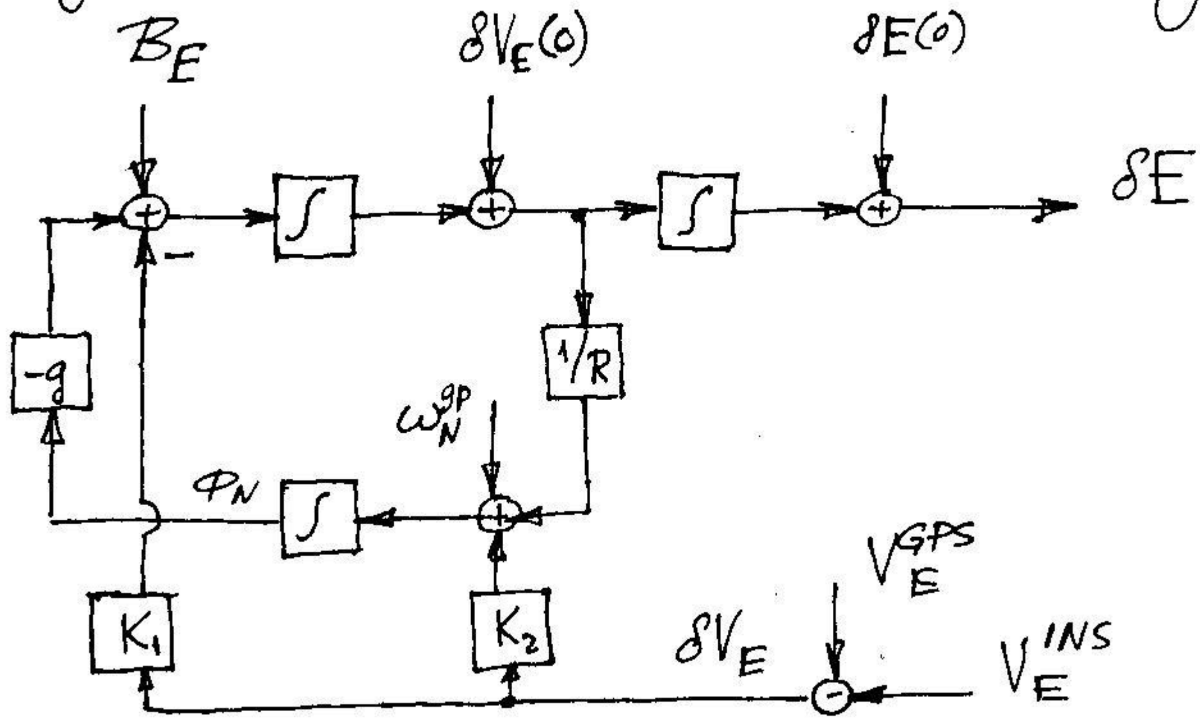
Из приведенной схемы следует, что с-ма исп. след. предварит. процедуры:

— традиционная выставка в горизонт.

— калибровка ДУС (осреднение вых. показаний $\omega_{xв}, \omega_{yв}, \omega_{zв}$); исключается дрейф от запуска к запуску;

— выставка по заданному курсу с исп. внеш. магнитометра.

Реализация традиционного нав. алгоритма невозможна, ибо приводит к немыслимым эффектам, поэтому исп. демпфирование ошибок ИНС по показаниям GPS. Структ. схема демпфирования имеет вид:



Для демпфирования исп. разность показаний ИНС и GPS по скорости. Выделенная ошибка ИНС по скорости δV_E подаётся на вход 1-го интегратора ч/з коэфф. K_1 и на „датчики момента" „платформы" (кватернион Δm) ч/з коэфф. K_2

Схема соотв. с-ме ур-й

$$\begin{cases} \delta \dot{V}_E = -g\Phi_N + B_E - K_1 \delta V_E ; \\ \dot{\Phi}_N = \frac{\delta V_E}{R} + \omega_N^{gp} + K_2 \delta V_E \end{cases}$$

Продифференцируем 1-е ур-е и подставим в него 2-е:

$$\delta \ddot{V}_E + K_1 \delta \dot{V}_E + (\nu^2 + K_2 g)\delta V_E = -g\omega_N^{gp} + \dot{B}_E .$$

Из ф-лы следует, что с-ма стала устойчивой (была нейтральной) за счёт подачи сигнала ошибки на вход 1-го интегратора. Подача же сигнала ошибки на „датчик момента" необходима для увеличения собств. частоты, что обеспечит быстрое затухание переходного процесса. Выбор высоких коэфф. K_1, K_2 приводит к малой статич. ошибке и быстрому переходному процессу, однако в этом случае пропускаются высокочастотные шумы за счёт расширения полосы пропускания. Наоборот, при малых K_1, K_2 шумы сглаживаются, но возникают большие статич. ошибки

и долгий переходной процесс. Необходим компромисс.
Для оценивания ошибок ИНС исп. фильтр Калмана, где в качестве модели применяются ур-я ошибок ИНС, а в качестве измерений разность показаний по скорости и координатам ИНС и GPS.
Упрощенная модель ошибок ИНС имеет вид:

$$\begin{cases} \delta\dot{E} = \delta V_E; \\ \delta\dot{N} = \delta V_N; \\ \delta\dot{V}_E = -g\Phi_N + a_N\Phi_{up} + u_E^1; \\ \delta\dot{V}_N = g\Phi_E - a_E\Phi_{up} + u_N^1; \\ \dot{\Phi}_E = -\frac{\delta V_N}{R} + \omega_E^{gp} + u_E^2; \\ \dot{\Phi}_N = \frac{\delta V_E}{R} + \omega_N^{gp} + u_N^2; \\ \dot{\Phi}_{up} = \omega_{up}^{gp}, \end{cases}$$

где

$$u_1^E = -K_1\delta\hat{V}_E; \qquad u_E^2 = -K_2\delta\hat{V}_N;$$

$$u_N^1 = -K_1\delta\hat{V}_N; \qquad u_N^2 = K_2\delta\hat{V}_E;$$

u_i^j - управл. сигналы демпфирования ошибок ИНС.

Здесь в качестве измерений исп. разности показаний ИНС и GPS по скорости и координатам, т.е. непосредственно измеряются ошибки ИНС:

$$\begin{cases} z_1 = \delta E + v_1; \\ z_2 = \delta N + v_2; \\ z_3 = \delta V_E + v_3; \\ z_4 = \delta V_N + v_4, \end{cases}$$

где v_i — погрешности GPS, играющие роль измерит. шума.

Ур-е фильтра Калмана при наличии управл. сигнала имеет вид

$$\hat{x}_k = \Phi \hat{x}_{k-1} + L u_{k-1} + K_k(z_k - H\Phi \hat{x}_{k-1} - HLu_{k-1}).$$

Т.о., фильтр Калмана оценивает компоненты вектора состояния, при этом ошибки по скорости поступают в обр. связи для демпфирования ошибок ИНС.

Блок коррекции тангажа и крена реализует след. ф-лу:

$$C_B^N = C_{PL}^N \cdot C_B^{PL}.$$

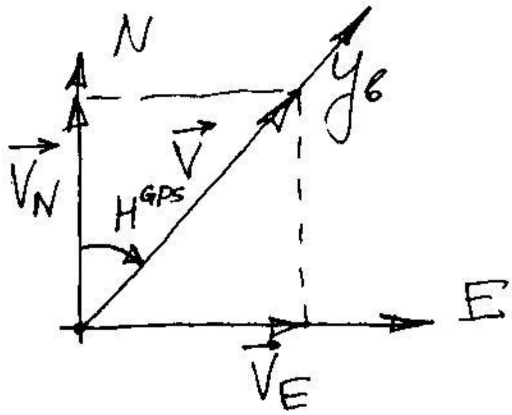
Здесь

$$C_{PL}^N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Phi_N \\ 0 & 1 & -\Phi_E \\ -\Phi_N & \Phi_E & 1 \end{bmatrix};$$

$\hat{\Phi}_E, \hat{\Phi}_N$ — оценки фильтра Калмана.

После расчёта C_B^N по эл-там этой матрицы определяются откорректированные значения тангажа и крена.

Блок коррекции курса исп. показания GPS. Величина



$$H^{GPS} = \operatorname{arctg}\frac{V_E}{V_N}$$

при совпадении $\vec{V}$ с осью y_B явл. углом курса H. В противном случае (напр., при боковом ветре) возникает т.н. угол сноса $\beta = (\widehat{\vec{V}, y_B})$; следовательно, GPS измеряет не курс, а путевой угол $H_П$, отличающийся от H на величину угла сноса. Чтобы корректировать ИНС по курсу, необходимо выбирать такие моменты времени, когда поперечное ускорение a_{xB} мало, так что β будет также малым.

Определим погрешность курса:

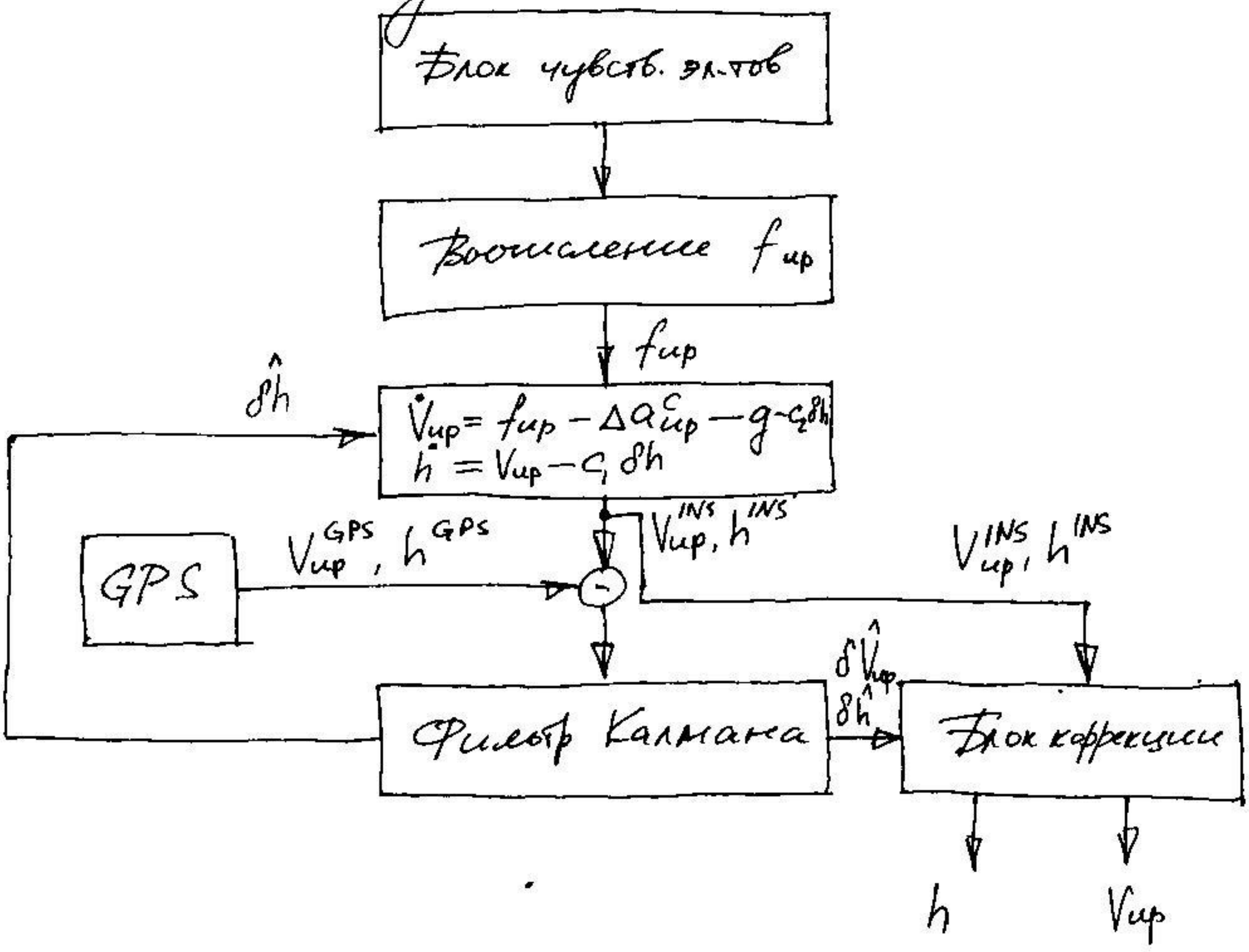
$$\sigma[\delta H^{GPS}] = \frac{\sigma[\delta V]}{\sqrt{V_E^2+V_N^2}}.$$

Из ф-лы следует, что использовать GPS для определения курса возможно лишь тогда, когда $|V_E|, |V_N| > 10$ м/с.

В блоке коррекции координат и скоростей производится компенсация погрешностей ИНС по оценкам фильтра Калмана.

Вертикальный канал интегрированной ИНС/GPS с-мы

Ф-циональная схема верт. канала имеет вид:

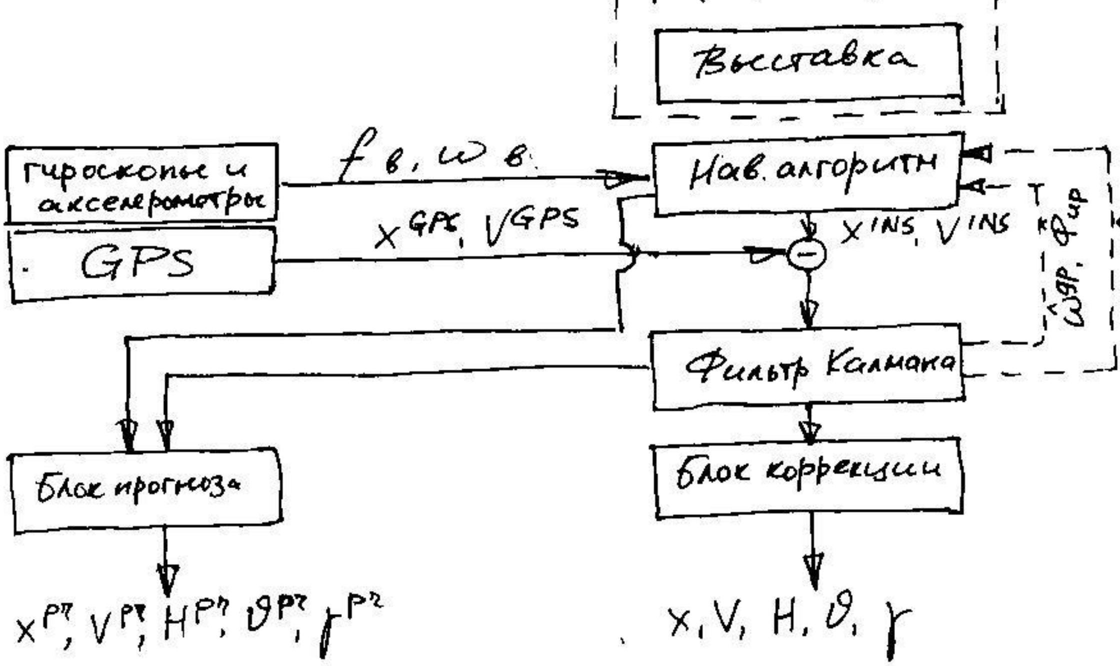


Поскольку верт. канал ИНС неустойчив, здесь исп. демпфирование ошибок по высоте. Остаточные (после демпфирования) ошибки устраняются в блоке коррекции (по показаниям фильтра Калмана.

Интегрированная ИНС средней точности Honeywell HG1700

Исп. ДУС с дрейфом $(1 \div 0,1)^\circ/ч$, акселерометры со сдвигом нуля $10^{-4} g$.

Ф-циональная схема имеет вид:



Здесь можно осущ. автономно как выставку в горизонте, так и выставку в азимуте, а также реализовать автономное нав. решение (страпд. схема). При этом по расности показаний ИНС и GPS. можно реализовать фильтр Калмана, к-рый оценивает все наблюдаемые ошибки ИНС. Эти ошибки подаются в блоки коррекции и прогноза вых. показаний. Опционно можно осущ. внутр. компенсацию дрейфов и демпфирование ошибок ИНС.

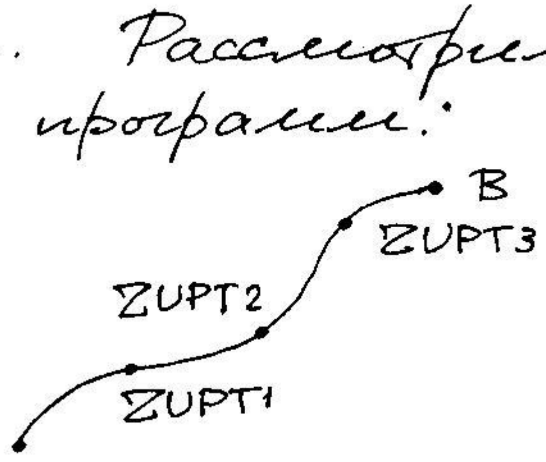
В принципе, интегрированные схемы для низко- и средне-точной ИНС совпадают! Отлич. особенность - синтез фильтра Калмана, где совпадает модель с-мы, но в случае среднеточной ИНС оценке подлежит ошибка Φ_{up}, к-рая потом подаётся на одном такте на образ датчика момента:

$$\omega^c_{up} = -\frac{\hat{\Phi}_{up}}{h_{N3}}.$$

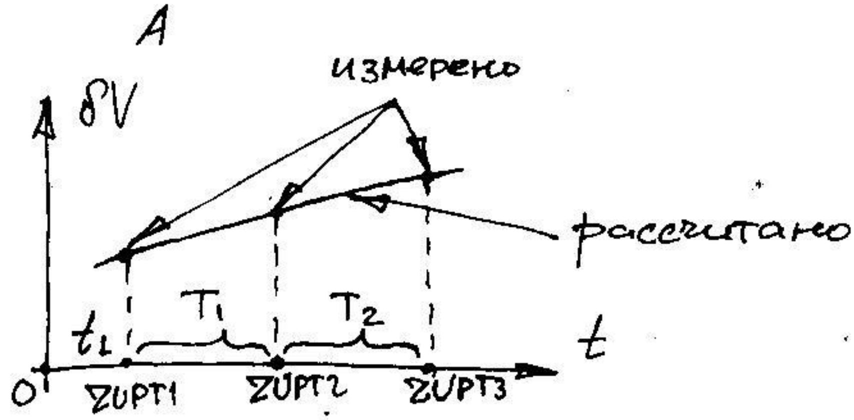
При этом оценка $\hat{\Phi}_{up}$ д.б. предварительно сглажена. Блоки коррекции тангажа и крена, координат и скоростей совпадают. При этом блок коррекции курса от GPS в среднеточной ИНС отсутствует.

Обзорные геодезические с-мы

Под обзорными геод. с-мами понимаются высокоточные ИНС, уст. на автомобиле. Для их коррекции осущ. периодич. остановки автомобиля; при этом показания ИНС по скорости суть её ошибки (ZUPT). Прогр. обеспечение обзорных с-м позволяет восстановить поведение ошибок м/у ZUPT'ами. Интегрирование полученных ошибок позволяет скомпенсировать ошибки ИНС по координатам. Рассмотрим 2 осн. типа программ:



1)



Запишем измерения для 3 ZUPT'ов:

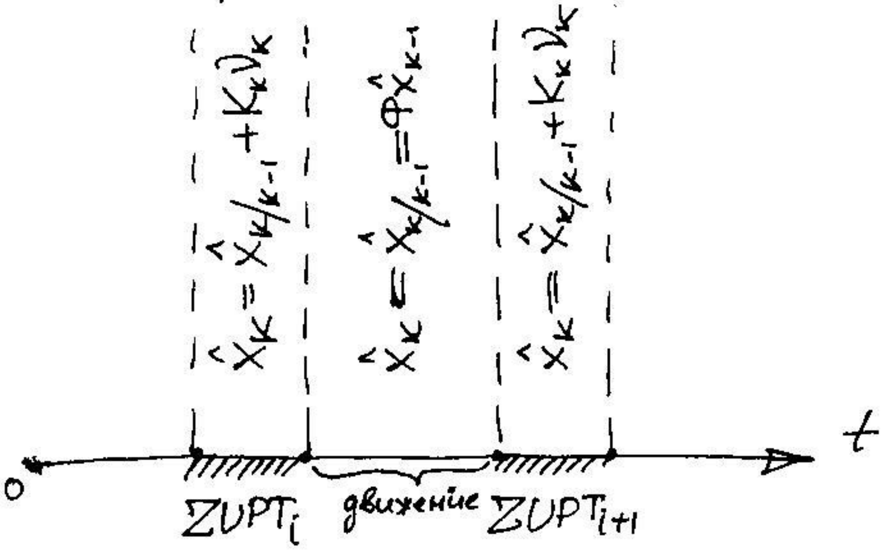
$$\begin{cases} z_1 = \delta V(t_1); \\ z_2 = \delta V(t_1 + T_1); \\ z_3 = \delta V(t_1 + T_1 + T_2). \end{cases}$$

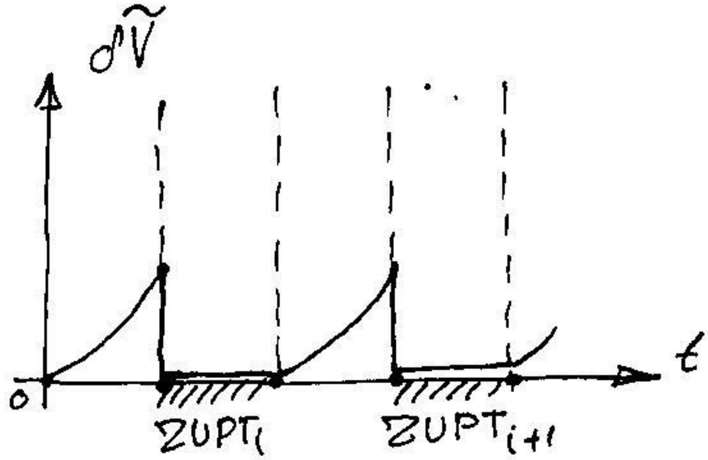
Упрощенная модель ошибок по скорости имеет вид

$$\delta V(t) = a_0 + a_1 \sin \nu t + a_2 \cos \nu t,$$

где a_0, a_1, a_2 зависят от погрешностей гироскопов и акселерометров и явл. неизвестными. Для их определения исп. 3 измерения z_1, z_2, z_3. Достоинство метода — простота; недостаток — предположение о постоянстве a_0, a_1, a_2 в течение времени $T_1 + T_2$.

2). Фильтр Калмана.





Здесь во время остановок работает традиц. фильтр Калмана, поскольку присутствуют измерения. При движении измерения пропадают, фильтр Калмана переходит в режим прогноза. Во время след. остановки фильтр инициализируется по последним прогнозным значениям $\hat{x}_{k/k-1}, \hat{P}_{k/k-1}$. Достоинство — предположение о постоянстве погрешностей чувствит. эл-тов только м/у соседними ZUPT'ами. Недостаток — наличие режима прогноза.