МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Лекции для подготовки к
сдаче дисциплины :

«Линейная алгебра»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Лекции для подготовки к
сдаче дисциплины :

«Линейная алгебра»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

ВВЕДЕНИЕ

В лекциях рассмотрены преобразования квадратичных форм, позволяющие приводить квадратичную форму к каноническому виду; приведены критерии законоопределенности квадратичных форм и на примерах показано использование квадратичных форм для задания функций, определяющих кривые и поверхности второго порядка.

Лекции по линейной алгебре. 2 семестр.

Лекция №1:

№1.Переход к новому базису линейного пространства:

Пусть имеется два базиса

$(e_1,e_2,\ldots,e_n) \to B$

$(e'_1,e'_2,\ldots,e'_n) \to B'$

пусть координаты произвольного вектора $\bar{x}$ в старом базисе

(B) $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, в новом (B') $X'=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\vec{x}=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n=BX$

$\vec{x}=x'_1e'_1+x'_2e'_2+\ldots+x'_ne'_n=B'X' \to BX=B'X'$

Опр.1:Матрицей перехода от базиса B к базису B' наз. матрица $T_{B\to B'}$, столбцами которой являются координаты новых базисных векторов в старом базисе, т. е.

$$e'_1=t_{11}e_1+t_{21}e_2+\ldots+t_{n1}e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e'_n=t_{1n}e_1+t_{2n}e_2+\ldots+t_{nn}e_n$$

$$T_{B\to B'}=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

эта матрица не вырожденная - определитель не равен нулю, т. е. векторы нового базиса линейно независимы.

T1: $X=TX'$

◩

$BX=B'X' \to BX=(BT)X'=B(TX') \to X=TX'$

$B'=BT$

$$(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)=(e_1,e_2,\dots,e_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

■

№2:Евклидово пространство:

Опр.2:Евклидовым пространством наз. подпространство линейного пространства, для которого выполнены требования:

-имеется правило, по которому двум произвольным векторам Евклидово пространства ставится в соответствие число, которое наз. скалярным произведением и обозначается:

для любого x,y прин. $E_n \to (x,y)$

-это правило удовлетворяет четырём аксиомам:

1: $(x,y)=(y,x)$

2: $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$

3: $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

4: $(x,x) \geq 0$ и $(x,x)=0 \Longleftrightarrow x=0$

Пример: рассмотрим линейное пространство функций, непрерывных на [a;b] $(C_{[a,b]})$

Данное пространство является бесконечномерным.

Скалярное произведение на этом пространстве определяется как

для любого f(x),g(x) сущ. $C_{[a,b]}$

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

Норма вектора: $\|f(x)\|=\sqrt{f(x)\,g(x)}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$

T2: (Неравенство Коши – Бунековского) скалярное произведение двух векторов E_n всегда $\leq$,чем произведение норм этих векторов.

для любого x,y прин.E_n $(x,y) \leq \|x\|\,\|y\|$

◪ для любого λ прин. R $(x+\lambda y)^2 \geq 0$

$$(x+\lambda y, x+\lambda y)=x^2+2\lambda(x,y)+\lambda^2 y^2 \geq 0$$

$$D=b^2-4ac=4(x,y)^2-4x^2y^2 \leq 0$$

$$(x,y)^2 \leq x^2y^2$$

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\| \rightarrow (x,y) \leq \|x\|\,\|y\|$$

Следствие1:

$$-1 \le \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} \le 1$$

Отсюда корректно вводить понятие угла между векторами:

$$\cos(x\hat{\ },y) = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}$$

Лекция №2:

№1:Норма вектора. Ортогональность.
Следствие1из теоремы Коши – Бунековского (неравенство треугольника):

$$\|x\|+\|y\| \ge \|x+y\|$$

$$\|x+y\| = \sqrt{(x+y\,,x+y)} = \sqrt{x^2+2xy+y^2} \le$$
$$\le \|x\|+\|y\|$$

T1:(Линейная независимость ортогональной системы векторов): Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_n$ - ортогональная система ненулевых векторов, тогда $e_1,e_2,\ldots,e_n$ - линейно независима.

◪

Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_n$ линейно зависимы, тогда хотя бы один из них будет выражаться в виде линейной комбинации остальных:

например, $e_1=\lambda_2 e_2+\ldots+\lambda_n e_n$

$$(e_1)^2 \neq 0 \qquad \lambda_2 e_2\, e_1=0 \qquad \lambda_n e_n\, e_1=0$$

получили противоречие.

■

Опр.1:Базис e_1, e_2 ,…, e_n наз. ортонормированным, если все векторы базиса попарно ортогональны и норма каждого вектора равна единице.

Ортогонализация системы векторов (процедура Шмидта): пусть имеется система не ортогональных векторов b_1, b_2 ,…, b_n , на базе этих векторов построим систему ортогональных векторов:

$$e_1= b_1$$

$$e_2= b_2-(b_2\, e_1)\, e_1/(e_1)^2$$

$$e_3= b_3 -(b_3 e_1)\, e_1/ (e_1)^2-(b_3\, e_2)\, e_2/ (e_2)^2$$

$$e_n= b_n -(b_n\, e_1)\, e_1/(e_1)^2-(b_n\, e_2)\, e_2/ (e_2)^2-\ldots-(b_n\, e_{n-1})\, e_{n-1}/ (e_{n-1})^2$$

Пример: ортогонализировать систему векторов

$\vec{a}=(1,0,0)$

$\vec{b}=(1,1,0)$

$\vec{c}=(1,1,1)$

Решение:

$e_1=(1,0,0)$

$e_2=(1,1,0)-1*(1,0,0)/1=(0,1,0)$

$e_3=(1,1,1)-1*(1,0,0)/1-1*(0,1,0)/1=(0,0,1)$

$e_1\ e_3=0$

$e_2\ e_3=0$

$e_2\ e_1=0$

№2 Линейные операторы:

Опр.1:Оператор, действующий на линейном пространстве L_n, наз. линейным, если:

(1): для любого x,y прин. L_n $a(x+y)= ax+ ay$

(2): λ прин. R $a(\lambda x)= \lambda a(x)$, где a- оператор.

Замечание: Оператор есть отображение линейного пространства $L_n \to L_m$ (с помощью a),
при котором для любого x прин. L_n y= ax прин. L_m

Примеры лин. операторов:

(1) Оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}f$

(2) Оператор проектирования геометрических векторов на плоскость.

Матрица оператора:

Пусть в пространстве L_n задан базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$,
в пространстве L_m _ $g_1, g_2, \ldots, g_m$ и есть лин. оператор, который преображает L_n в L_m. (с помощью a)

Опр. 2:Матрицей оператора наз. матрица, столбцами, которой являются координаты образов базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в базисе $g_1, g_2, \ldots, g_m$.
Образы лежат в L_m.

Образ базисного вектора:

$$a\, e_1 = a_{11}\, g_1 + a_{21}\, g_2 + \ldots + a_{m1}\, g_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a\, e_n = a_{1n}\, g_1 + a_{2n}\, g_2 + \ldots + a_{mn}\, g_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Т. 2. Пусть $\vec{x}$ - произвольный вектор L_n,
а - лин. оператор, действующий из L_n в L_m
с матрицей А, тогда образ вектора $\vec{x}$ (y= ax)
имеет координаты, которые вычисляются по формуле

$$Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ .... \\ y_m \end{pmatrix} = AX := \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$$

■

$$a\,e_1 = a_{11}\,g_1 + a_{21}\,g_2 + \ldots + a_{m1}\,g_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \to$$
$$a e_n = a_{1n}\,g_1 + a_{2n}\,g_2 + \ldots + a_{mn}\,g_m$$

$$\to \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & .... & a_{1n} \\ .... & .... & .... \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y-образ

$$y = ax = a(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i a e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(a_{i1}g_1 + ... + a_{mi}g_m) =$$

$$=(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)g_1+\ldots+(a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n)g_m$$

$$y_1=(a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n=(a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n)$$

$$Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} = AX := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Лекция №3.

№ 1. Действия над линейными операторами:

пусть даны два лин. оператора a и b,
с матрицами соответственно A ; B.

Опр. 1. Суммой операторов наз. оператор $a+b$, такой , что действие которого на произвольный вектор $\vec{x}$ дает $ax+bx$:

$$a+b \to (a+b)x=ax+bx$$

Опр. 2: Оператором λa наз. оператор , действие которого на вектор $\vec{x}$ равносильно произведению λ на образ ax.

$$\lambda a_{*x} \to \lambda(ax)$$

опр. 3: Композицией операторов a,b,c наз. оператор, действие которого равносильно воздействию $a(b(cx))$.

$$abc \to a(b(cx)).$$

В определениях 1-3 матрицы операторов удовлетворяет равенство :

1) $a+b \to A+B$
2) $\lambda a \to \lambda A$
3) $abc \quad ABC$ - матрицы должны быть (удовлетворять усл. пр-я матриц).

Т. 1 :Операторы в опр. 1-3 также явл. линейными.

◪ $a+b$- линейный оператор.

$$(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)=ax+ay+bx+by=$$
$$=(a+b)x+(a+b)y$$

■

Аналогично в Опр. 2 и Опр. 3.

Пусть в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрица оператора a имеет вид A.

т.к. базисов в пр-ве L_n бесконечно много, то возникает задача об изменении матрицы оператора при переходе к новому базису.

Т. 2 : Пусть в базисе В: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ а имеет матрицу А , а в базисе В’: $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ а имеет матрицу А’ , тогда связь между матрицами

$$A' = T^{-1}_{B-B'} A T_{B-B'}$$

$$Y' = T^{-1} Y = T^{-1} A X = T^{-1} A T X'$$

$$Y' = A' X'$$

$$A' = T^{-1} A T \qquad \blacksquare$$

Следствие :

$$\det A' = \det T^{-1} \det A \det T = (1/\det T) * \det A \det T = \det A$$

Определитель матрицы не меняется при переходе к новому базису.

№ 2. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора:

Опр. 4:Подпространство линейного пространства наз. инвариантным для лин. оператора а , если для любых x прин. L'_n образ опять лежит в этом подпространстве.

L'_n включает L_n x прин. L'_n ax прин. L'_n

Пример: пусть - оператор поворота вектора вокруг заданной оси на заданный угол, тогда множество всех векторов , параллельных этой оси явл. инвариантом для оператора поворота.

Рассмотрим одномерное инвариантное для оператора а , наз. подпространством собственных векторов лин. пространства, пространство.

Опр.5:Ненулевой вектор линейного пространства наз. собственным вектором линейного оператора, если действие на него оператора переводит этот вектор в коллинеарный.

x прин. L_n ,$x< >0$

$ax=\lambda x$, λ прин. R

При этом число λ наз. собственным числом линейного оператора.

Нахождение собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.

$AX=\lambda X$ $\quad\quad$ $AX-\lambda EX=0$

$(A-\lambda E)X=0$ $\quad\quad$ (2)

т.к. $x< >0$, то $|A-\lambda E|=0$ $\quad\quad$ (1)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

В L_n имеем уравнение n-ой степени , относительно λ (наз. характеристическим уравнением).

Для нахождения собственных векторов найденные λ подставить в выражение (2).

Лекция №4.

№1:нахождение собственных чисел и собственных векторов.
Пример: Найти собственные числа и векторы:

$$a \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A-\lambda E|=0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ 2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$\lambda_1=-2$

$\lambda_2=-1$

$\lambda_3=1$

Первое собственное число $\lambda_1=-2$, найдем собственный вектор:

$$AX'-\lambda_1 EX'=0$$

$(A-\lambda_1 E)X'=0$-однородная система.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=2$

$x_3=c$

$x_2=-c/2$

$x_1=c/2$

$$X^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=-2*\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Аналогичным образом находим собственные векторы, отвечающие λ_2 и λ_3.

$$X^{(2)} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Для λ_2

$$X^{(3)} := \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Для λ_3

Данные собственные векторы линейно независимы, образуют базис трёхмерного пространства L_3 . В этом базисе матрица имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№2:Сопряжённые операторы.

Рассмотрим подпространство линейного пространства. Евклидово пространство – это подпространство , на котором определена операция скалярного произведения векторов , подчиняющаяся четырём аксиомам(см. 1 семестр).

Опр.1: Оператор a^* наз. сопряжённым оператору a,если для любых векторов $\vec{x}\,,\vec{y}$ лин . пространства имеет место равенство:

$$(a\vec{x}\,,\vec{y})=(\vec{x},a^*\vec{y}) \qquad (1)$$

T1: Если a и a^* сопряжённые операторы , то $A^*=A^T$

Имеем (1). $a\vec{x} \mapsto AX \mapsto (AT)^T Y=X^T A^T Y$

$$a^*\vec{y} \mapsto A^*Y \mapsto X^T A^*Y$$

$$X^T A^T Y - X^T A^*Y=0$$

$$X^T(A^T - A^*)Y=0$$

Поскольку $\vec{x}$ и $\vec{y}$ произвольные векторы (не обязательно нулевые) ,то

$$A^T - A^*=0$$

$$A^T = A^* \qquad \blacksquare$$

Опр.2: Оператор a наз. самосопряженным , если имеет место равенство:

Для любого x,y прин. E_n $(ax,y)=(x,ay)$

Свойства самосопряженного оператора:
(1): Все собственные числа оператора обязательно действительны.
(2): Собственные векторы ,отвечающие различным собственным значениям самосопряженного оператора ортогональны.

Пусть λ и μ - два собственных значения ($\lambda \neq \mu$)
Собственному числу λ отвечает собственный вектор X,
собственному числу μ отвечает собственный вектор Y.

Скалярное произведение: XY=0

$$aX=\lambda X$$

$$aY=\mu Y$$

$$(aX,Y)=(X,aY)$$

$$(\lambda X,Y)-(X,\mu Y)=0$$

$$\lambda (X,Y)-\mu (X,Y)=0$$

$$(X,Y)(\lambda-\mu)=0 \rightarrow (X,Y)=0$$

Для обычного линейного оператора аналогом этой теоремы явл. теорема : Собственные векторы линейного оператора , отвечающие разным λ , линейно независимы.

■

Пусть a - линейный оператор, которому отвечают $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ собств. чисел, тогда докажем, что собственные векторы $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ линейно независимы.

Пусть $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ линейно зависимы, тогда сущ. нетрив.=0

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0}$$

Подействуем линейным оператором на эту линейную комбинацию:

$$a(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{x}_k) = 0$$

$$\alpha_1 a \vec{x}_1 + \alpha_2 a \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k a \vec{x}_k = 0$$

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k \lambda_k \vec{x}_k = 0$$

$$\alpha_1 \lambda_k \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_k \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k \lambda_k \vec{x}_k = 0$$

(1)-(2): $\nu_1 \vec{x}_1 + \nu_2 \vec{x}_2 + \ldots + \nu_{k-1} \vec{x}_{k-1} = 0$

Имеем линейную комбинацию, в которой k-1 слагаемых. Повторяем предыдущий алгоритм и получаем линейную комбинацию, где k-2 слагаемых. В итоге получим нетривиальную линейную комбинацию:

$$P_1 \vec{x}_1 = 0$$

Противоречие!!! ■

T3: Самосопряженный оператор всегда имеет базис из собственных векторов.

Обычный оператор не всегда имеет базис из собственных векторов.

Лекция № 5.

№1: Линейные операторы и самосопряженные линейные операторы.

Т. 1:Если собственное число λ_0 лин. оператора a имеет кратность S, то ему отвечает не более чем S лин. незав. собственных векторов.

◩

Пусть собственному числу λ_0 отвечает k лин. нез. собственных векторов

$$\lambda_0 \rightarrow \quad X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)} \subset L_n$$

Дополним эти векторы до базиса векторами

$e_{k+1}, \ldots, e_n$ в пространстве L_n.

Матрица оператора a в этом базисе имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_0 & \ldots & P \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \rightarrow$$

k-строк. k-столбиков

Для матрицы A составим характеристическое уравнение.

$$\rightarrow \begin{vmatrix} \lambda_0-\lambda & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & \lambda_0-\lambda & \ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & 0 & \ldots & \lambda_0-\lambda & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots 0 & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots 0 & \ldots\ldots \end{vmatrix} =0$$

$$(\lambda_0-\lambda)^k * P(\lambda)=0 \qquad (*)$$

Т.к. по условию теоремы кратность корня λ_0=S, то из уравнения (*) вытекает, что $k \le S$ (если P(λ_0)=0 , то k<S , а если $P(\lambda_0) \neq 0$, то k=S) . ■

Т. 2: Для самосопряженных операторов собственному числу λ с кратностью S соответствуют ровно S лин. нез. собственных векторов.
Таким образом, для самосопряженного оператора всегда сущ. ортогональный базис из собственных векторов, действительно разным λ отвечают ортогональные собственные векторы. Если кратность λ=S ,ему отвечают ровно S лин. нез. собственных векторов, которые можно ортогонализировать.
В целом получится ровно n ортогональных собственных векторов и именно они задают ортогональный базис.

Опр. 1: Лин. оператор наз. изоморфизмом, если он является соответствием взаимооднозначным.

Для изоморфизма существует обратный оператор.

$$y=ax \rightarrow x=a^{-1}y$$

a-изоморфизм.

Т. 3: Оператор, имеющий собственное число λ=0 не является изоморфизмом.

Пусть $\lambda=0$, тогда характеристическое уравнение

$$| A-\lambda E | = 0 \rightarrow |A|=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{ сущ. } A^{-1} \rightarrow \text{ не сущ. } a^{-1}$$

К свойствам самосопряженного оператора относится т. 2 (лекция 5), опр. 2 (лекции 4), собственные числа всегда действительны.

4. Сумма двух самосопряженных операторов явл. самосопр. оператором

a- с.с. оператор

b- с.с. оператор.

$$((a+b)x,y)=(ax+bx,y)=(ax,y)+(bx,y)=$$
$$(x,ay)+(x,by)=(x,(a+b)y)$$

5.Если a и b с.с. операторы, то композиция операторов явл. с.с. только в одном случае:

ab-с.с.оператор <=> ab=ba

6.Обратный оператор a^{-1} также явл. с.с.

Ортогональные матрицы и ортогональные операторы.

Опр. 2: Матрица A наз. ортогональной, если

$$A^T A = E$$

Свойства ортогональных матриц:

1. $A^{-1} = A^T$ $\qquad A^T A = E$
2. $\Delta_A = |1|$ $\quad \det A^T \det A = 1 \Rightarrow (\Delta_A)^2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\Delta_A)^2 = |1|$$

$$\det A^T = \det A$$

3. Матрица A^T также явл. ортогональной.
4. Ортогональные матрицы и только они служат матрицами перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному.

◪ $\qquad e_1, e_2, \ldots, e_n$ -ортонормированный базис
$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ -ортонормированный базис.

$$
\begin{array}{c}
T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
\quad\quad e_1' \quad\; e_2' \quad \dots \quad e_n'
\end{array}
$$

$$
T^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$(a_{11}\dots\dots a_{n1}) = e_1'$

$\dots\dots\dots\dots\dots$

$(a_{1n}\dots\dots a_{nn}) = e_n'$

$e_1'\,e_1'=1 \quad e_2'\,e_2'=1 \quad \dots\dots \quad e_n'\,e_n'=1$

$$
T^T T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$\blacksquare$

Опр.4: Оператор a, действующий в евклидовом пр-ве наз. ортогональным, если

$$(x,y)=(ax,ay)$$

Скалярное пр-ние образов= скалярному пр-нию прообразов.

Свойства ортогонального оператора:

1.Ортогональный оператор сохраняет матрицу пр-ва (углы между векторами и нормы).

2. Если a и b ортогональные операторы, то их композиция ab также ортогон. оператор.

3.Оператор ,обратный ортогон. также явл. ортогональным.

4.Для ортогонального оператора a оператор a будет ортогонален только тогда, когда $\mu=|1|$.

◩

$$(\mu ax, \mu ay)=(x,y) \quad ?$$

$$\mu^2(x,y)=(x,y)$$

$$\mu=|1| \qquad \blacksquare$$

5.Собственные значения ортогонального оператора всегда равны |1|.

Лекция 6 .

№1. Ортогональные операторы (продолжение).
6. Ортогональный оператор имеет ортогональную матрицу.

Для док-ва рассмотрим, обратный оператор a^{-1} и покажем, что его матрица A^{-1} получается из матрицы оператора простым транспонированием.

$$A^{-1} = A^{T}$$

Рассмотрим $(ax, ay)=(x, a^* ay)=(x,y)=>$

$$=>(x,(a^* ay-y))=0$$

a^*-сопряжённый оператор

a-ортогональный оператор

$(a^* ay-y)=0$

Оператор наз.сопряженным по отношению к оператору a , если $(ax,y)=(x, a^*y)$

Поскольку x - произвольный вектор, следовательно, из последнего равенства вытекает, что

$$a^* ay-y=0=>y= a^* ay=> a^*=a^{-1}$$

Поскольку сопряженный оператор имеет матрицу A^{T},

$A^*=A^{T}=> A^{-1}=A^{T}$,т.е. A -матрица ортогональная.

7. Ортогональный оператор явл. изоморфизмом

Вопрос: Какие операторы явл. изоморфизмами?
Ответ: Все операторы с невырожденной матрицей.
Вопрос: Какие собственные числа могут быть у изоморфизма?
Ответ: ?Не равные нулю .

№2. Квадратичные формы.

Пусть в линейном пр-ве L_n имеется переменный вектор

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Зададим произвольную симметричную матрицу, размерностью $n \times n$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{21}=a_{12}$ $\qquad$ $a_{ij}=a_{ji}$

И рассмотрим пр-ние трех матриц:

$$X^T_{(1xn)} A_{(nxn)} X_{(nx1)}$$

Опр. 1: Квадратичной формой наз. скалярная функция векторного аргумента.

$$f(x_1,\ldots\ldots,x_n)= X^T{}_{(1xn)}A_{(nxn)}X_{(nx1)}=\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

При этом матрица A наз. матрицей квадратичной формы.

Опр. 2:Рангом квадратичной формы наз. ранг ее матрицы.

Замечание: В ортонормированном базисе самосопр. оператор имеет симметрическую матрицу и скалярное пр-ние вычисляется как сумма кр-ных соответствующих координат, поэтому в ортонорм. базисе квадрат. ф-му можно представить, как

$$f(x_1,\ldots\ldots,x_n)=(ax,a)$$

Действительно $f(x_1,\ldots\ldots,x_n)= X^T AX =X^T A^T X=$

$$=(AX)^T X \Rightarrow (ax,x)$$

Рассмотрим изменение матрицы квадр. формы при переходе к новому базису пр-ва.

Теорема 1 :Матрица квадратичной формы при переходе к новому базису меняется по закону

$$A' = T^T A T$$

где T - матрица перехода от старого к новому базису.

$$f(x_1, \ldots\ldots, x_n) = X^T A X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X'^* T^T A T X' = f(x_1', \ldots\ldots, x_n') \quad \blacksquare$$

где * -транспанированная.

Следствие: Всегда существует ортогональное преобразование системы координат, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Пусть в ортонормированном базисе квадратичная форма имеет вид

$$(ax, x)$$

где a- самосопряженный оператор.

По свойствам самосопр. оператора (см. лекцию 5) он всегда имеет базис (ортонорм. базис) из собственных векторов.

В базисе из собственных векторов:

$$(X_0)^{(1)}, (X_0)^{(2)}, \ldots\ldots, (X_0)^{(n)}$$

Самосопряженный оператор имеет матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .... & 0 \\ 0 & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$f(x_1,\dots\dots,x_n) = X^T AX = X'{}^* T^T ATX'$$

где * -транспанированная.
-канонический вид квадратичной формы $\blacksquare$

Лекция№7.
№1.Квадратичные формы (продолжение).

Опр.1:Рангом квадратичной формы наз. ранг матрицы квадр. формы.

Не зависимо от того ,каким образом квадратичная форма приведена к каноническому виду (методом Лагранжа или методом ортогональных преобразований) ,число положительных и отрицательных слагаемых в каноническом виде определяется единственным образом.

Нормальным видом квадратичной формы явл. выражение:

$$f(z_1,\ldots\ldots,z_n)= z_1z_1 + z_2z_2+\ldots+ z_pz_p- z_{p+1}z_{p+1}-\ldots- z_{p+q}z_{p+q}$$

где p+q=r

r-число положительных квадратов.

p-положительный индекс инерции квадратичной формы.

q-отрицательный индекс инерции квадратичной формы.

p-q-**сигнатура** квадратичной формы.

T1:p,q,r определяются однозначно ,не зависят от преобразования ,приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Опр.2:Квадратичная форма наз. знакоположительной (знакоотрицательной) ,если при любых значениях переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ квадратичная форма $f(x_1,\ldots\ldots,x_n)>0$ $(f(x_1,\ldots\ldots,x_n)<0)$.

В остальных случаях квадратичная форма наз. знаконеопределённой.

Для знакоположительной кв. формы канонический вид содержит только положительные слагаемые (q=0).

Для знакоотрицательной – p=0.

Т.2:(Критерий знакоопределённости кв. формы – Критерий Сильвестра):Кв.форма знакоположительна тогда и только тогда ,когда её главные миноры (миноры

,стоящие по главной диагонали матрицы кв. формы) положительны.
Если знаки миноров чередуются (>0,<0, начиная с отрицательного) ,то кв. форма <0 ,в остальных случаях она неопределенна.

В завершении курса линейной алгебры покажем ,что для любого линейного оператора спектр собственных значений не зависит от выбора базиса.

Пусть матрица линейного оператора в старом базисе имеет вид A ,в новом – A’ ,тогда собственные числа матрицы A и матрицы A’ совпадают.

◪

$$|A-\lambda E|=0$$

$$A' = T^{-1}AT \Rightarrow |A-\lambda E|=0 \Rightarrow |T^{-1}AT-\lambda E|=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |T^{-1}AT-T^{-1}\lambda T|=0$$

$$|T^{-1}(A-\lambda E)T|=0$$

$$|T^{-1}|\,|T|\,|A-\lambda E|=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A-\lambda E|=0 \quad ,$$

значит собственные числа A и A’ одинаковы.