МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Курс лекций

«Аналитическая геометрия»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Курс лекций

«Аналитическая геометрия»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973-018
И201

Курс лекций «Аналитическая геометрия» / Коллектив авторов –
М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 24 с.: ил.

В курсе лекций рассмотрены основные этапы курса «Аналитическая геометрия».

Ил. 39. Табл. 5. Библиогр. 7 назв.

УДК 681.3.06(075.8)

АННОТАЦИЯ

В курсе лекций будут рассмотрены основные темы курса «Аналитическая геометрия» такие как: основные законы кинематики и кинематического движения тел, основные законы статики, основные законы динамики, основные законы движения и взаимодействия элементарных частиц.

ANNOTATION

The course lectures will discuss the main themes of the course "Physics" such as the basic laws of kinematics and the kinematic motion of bodies, the basic laws of statics, the basic laws of dynamics, the basic laws of motion and interaction of elementary particles.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данный конспект лекций составлен на основе лекционного курса, читаемого в МГТУ им. Н.Э. Баумана на кафедре иу4 преподавателем Агафонов В. Б. Курс лекций рекомендован к выполнению текущих аттестационных мероприятий и подготовки к экзамену по предмету «Аналитическая геометрия».

1 ЛЕКЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ ФИЗИКА

1.1 Лекция 1

1.Определение линейной зависимости и линейной независимости векторов. Доказательство критерия линейной зависимости 2х и 3х векторов.

2. Система линейных алгебраических уравнений. (СЛАУ). Различные формы записи СЛАУ. Совместность СЛАУ. Доказательство критерия Кронекера-Капелли о совместности СЛАУ.

1.

Пусть задана система векторов a_1, a_2, a_3,…,$a_л$ (1) одной размерности.

Определение: система векторов (1) называется линейно-независимой, если равенство ♋$_1 a_1$+♋$_2 a_2$+…+♋$_л a_л$=0 (2) выполняется лишь в том случае, когда все числа ♋$_1$, ♋$_2$,…, ♋$_л$=0 и ♐R

Определение: система векторов (1) называется линейно-зависимой, если равенство (2) выполнимо хотя бы при одном ♋$_i$🕒0 (i=1,…,k)

Свойства

1.Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима

2.Если система векторов содержит линейно-зависимую подсистему векторов, то она будет линейно-зависимой.

3.Если система векторов линейно-независима, то и любая ее подсистема будет линейно независимой.

4.Если система векторов содержит хотя бы один вектор, являющийся линейной комбинацией других векторов, то эта система векторов будет линейно зависимой.

Определение: два вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых.

Определение: три вектора называются компланарными, если они лежат в параллельных плоскостях.

Теорема: Если заданы два вектора a и b, причем a🕒0 и эти векторы коллинеарны, то найдется такое действительное число ♑, что b=♑a.

Теорема: Для того что бы два вектора были линейно-зависимы необходимо и достаточно, что бы они были коллениарны.

Доказательство: достаточность. Т.к. векторы коллинеарны, то b=♑a. Будем считать, что a,b🕒0 (если нет, то система линейно-зависима по 1 свойству). 1b-♑a=0. Т.к. коэфф. При b🕒0, то система линейно зависима по определению. Необходимость. Пусть a и b линейно-зависимы. ♋a+♌b=0, ♋🕒0. a= -b/♋*b. a и b коллинеарны по определению умножения вектора на число.

Теорема: для того, чтобы три вектора были линекно-зависимы необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны. Необходимость.

Дано: a, b, c – линейно-зависимы. Доказать: a, b, c – компланарны. Доказательство: т.к. векторы линейно-зависимы, то ♋a+♌b+♑c=0, ♑⌚0. c= - ♋/♑*a - ♌/♑*b. c-диагональ параллелограмма, поэтому a, b, c лежат в одной плоскости.

Если они компланарны то можно построить паралелограмм.

/---

2.

1. Решением СЛАУ называют совокупность n чисел которые будучи подставленными в ур-я, обращают их в тождество.

2.СЛАУ наз-ся совместной если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае СЛАУ несовместна.

3.Совместную сис-му наз определеенной, если она имееттолько одно решение. В противном случае – неопределенной.

4. Систему наз-ют однородной если все свободные члены равны 0, в противном случае неоднородной.

Составим м-цу из аиж коэф при неиз-ых.А = (а11 а12 ..а1н)/(а21 а22 .. а2н)итд.

- матрица системы. В = (в1/в2/ .../вм) – матрица столбец св-ых членов.

Х = --\-- м-ца ст-ц неизвестных. А*Х = В – мат-ая форма записи СЛАУ.

Аж = (а1ж/а2ж/../амж), А1х1+А2х2+..+Анхн = В векторная форма записи.

Для того чтобы система была совместной необх. и дост. Чтобы ранг матрицы сис - мы равнялся рангу расшир-ой мат-цы сис – мы.

1 Если Существует решение, то век-ая записьозначает , что столбец свободных членов есть лин комбинация столбцов матрицы системы. Значит, добавление этого столбца не увеличивает общего числа линейно независимых столбцов в силу одного из следствий теоремы о базисном миноре, и ранг остаетсься прежним.

2 Пусть РгА = РгА*.В этом случае базисный минор матрицы А является базизным и в матрице А*. Это означает, что столбец свободных членов есть линейная комбинация тех столбцов матрицы А в которых расположен базисный минор. По предложению что если столбец а есть лин комбинация столбцов а1 а2 .. ан, то он также будет лин комбинац системы сод а1 а2 ан, если к остальным поставить коэфицент ноль.) в этом случае столбец своб членов есть лин комбинация всех столбцов матрицы А. Коэффиценты этой лин комбинаци представляют собой решение системы.

1.Определение базиса V1, V2, V3. Доказательство единственности разложения векторов в базисе V2. Линейные операции над векторами, заданными в одном и том же базисе.

2.Однородные СЛАУ. Доказательство критерия существования ненулевого решения однородной квадратной СЛАУ.

1.

Множество коллинеарных вкт назыв пространство V1.

Базис- ненулевой вкт.

Множество компланарных вкт наз прв-ом V2.

Базиз неколлинеарные вкт.

Множество 3 свободных вкт V3.

Базис 3 некомпланрных вкт.

A = L1i + L2j;

A = B1i + B2j; => (L1-B1) i + (L2 – B2) j = 0 , тк i и j лин незав, то l1=b1,l2=b2

При умножении вкт на число координата умножается на это число.

При сложении 2 вкт складываються соответстующие координаты.

2. Однородной СЛАУ наз та у которой все свободные члены равны нулю. ФСР однр СЛАУ наз упорядочееную совокупность (n-r) линнейно-независимых ее решений.Для существования ненулевого решения у однородной квадратной СЛАУ необходимо и достаточно чтобы ее матрица была вырожденна..Если матрица однородной системы невырождена, то , согласно формулам крамера она будет иметь только нулевое решение, еслиже она будет вырожденна то ее определитель являющийся в квадратной матрице единственным минором максимального порядка равен 0, значит ранг r матрицы системы меньше ее порядка и следовательно меньше количества неизвестных, Поэтому k=n-r>0 и однородная СЛАУ имеет нормальную фундаментальную систему. Из k>0 решений каждое из этих решений являеться не нулевым.

1.2 Лекция 2

1.Определение скалярного произведения векторов, его связь с ортогональной проекцией вектора. Свойства скалярного произведения. Вывод формулы вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе.

2. СЛАУ. Различные формы записи СЛАУ. Доказательство теоремы Кронекера-Капелли.

1. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

Свойства:

1) $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$

2) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$

3) $(\alpha\cdot\vec{a},\vec{b}) = \alpha\cdot(\vec{a},\vec{b})$

4) $(\vec{a},\vec{a}) \geq 0$, $(\vec{a},\vec{a}) = 0 \leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

5) $(\vec{a},\vec{b}) = 0 \leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Доказательство:

1) из определения скалярного произведения векторов.

2) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = |\vec{c}|\cdot np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|\cdot(np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{b}) = |\vec{c}|\cdot np_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}|\cdot np_{\vec{c}}\vec{b} = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$.

3) $(\alpha\cdot\vec{a},\vec{b}) = np_{\vec{b}}(\alpha\cdot\vec{a})\cdot|\vec{b}| = \alpha\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}\cdot|\vec{b}| = \alpha\cdot(\vec{a},\vec{b})$.

4) $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|^2\cdot 1 = |\vec{a}|^2 \geq 0$, причем $(\vec{a},\vec{a}) = 0 \leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

5) необходимость: $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0$, тогда $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$. Достаточность: $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0 \Rightarrow |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0 \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 0$.

a ={x1,y1,z1},b={x2,y2,z2}, a*b = x1x2+y1y2+z1z2;

?Ортогональная проэкция скалярное произведение данного вектрора, и направляющего вкт.

1. Решением СЛАУ называют совокупность n чисел которые будучи подставленными в ур-я, обращают их в тождество.

2.СЛАУ наз-ся совместной если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае СЛАУ несовместна.

3.Совместную сис-му наз определелеенной, если она имееттолько одно решение. В противном случае – неопределенной.

4. Систему наз-ют однородной если все свободные члены равны 0, в противном случае неоднородной.

Составим м-цу из аиж коэф при неиз-ых.А = (а11 а12 ..а1н)/(а21 а22 .. а2н)итд.
- матрица системы. В = (в1/в2/ .../вм) – матрица столбец св-ых членов.
Х = --\-- м-ца ст-ц неизвестных. А*Х = В – мат-ая форма записи СЛАУ.
Аж = (а1ж/а2ж/../амж), А1х1+А2х2+..+Анхн = В векторная форма записи.
Для того чтобы система была совместной необх. и дост. Чтобы ранг матрицы сис - мы равнялся рангу расшир-ой мат-цы сис – мы.
1 Если Существует решение, то век-ая запись означает , что столбец свободных членов есть лин комбинация столбцов матрицы системы. Значит, добавление этого столбца не увеличивает общего числа линейно независимых столбцов в силу одного из следствий теоремы о базисном миноре, и ранг остаетсься прежним.
2 Пусть РгА = РгА*.В этом случае базисный минор матрицы А является базизным и в матрице А*. Это означает, что столбец свободных членов есть линейная комбинация тех столбцов матрицы А в которых расположен базисный минор. По предложению что если столбец а есть лин комбинация столбцов а1 а2 .. ан, то он также будет лин комбинац системы сод а1 а2 ан, если к остальным поставить коэфицент ноль.) в этом случае столбец своб членов есть лин комбинация всех столбцов матрицы А. Коэффиценты этой лин комбинаци представляют собой решение системы.
1.Определение ортонормированного базиса. Связь координат вектора в ортонормированном базисе и его ортогональных проекций на векторы этого базиса. Вывод формулы вычисления длины вектора, его направляющих косинусов, угла между двумя векторами в ортонормированном базисе.
2.Однородные СЛАУ. Теорема о структуре решения однородной СЛАУ.
Базис называю ортонормированным если вкт-рыбазиса попарно перпендикулярны и длины их равны 1. прi(a) = x, итд.
|a| = sqrt(x2+y2+z2);(a^i) = L; cos(L) = a*i/|a|/|i| = x/ sqrt(x2+y2+z2)
Cos2(L) + cos2(B)+ cos2(G) = 1; cos(l) = (x1x2+y1y2+z1z2)/ sqrt(x12+y12+z12) sqrt(x22+y22+z22)
1.Правые, левые тройки векторов. Определение векторного произведения векторов. Свойства векторного произведения. Вывод формулы вычисления векторного произведения в ортонормированном базисе.
2.Фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы линейных алгебраических уравнений. Доказательство существования ФСР. Нормальная ФСР.
1.Упорядоченную тройку вкт называют правой если поворот от 1го вкт ко 2 на наименьший уогл происходит против часовой стрелки если смотреть с конца 3го вкт.Векторным

произведением вкт а на вкт в называют вкт с который 1. перпендекулярен а и в. 2. образует с ними правую тройку вкт. 3. длина которого равна площади паралеллограмма образованного а и в. |c| = |a||b|sin(l);

1.bxa = -axb 2. (a+b)xc = axc+bxc 3. l(axb) = (la)xb; 4. a L b, axb =0.

Axb =i(y1z2-y2z1) – j(x1z2 – x2z1) +k(x1y2-x2y1), можно через матрицу.

2. Фундаментальной системой решений (ФСР) ЛОС $A\vec{x}=0$ называется набор решений $\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_k$, такие что 1. $\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_k$ - линейно независимы; 2. ($\forall\overline{y}$ - решение ЛОС)($\exists c_1,\dots c_k \in R$): $\overline{y}=\sum_{i=1}^{k} c_i\overline{\alpha}_i$

<u>Теорема о существовании ФСР ЛОС</u>:

Пусть $A\in P_{m\times n}$ – матрица ЛОС $A\vec{x}=\overline{0}$ и rang(A)=k (k<n). Тогда существует ФСР из (n-k)

<u>Док-во</u>: Пусть $\begin{vmatrix} a_{11}\dots a_{1k} \\ a_{k1}\dots a_{kk} \end{vmatrix} = M_k \neq 0$ - базисный минор. $A\vec{x}=\overline{0} \to \begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1k}x_k = -a_{1k+1}x_{k+1}-\dots-a_{1n}x_n \\ \dots. \\ a_{k1}x_1+\dots+a_{kk}x_k = -a_{kk+1}x_{k+1}-\dots-a_{kn}x_n \end{cases}$, где $x_1,\dots,x_k$ – базисные переменные, а $x_{k+1},\dots,x_n$ – свободные параметры.

Положим $x_{k+1}=1$, а остальные $x_{k+2}=\dots=x_n=0 \Rightarrow x_1=c_{11}\dots x_k=c_{1k}$, затем

$x_{k+2}=1, x_{k+1}= x_{k+3}=\dots=x_n=0 \Rightarrow x_1=c_{21}\dots x_k=c_{2k}$

$x_n=1, x_{k+1}= x_{k+2}=\dots=x_{n-1}=0 \Rightarrow x_1=c_{n-k1}\dots x_k=c_{n-kk}$

$\overline{c}_1=\begin{pmatrix} c_{11} \\ \dots \\ c_{1k} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \quad \overline{c}_k=\begin{pmatrix} c_{n-k1} \\ \dots \\ c_{n-kk} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Проверка:

1. $B=\begin{pmatrix} c_{11}\dots c_{n-k1} \\ \dots \\ c_{1k}\dots c_{n-kk} \\ 1\dots\dots..0 \\ \dots \\ 0\dots\dots..1 \end{pmatrix}$, $M_{n-k}\neq 0 \Rightarrow$ rang(B)=n-k $\Rightarrow$ $\overline{c}_1\dots\overline{c}_{n-k}$ - линейно независима

2. Пусть $\overline{y}$ - решение ЛОС; $\overline{d}=y_{k+1}\overline{c}_1+\dots+y_n\overline{c}_{n-k}$ - решение ЛОС

$\overline{y}-\overline{d}=\begin{pmatrix} y_1-d_1 \\ y_k-d_k \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ - решение ЛОС

$\begin{cases} a_{11}(y_1-d_1)+\dots+a_{1k}(y_k-d_k)=0 \\ \dots. \\ a_{k1}(y_1-d_1)+\dots+a_{kk}(y_k-d_k)=0 \end{cases}$, т.к. $M_k\neq 0 \Rightarrow y_i-d_i = 0$, $i=\overline{1,k}$ $\Rightarrow$ $\overline{y}-\overline{d}=y_{k+1}c_1+\dots+y_n\overline{c}_{n-k}$

<u>Следствие:</u> множество решений ЛОС $A\vec{x}=\overline{0}$ называется общим решением $\overline{x}_{oo}=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i\overline{c}_i$, где $\alpha_i\in R$, $\overline{c}_1,\dots,\overline{c}_l$ - ФСРЛОС

Нормальная ФСР

1.Определение смешанного произведения векторов. Объем параллелепипеда и объем пирамиды,

построенных на некомпланарных векторах. Свойства смешанного произведения Вывод формулы смешанного произведения в ортонормированном базисе.
2. Понятие ранга матрицы. Доказательство критерия Кронекера-Капелли Совместимости СЛАУ.
1.Смешанным произведением векторов называется число равное (axb)c = |axb||c|cos((axb)^c), Смешанное произведение 3 некомпланарных векторов равно объему паралилепипда образованого этими векторами. Взятого с плюсом если это правая тройка и с минусом если левая.V пирамиды равна 1/6 V паралелипипида.1.(bxa)c=-(axb)c,(bxc)a=(axb)c=a(bxc);2.смеш произв равно 0 титтк векторы компланарны.3. при перестановки местами любых 2 векторов в тройке, произведение меняет ориентацию.Вывод в ортонормированном базисе a(bxc);это 3определитель матрица. Строки координаты.
2.Раногом матрицы A называют число равное порядку базисного минора.бм-минор максимального порядка != 0.1. Ранг матрицы не изменяется при танспонировании и эл-х преобразованиях
Для того чтобы система была совместной необх. и дост. Чтобы ранг матрицы сис - мы равнялся рангу расшир-ой мат-цы сис – мы.
1 Если Существует решение, то век-ая записьозначает , что столбец свободных членов есть лин комбинация столбцов матрицы системы. Значит, добавление этого столбца не увеличивает общего числа линейно независимых столбцов в силу одного из следствий теоремы о базисном миноре, и ранг остаетсься прежним.
2. Пусть PгA = PгA*.В этом случае базисный минор матрицы A является базизным и в матрице A*. Это означает, что столбец свободных членов есть линейная комбинация тех столбцов матрицы A в которых расположен базисный минор. По предложению что если столбец a есть лин комбинация столбцов a1 a2 .. aн, то он также будет лин комбинац системы сод a1 a2 aн, если к остальным поставить коэфицент ноль.) в этом случае столбец своб членов есть лин комбинация всех столбцов матрицы A. Коэффиценты этой лин комбинаци представляют собой решение системы.
1.Определение декартовой прямоугольной системы координат. Задачи о нахождении длины отрезка и делении отрезка в заданном отношении.
2.СЛАУ. Различные формы записи СЛАУ. Понятие совместности СЛАУ. Доказательство теоремы о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.
1.Декартова система координат на пл-ти задана если задана точка и пара некомпланарных векторов. Д.С.К. называют премоугольной если вкт попарно перпендикулярны.
2. 1. Решением СЛАУ называют совокупность n чисел которые будучи подставленными в ур-я,

обращают их в тождество.

2.СЛАУ наз-ся совместной если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае СЛАУ несовместна.

3.Совместную сис-му наз определелееной, если она имееттолько одно решение. В противном случае – неопределенной.

4. Систему наз-ют однородной если все свободные члены равны 0, в противном случае неоднородной.

Составим м-цу из аиж коэф при неиз-ых.А = (а11 а12 ..а1н)/(а21 а22 .. а2н)итд.

- матрица системы. В = (в1/в2/ .../вм) – матрица столбец св-ых членов.

Х = --\-- м-ца ст-ц неизвестных. А*Х = В – мат-ая форма записи СЛАУ.

Аж = (а1ж/а2ж/../амж), А1х1+А2х2+..+Анхн = В векторная форма записи.

ЛНС. $A\vec{x}=\bar{b}$ - ЛНС, $A\in P_{m\times n}$ (m – число уравнений, n – число неизвестных); $A\vec{x}=\bar{0}$ - приведённая однородная система (ПОС)

<u>Свойства решений ЛНС:</u>

$\bar{x}_н$ - решение ЛНС, $\bar{x}_0$ - решение ПОС $\Rightarrow$ $\bar{x}_н+\bar{x}_o$ - решение ЛНС

$\bar{x}_{н1}$, $\bar{x}_{н2}$ - решение ЛНС $\bar{x}_{н1}-\bar{x}_{н2}$ - решение ПОС

Пусть $\bar{x}_н$ - решение ЛНС, тогда для любого решения ЛНС -: $\exists\bar{x}_o$ - решение ПОС $\bar{y}=\bar{x}_н+\bar{x}_o$

<u>Доказательство:</u>

$$A(\bar{x}_н+\bar{x}_o)=A\bar{x}_н+A\bar{x}_o=\bar{b}+\bar{0}=\bar{b}$$

$$A(\bar{x}_{н1}-\bar{x}_{н2})=A(\bar{x}_{н1})-A(\bar{x}_{н2})=\bar{b}-\bar{b}=\bar{0}$$

Пусть $\bar{y}$ - решение ЛНС $\Rightarrow$ $\bar{y}-\bar{x}_н=\bar{x}_o$ - решение ПОС $\Rightarrow$ $\bar{y}=\bar{x}_н+\bar{x}_o$

Множество всех решений ЛНС называется общим решением

$$\bar{x}_{он}=\bar{x}_{чн}+\bar{x}_{оо}$$

1.Доказать, что любое уравнение 1ой степени относительно декартовых прямоугольных векторах определяет на плоскости прямую. Понятие нормального вектора прямой. Уравнение прямой, проходящей через 2 заданные точки. Уравнение прямой «в отрезках».

2.Понятие совместности СЛАУ. Доказательство совместности СЛАУ.

1.Любая прямая на плоскости представляет собой алгебраическую кривую первого порядка и любая алгебраическая кривая первого порядка на плоскости есть прямая.

1.Рассмотрим прям Л М0(х0,у0) лежит на Л а вкт н = {a,b} перпендикулярен прямой. М(х,у) принадлежит Л только если вкт М0М перпенд вкт н.запишем условие ортогональности.а(х-х0)+в(у-у0) = 0 или Ах+Ву +С = 0.

2.Доказывается наоборот.

Ax + By+C = 0 A и B координаты нормального вкт.

(x-x1)/(x2-x1) = (y-y1)/(y2-y1) – ур-е пр проход через 2 тчк

x/a+y/в = 1 в отрезках. Точки пер с осями координат.

2.Совместной СЛАУ называют если она имеет какие либо решения. Иначе она называеться несовместной.

Для того чтобы система была совместной необх. и дост. Чтобы ранг матрицы сис - мы равнялся рангу расшир-ой мат-цы сис – мы.

1 Если Существует решение, то век-ая записьозначает , что столбец свободных членов есть лин комбинация столбцов матрицы системы. Значит, добавление этого столбца не увеличивает общего числа линейно независимых столбцов в силу одного из следствий теоремы о базисном миноре, и ранг остаетсься прежним.

2 Пусть РгА = РгА*.В этом случае базисный минор матрицы А является базизным и в матрице А*. Это означает, что столбец свободных членов есть линейная комбинация тех столбцов матрицы А в которых расположен базисный минор. По предложению что если столбец а есть лин комбинация столбцов а1 а2 .. ан, то он также будет лин комбинац системы сод а1 а2 ан, если к остальным поставить коэфицент ноль.) в этом случае столбец своб членов есть лин комбинация всех столбцов матрицы А. Коэффиценты этой лин комбинаци представляют собой решение системы.

1.3 Лекция 3

1.Вывод параметрических уравнений и канонического уравнения прямой на плоскости. Понятие направляющего вектора прямой. Вывод уравнения прямой с угловым коэффициентом.

2.Понятие матрицы. Виды матриц. Равенство матриц. Линейные операции над матрицами, операция транспонирования матриц. Доказательство их свойств.

1.Вкт M0M={x-x0;y-y0}, s = {l;m} x-x0=lt;y-y0=mt; x = x0+lt; y = y0+mt; -параметриеское. (x-x0)/l = (y-y0)/m- каноническое ур-е. Ненулевой вкт параллельный данной прямой называют направляющим.(y-y0)/(x-x0) = tgL

Y=kx+b;

2. Матрицей называют прямоугольную таблицу чисел. Если число строк равно числу столбцов то матрица наз-тся квадратной., матрица строка, столбец, нулевая. Равенство матриц. Верняя/нижняя треугольная матрица, диагональная,единичная.единичная обозначаеться E,I.Диаг ^, к линейным операциям относят операции сложения и умножения на число, суммой

дву матриц одного размера называют матрицу тогоже размера эл-ты которой равны суммам соответствующих элеметов. Произведением матрицы на число называется матрица тогоже размера элементы которой равны элементам данной умноженным на данное число. Св-ва лин опреаций 1 А+В =В+А, (А+В)+с = А+(В+С), Л(А+В)=ЛА+ ЛВ, (Л+В)А=ЛА+ ЛВ,
1А=А, 0А=А,А+0=А , А+(-А)=0, Матрица Ат называют транспонированой матрица по отношению к А если атиж=ажи, 1 столбец становица 1 строкой.
(А+В)т=Ат+Вт, Атт=А.А-симетричная матрица Ат=А.
1.Различные виды уравнения прямой на плоскости: общее уравнение, каноническое уравнение, уравнение с угловым коэффициентом, уравнение прямой «в отрезках». Геометрическое толкование входящих в систему параметров. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных своими общими или каноническими уравнениями. Вывод формулы для вычисления угла между двумя прямыми.
2.Умножение матриц. Доказательство свойств умножения матриц.
1.Ax + By+C = 0-общее, (x-x0)/l = (y-y0)/m- каноническое ур-е.,y=kx+b-с угловым коэфицентом. x/a+y/в = 1 в отрезках.Вкт M0M={x-x0;y-y0}, s = {l;m} x-x0=lt;y-y0=mt; x = x0+lt; y = y0+mt; - параметриеское. Ax + By+C = 0 A и B координаты нормального вкт. (x-x1)/(x2-x1) = (y-y1)/(y2-y1) – ур-е пр проход через 2 тчк. Точки пер с осями координат.паралельность общее-a1/a2=в1/в2. каноническое m1/m2=l1/l2. пепендикулярность a1a2+b1b2=0, угол через скалярное произведени cos(fi)=|n1n2|/|n1||n2|=|a1a2+b1b2|/sqr(a1^2+b1^2)/sqr(a2^2+b2^2); Tг = (k1-k2)/(1+k1k2); это наименьший угол.
2.Рассмотрим A = (аик)мхл и B = (вкж)лхн Произведением матрицы A на матрицу B называют матрицу C = (сиж)мхн размера мхн эл-ты котрой соот равны. Строка умножаеться на столбец. AB!=BA,(A+B)C=AC+BC,ABC=A(BC) ,
(LA)B=L(AB),Amxn0nxk=0mxk,AIn=ImA=A,det(AB)=det(A)det(B);
1.Нормальное ур-е прямой на плоскости,его получение из общего уравнения.Геометрическое толкование входящих в него параметров Отклонение точки от прямой, выведение формулы для вычисления расстоянияот точки до прямой.
2.Понятие обратной матрицы.Доказательство единственности ОМ.???обратно-матричное произведение 2х невырожденных матриц.
1.N={cos(fi),sin(fi)}, N per L, M(x,y), OM*N=P(ратояния от O до L),xcos(fi)+ysin(fi)-p=0 – норм ур-е. Чтоб из общего ax+by+c=0 получить норм надо разделить на нормирующий множитель взятый со знаком противоположным с. Sqr(a^2+b^2), 3x-4y+10=0, -3/5x+4/5y-2=0 fi – угол от оси x против часовой, p – расстояние от O до L. M(x,y),b=xcos(fi) +ysin(fi)-p

Надо брать по модулю.для общего ур-я, |Ax+By+C|/sqr(a^2+b^2) M(x,y)

2.Пусть A квадратная матрица порядка н . Квадратную матрицу B тогоже порядка называют обратной к A если AB=BA=E где E единичная матрица порядка н. Теор. Если квадратная матр A имеет обр матр , то обр матр единственная. Предположим что матр A имеет две обр матр B и B' тогда согл опр выполнены AB'=E и BA=E Используя ассоциативность умножения имеем B=BE=B(AB')= (BA)B' = E B' = B'. Т.е они равны. ???

Док-ать что любое ур-е 1ой степени относительно декартовых прямоугольных координат в пространстве определяет плоскостьюПонятие нормального вектора плоскости. Вывод ур-я плоскости проходящей через 3 точки и ур-е в отрезках.

2.Понятие присоединенной матрицы.критерий существования обратной матрицы и ее связь с присоединенной матрицей.

1.M0(x0;y0;z0), M(x,y,z),n{A,B,C};A(x-x0)+B(y-y0)+C(z-zo)=0, n- нормальный вектор плоскости. Через 3 точки M1M ={x-x1;y-y1;z-z1} M1M2={x2-x1;y2-y1;z2-z1} M1M3 ={x3-x1;y3-y1;z3-z1}, если определитель равен 0 то они компланарны и задают плоскость. Решаем относительно x,y,z. В отрезках тоже самое только вкт M1M2 = {-a;b;0} M1M3{-a;0;c} M1M={x-a;y;z), x/a+y/b+z/c=1/

2.Матрицу A* транспонированную к матрице алгебраических дополнений называют присоединенной. A-1 = A*/detA, A =(1,2/3,4) A*t(4,-3/-2,1), A* (4,-2/-3,1) A-1 = -1/2(4,-2/-3,1) = (-2,1/1.5,-0.5)

1.Общее ур-е плоскости.Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.Вывод формулы для вычисления угла между плоскостями.Вывод ур-я плоскости проходящей через 3 точки. 2.Решение матрич ур-й вида AX=B с невырожденной A.

Вывод формулы крамера для решения системы линейных ур-й с невырожденной квадратной матрицей.

1.Ax+9By+Cz+D=0, A,B,C – координаты нормального вкт.

Перпендикулярность – норм вкт перпенд, A1A2+B1B2+C1C2 =0, паралельность A1/A2=B1/B2=C1/C2;

Угол между плоскостями cos(fi) = (A1A2 + B1B2+C1C2)/sqr(A1^2+B1^2+C1^2)/ sqr(A2^2+B2^2+C2^2);

Через 3 точки M1M ={x-x1;y-y1;z-z1} M1M2={x2-x1;y2-y1;z2-z1} M1M3 ={x3-x1;y3-y1;z3-z1}, если определитель равен 0 то они компланарны и задают плоскость. Решаем относительно x,y,z.

2.2 метода, стандартный када находим обратную матрицу и када из (A|B) получаем (E|B1) где B1 решение.

Ax=b,x=A-1b,A-1= (aij), (aij) = Aji/detA,где Aji алгебраическое дополнение. X1 =(A11b1+A21b2

+…+An1bn)/detA где числитель представляет собой разложение по первому столбцу матрицу А у которой вместо первого столбца стоит матрица столбец свободных членов. Xj = ^j/detA, j = 1,n.

1.4 Лекция 4

1. Док-ать что любое ур-е 1ой степени относительно декартовых прямоугольных координат в пространстве определяет плоскостьюПонятие нормального вектора плоскости. Вывод формулы для вычисления раст от точки до плоскости.
2. Линейная зависимость и линейная независимость векторов, строк и столбцов матрицы. Доказательство критерия линейной зависимости.

1.

M0(x0;y0;z0), M(x,y,z),n{A,B,C};A(x-x0)+B(y-y0)+C(z-zo)=0, n- нормальный вектор плоскости. Растояние от тчк до пл. P=|Ax0+By0+Cz0+D|/sqr(A^2+B^2+C^2);

2.Столбцы матрицы А называют линейно зависимыми, если существуют числа такие что хотябы один не равен нулю, и при этом лин комбинация столбцов равняеться нулевой матрице столбцов.

Столбцы матрицы А называют лин незав если их линейная комбинация равняеться нулевой матрице столбцу только при всех коэффицентах равных нулю.Для того чтоб столбцы матрицы А были лин зависимыми необх и дост чтобы один из столбцов явл лин комбинацией остальных.

1.Общие ур-я прямой в пространстве. Вывод вкт , канонического и параметрического уравнений прямой в пространстве.
2. Понятие минора матрицы, Базисный минор. Доказательство теоремы о базисном миноре.

1.

Общее – задается как пересечение двух плоскостей. R=r0+ts r,r0-радиус вектор – векторное.(x-x0)/l = (y-y0)/l=(z-z0)/n – каноническое.x=x0+lt;

2.

Минором матрицы А типа mxn порядка к называют определитель составленный из элементов этой матрицы, состоящих на пересечении произвольно выбранных к строк и к столбцов с сохранением порядка этих строк и столбцов.

Минор матрицы А отличный от 0 называется базисным если все миноры более высокого

порядка равны 0. Строки и столбцы на которых находиться баз минор тоже наз базисными.
Теор. Базисные столбцы(строки) явл. Линейно независимыми, все остальные явл их линейными комбинациями.
Док-во, Опираясь на св-ва опр, не нарушая общности доказательства будем считать что минор M=|a11…a1r/…./ar1…arr| являеться базисным Докажем независимость базисных столбцов от противного, пусть баз столбцы лин зависимы тогда можно утверждать что один из базисных столбцов есть лин комбинация оставшихся, следовательно этот минор равен нулю что противоречит опред баз минора.Докажем что остальные столбцы есть лин комбинация базисных. Добавим еще одну строку и столбец, столбец не базисный а строку любую, этот минор будет равен нулю, разложим его по последней строке и получим линейную зависимость аиж эл-та от остальных и следовательно столбцы будут тоже лин зависимыми
Билет 16
1. Условия паралельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Вывод формулы для вычисления угла между пространственными прямыми. Условие принадлежности двух прямых плоскости. Скркщивающиеся прямые.
2.Доказательство теоремы о базисном миноре. Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы и его базисного минора.
1.
Паралельность $l1/l2=m1/m2=n1/n2$, перпендикулярность $l1l2+m1m2+n1n2 = 0$, ghzvsvb $\cos(fi) = (l1l2 + m1m2+n1n2)/sqr(l1^2+m1^2+n1^2)/ sqr(l2^2+m2^2+n2^2)$;
Они должны пересекаться либо быть паралельными. Недолжны быть скрещивающимися, те смешанное произведение вектора M1M2 (точки на прямых) и направляющих вкт равно 0.
2.
Теор. Базисные столбцы(строки) явл. Линейно независимыми, все остальные явл их линейными комбинациями.
Док-во, Опираясь на св-ва опр, не нарушая общности доказательства будем считать что минор M=|a11…a1r/…./ar1…arr| являеться базисным Докажем независимость базисных столбцов от противного, пусть баз столбцы лин зависимы тогда можно утверждать что один из базисных столбцов есть лин комбинация оставшихся, следовательно этот минор равен нулю что противоречит опред баз минора.Докажем что остальные столбцы есть лин комбинация базисных. Добавим еще одну строку и столбец, столбец не базисный а строку любую, этот минор будет равен нулю, разложим его по последней строке и получим линейную зависимость аиж эл-та от остальных и следовательно столбцы будут тоже лин зависимыми.

Минор M* матрицы А называют окаймляющим для минора М если он получен из последнего путем добавления одной новой строки и одного столбца матрицы, Если для некоторого минора все окаймляющие миноры равны 0 то он является базисным.

Билет 17

1. Условия паралельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Вывод формулы для вычисления угла между пространственой прямой и плоскостью. Условие принадлежности данной прямой плоскости.

2.Ранг и базисный минор матрицы.Доказательство теоремы о базисном миноре

1.

Паралельность Al+Bm+Cn=0, M0 не принадлежит п. Перпендикулярность A/l = B/m=C/n, sin(fi)= |cos(te)| = (Al + Bm+Cn)/sqr(1^2+m^2+n^2)/ sqr(A^2+B^2+C^2); принадлежит если вкт перпендикулярен и точка принадлежит плоскости.

2.

Раногом матрицы А называют число равное порядку базисного минора.бм-минор максимального порядка != 0.1. Ранг матрицы не изменяется при танспонировании и эл-х преобразованиях. Минором матрицы А типа mxn порядка к называют определитель составленный из элементов этой матрицы, состоящих на пересечении произвольно выбранных к строк и к столбцов с сохранением порядка этих строк и столбцов.

Минор матрицы А отличный от 0 называется базисным если все миноры более высокого порядка равны 0. Строки и столбцы на которых находиться баз минор тоже наз базисными.

Теор. Базисные столбцы(строки) явл. Линейно независимыми, все остальные явл их линейными комбинациями.

Док-во, Опираясь на св-ва опр, не нарушая общности доказательства будем считать что минор M=|a11…a1r/…./ar1…arr| являеться базисным Докажем независимость базисных столбцов от противного, пусть баз столбцы лин зависимы тогда можно утверждать что один из базисных столбцов есть лин комбинация оставшихся, следовательно этот минор равен нулю что противоречит опред баз минора.Докажем что остальные столбцы есть лин комбинация базисных. Добавим еще одну строку и столбец, столбец не базисный а строку любую, этот минор будет равен нулю, разложим его по последней строке и получим линейную зависимость аиж эл-та от остальных и следовательно столбцы будут тоже лин зависимыми.

Билет 18

1.Вывод формулы для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми.

2.Однородные СЛАУ. Доказательство теоремы о структуре общего решения однородной СЛАУ.

1.p=|s1s2M1M2|(смешанное произведение)/|s1xs2|

2.Это когда свободные члены равны 0. Теор. Если x1,…,xk – произвольная фундаментальная система решений однородной СЛАУ Ax=0 то любое ее решение можно представить в виде x = c1x1+..+ckxk где c1..ck некоторые постоянные.

1.Определение элипса как геометрического места точек, вывод канонического ур-я элипса.

2. Понятие обратной матрицы, доказательство ее единственности, существования и равенства (A^-1)т=(Aт)^-1

1.Множество всех точек на плоскости для которых сумма растояний до двух данных точек F1 и F2 называемых фокусами есть заданная постоянная величина 2a.|F1M|+|F2M| = 2a, (x-c)^2+y^2=4a^2-4asqr((x+c)^2+y^2)+(x+c)^2+y^2, a^2-c^2=b^2, x^2/a+y^2/b =1;

2.Пусть А квадратная матрица порядка н . Квадратную матрицу В тогоже порядка называют обратной к А если АВ=ВА=Е где Е единичная матрица порядка н. Теор. Если квадратная матр А имеет обр матр , то обр матр единственная. Предположим что матр А имеет две обр матр В и В’ тогда согл опр выполнены АВ’=Е и ВА=Е В=ВЕ=В(АВ’)= (ВА)В’ = Е В’ = В’. Т.е они равны. At(A-1)t=E (A-1)t At=E, At(A-1)t=(A-1A)t=Et=E.

1.Определени гиперболы как геометрического места точек.вывод канонического ур-я гиперболы.

2.Понятие совместности СЛАУ.Доказательство критерия совместности СЛАУ.

1.Геоиетрическое место точек плоскости для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек(фокусов) есть величина постоянная называют гиперболой.F1F2=2c,F1M-F2M=2a, x^2/a^2-y^2/b^2=1

2.Совместной СЛАУ называют если она имеет какие либо решения. Иначе она называеться несовместной.

Для того чтобы система была совместной необх. и дост. Чтобы ранг матрицы сис - мы равнялся рангу расшир-ой мат-цы сис – мы.

1 Если Существует решение, то век-ая записьозначает , что столбец свободных членов есть лин комбинация столбцов матрицы системы. Значит, добавление этого столбца не увеличивает общего числа линейно независимых столбцов в силу одного из следствий теоремы о базисном миноре, и ранг остаетсья прежним.

2 Пусть РгА = РгА*.В этом случае базисный минор матрицы А является базизным и в матрице А*. Это означает, что столбец свободных членов есть линейная комбинация тех столбцов матрицы А в которых расположен базисный минор. По предложению что если столбец а есть лин комбинация столбцов а1 а2 .. ан, то он также будет лин комбинац системы сод а1 а2 ан,

если к остальным поставить коэфицент ноль.) в этом случае столбец своб членов есть лин комбинация всех столбцов матрицы А. Коэффиценты этой лин комбинаци представляют собой решение системы.

1.Определение параболы как геометрического места точек.Вывод канонического определения параболы.
2.Однородные СЛАУ и их ФСР, Доказательство критерия существования ненулевых решений однородной квадратной СЛАУ.
1.Геометрическое место точек равноудаленных от данной точки(фокуса) и данной прямой(директриссы),d=FM расстояние от точки до дир равно растоянию от точки до фокуса. D=|x+p/2| FM= sqr((x-p/2)^2+y^2), p – растояние от фокуса до директриссы. Y^2=2px/
2. Однородной СЛАУ наз та у которой все свободные члены равны нулю. ФСР однр СЛАУ наз упорядочееную совокупность (n-r) линнейно-независимых ее решений.Для существования ненулевого решения у однородной квадратной СЛАУ необходимо и достаточно чтобы ее матрица была вырожденна..Если матрица однородной системы невырождена, то , согласно формулам крамера она будет иметь только нулевое решение, еслиже она будет вырожденна то ее определитель являющийся в квадратной матрице единственным минором максимального порядка равен 0, значит ранг r матрицы системы меньше ее порядка и следовательно меньше количества неизвестных, Поэтому k=n-r>0 и однородная СЛАУ имеет нормальную фундаментальную систему. Из k>0 решений каждое из этих решений являеться не нулевым.

1.5 Лекция 5

1.Понятие цилиндрических поверхностей и вывод ее уравнения. Каноническое ур-е цилиндрич поверхности 2го порядка.
1.цилиндрическая поверхность получаеться при движении прямой в пространстве, которая остаётся параллельной своему исходному положению. Если на движущейся прямой фиксировать точку то она опишет кривую которая называеться направляющей цил пов.
Цил второго порядка это цилиндрическая поверхность, направляющая которой в плоскости перпендикулярной образующим представляет собой кривую второго порядка. Такоеже как и просто кривые 2-го порядка.

Поверхности вращения, и вывод ее ур-я,каноническое ур-е поверхностей, образованных вращением элипса гиперболы параболы.

Поверхность называеться поверхностью вращения если она образована окружностями с центрами на некоторой прямой(оси вращения) которые расположены в плоскостях перпендикулярных оси.

Предположим что множество S в плоскости Oxz описываеться ур-м fi(x,z)=0 Рассмотрим произвольную точку M(x,y,z) Она удалена от оси Oz на раст d=sqr(x^2+y^2) если точка M лежит на поверхности вращения, то точчки M1(x1;0;z), M2(x2;0;z) с тойже ординатой z что и M и абциссами x1=d,x2=-d принадлежат множеству S поэтому 0=fi(x1,z)=fi(d,z)=fi(sqr(x^2+y^2),z) 0=fi(x2,z)=fi(-d,z)=fi(-sqr(x^2+y^2),z), fi (+-sqr(x^2+y^2),z)=0;ур-е элипса,начло прямоуг системы координат в центре ось oz с осью вращения а координатную плоскость Oxz с плоскостью элипса. X^2/a^2+z^2/b^2 = 1- уре элипса, если заменить x на (+-sqr (x^2+y^2) то получиться X^2/a^2+y^2/a^2+z^2/b^2 = 1 – элипсоид вращения, X^2/a^2+y^2/a^2-z^2/b^2 = -1 – двуполостной вращения гипербалоид вращения. X^2/a^2+y^2/a^2-z^2/b^2 = 1 – однополостной гипербалоид вращения. 2pz=x^2+y^2.

1.Каноническое ур-е элипсоида. Исследование формы поверхности методом сечения.

X^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1, Для выяснения формы поверхности в пространстве используют метод сечений, он состоит в анализе пересечений поверхности с плоскостями паралелльными координатным плоскостям.

Билет 28

1.Каноническое ур-е конуса. Исследование формы поверхности методом сечения

X^2/a^2+y^2/b^2=z^2/c^2

1.Каноническое ур-е гиперболоида. Исследование формы поверхности методом сечения.

X^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2 = 1-однополостной

X^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2 = -1 – двуполостной

1.Каноническое ур-е параболоида. Исследование формы поверхности методом сечения

X^2/a^2+y^2/b^2=2z

ВЫВОДЫ

В курсе лекций будут рассмотрены основные темы курса «Аналитическая геометрия» такие как: основные законы кинематики и кинематического движения тел, основные законы статики, основные законы динамики, основные законы движения и взаимодействия элементарных частиц.

Данный конспект лекций составлен на основе лекционного курса, читаемого в МГТУ им. Н.Э. Баумана на кафедре иу4 преподавателем Агафонов В. Б. Курс лекций рекомендован к выполнению текущих аттестационных мероприятий и подготовки к экзамену по предмету «Аналитическая геометрия».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. - М.: Изд-во МГУ, 1969.
2. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1976.
3. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1970.