МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Методические указания для помощи в выполнении
домашнего задания по курсу :

«Линейная алгебра»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Методические указания для помощи в выполнении
домашнего задания по курсу :

«Линейная алгебра»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

ВВЕДЕНИЕ

В лекциях рассмотрены преобразования квадратичных форм, позволяющие приводить квадратичную форму к каноническому виду; приведены критерии законоопределенности квадратичных форм и на примерах показано использование квадратичных форм для задания функций, определяющих кривые и поверхности второго порядка.

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Определение 1. Однородный многочлен второй степени от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}x_i x_j \qquad (1)$$

называют квадратичной формой.

Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назвать координатами вектора $\vec{x} \in R^n$ в некотором базисе и из коэффициентов квадратичной формы a_{ij} составить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то квадратичную форму можно записать в матричном виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \vec{x}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \vec{x}, \text{ где } \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}. \qquad (2)$$

Симметрическую матрицу A порядка n называют матрицей квадратичной формы (1).

Ранг матрицы A называют рангом квадратичной формы. Если $\mathrm{Rg}\, A = n$, то квадратичную форму называют невырожденной, а если $\mathrm{Rg}\, A < n$, то ее называют вырожденной.

В случае $n = 2$ (плоскость), имея $a_{12} = a_{21}$, получим

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2.$$

В случае $n = 3$ (трехмерное пространство), имея $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$, получим

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Пусть квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{x}_e^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \vec{x}_e$ определяет функцию $f(\vec{x})$, заданную через координаты вектора $\vec{x}_e = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ в некотором базисе $\{e\} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Найдем представление функции $f(\vec{x})$ в некотором другом базисе $\{e'\} = \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$. Если P — матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, то $\vec{x}_e = P \cdot \vec{x}_{e'}$, и функция $f(\vec{x})$ в новом базисе будет выражаться через новые координаты вектора $\vec{x}$ следующим образом:

$$\vec{x}_e^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \vec{x}_e = (P \cdot \vec{x}_{e'})^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot (P \cdot \vec{x}_{e'}) = \vec{x}_{e'}^{\mathrm{T}} \left(P^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot P\right) \vec{x}_{e'}.$$

Здесь $P^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot P = A'$ — матрица квадратичной формы в новом базисе $\{e'\}$. Итак,

$$f(\vec{x}) = \vec{x}_e^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \vec{x}_e = \vec{x}_{e'}^{\mathrm{T}} \cdot A' \cdot \vec{x}_{e'}. \qquad (3)$$

Определение 2. Квадратичная форма имеет канонический вид, если она содержит только квадраты переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$f(\vec{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2, \qquad (4)$$

т. е. если ее матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

диагональна.

Если в каноническом виде (4) коэффициенты α_i равны ± 1 или 0, то говорят, что квадратичная форма приведена к нормальному каноническому виду.

Пусть старый базис $\{e\}$ и новый базис $\{e'\}$ ортонормированные, тогда матрица перехода от $\{e\}$ к $\{e'\}$ является ортогональной и преобразование с этой матрицей будет ортогональным.

Любую квадратичную форму ортогональным преобразованием можно привести к каноническому виду.

Итак, требуется ортогональным преобразованием привести квадратичную форму $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \vec{x}$ к каноническому виду и указать матрицу этого ортогонального преобразования. Для этого необходимо сделать следующее.

1. Найти собственные значения матрицы A.

2. Для каждого собственного значения найти соответствующий собственный вектор. Все собственные векторы должны быть попарно ортогональными, а их количество должно быть равно количеству собственных значений, учитывая их кратность.

3. Выписать матрицу P, столбцами которой являются координаты этих собственных векторов. Так как система собственных векторов ортонормирована (ортонормированный базис), матрица P будет ортогональной.

Рассмотрим эти пункты подробнее.

1. Находим собственные значения матрицы A. Для этого составляем ее характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и ищем его корни. Поскольку матрица A симметрична, то все ее n (с учетом кратности) собственных значений — действительные числа. Запишем их в диагональную матрицу:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Таким образом, канонический вид квадратичной формы

$$f(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \quad \text{где} \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}.$$

2. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям λ_i, из однородного уравнения $(A - \lambda_i E)\vec{x} = 0$. Различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$ соответствуют ортогональные собственные векторы $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$. При кратных значениях $\lambda_k = \ldots = \lambda_m$ из множества собственных векторов строим систему попарно ортогональных собственных векторов $\vec{v}_k, \ldots, \vec{v}_m$ (например, применив процедуру ортогонализации Грама—Шмидта).

3. Полученную систему попарно ортогональных собственных векторов нормируем, положив

$$\vec{e'_1} = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1; \quad \vec{e'_2} = \frac{1}{|\vec{v}_2|}\vec{v}_2; \; \ldots, \; \vec{e'_n} = \frac{1}{|\vec{v}_n|}\vec{v}_n.$$

Составляем из векторов-столбцов ортонормированного базиса $\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \ldots, \vec{e'_n}$ матрицу ортогонального преобразования P, которой соответствует линейная замена переменных $\vec{x} = P \cdot \vec{y}$.

Пример 1. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$ к каноническому виду. Указать матрицу ортогонального преобразования.

Решение. Квадратичная форма имеет вид

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Запишем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы $f(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 4y_2^2$.

2. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$, из однородных уравнений $(A - \lambda_i E)\vec{v}_i = 0$.

При $\lambda_1 = 2$ имеем $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = -x_2 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 2$.

При $\lambda_2 = 4$ имеем $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = x_2 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 4$.

Длины найденых векторов равны $|\vec{v}_1| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}_2| = \sqrt{2}$.

3. Убедившись, что $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, нормируем эту систему векторов, положив

$$\vec{e_1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e_2'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу ортогонального преобразования из векторов-столбцов ортонормированного базиса $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базис $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$ — ортонормированный; поскольку $\det P = +1$, базис правильно ориентирован (правая пара).

Пример 2. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ к каноническому виду. Указать матрицу ортогонального преобразования.

Решение. Квадратичная форма имеет вид

$$f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0.$$

Это уравнение третьей степени. Так как его коэффициенты – целые числа, целое число может быть его корнем лишь в случае, если оно является делителем свободного члена, поэтому ищем корни среди чисел ± 1, ± 2, ± 5, ± 10. Подстановкой убеждаемся, что $\lambda_1 = -1$. Многочлен должен без остатка делиться на $\lambda - \lambda_1 = \lambda + 1$. Делим:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = (-\lambda^3 - \lambda^2) + (7\lambda^2 + 7\lambda) + (-10\lambda - 10) =$$

$$= -\lambda^2(\lambda + 1) + 7\lambda(\lambda + 1) - 10(\lambda + 1) = (-\lambda^2 + 7\lambda - 10)(\lambda + 1),$$

откуда $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$. Запишем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы $f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$.

2. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, из однородных уравнений $(A - \lambda_i E)\,\vec{v}_i = 0$.

При $\lambda_1 = -1$ имеем

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система трех уравнений с тремя неизвестными, ее определитель $\det(A - \lambda_1 E) = 0$, поэтому ранг матрицы системы меньше 3. Так как базисный минор $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, ранг равен 2. Оставляем первые два уравнения и получаем одно фундаментальное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$. Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = -1$ отвечает собственный вектор $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 2$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система трех уравнений с тремя неизвестными, ее определитель $\det(A - \lambda_2 E) = 0$, поэтому ранг матрицы системы меньше 3. Так как базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, ранг равен 2. Оставляем первые два уравнения и получаем одно фундаментальное решение $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Таким образом, собственному значению $\lambda_2 = 2$ отвечает собственный вектор $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 5$ аналогично получаем собственный вектор $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Длины полученных векторов равны $|\vec{v}_1| = 3$; $|\vec{v}_2| = 3$; $|\vec{v}_3| = 3$.

3. Так как собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$ различны, отвечающие им собственные векторы $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ попарно ортогональны. Нормируем эту систему векторов, положив

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Составим из векторов-столбцов ортонормированного базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ матрицу ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

которой соответствует линейная замена переменных $\vec{x} = P \cdot \vec{y}$. Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — ортонормированный, и $\det P = +1$ — базис правильно ориентирован (правая тройка).

Пример 3. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ к каноническому виду. Указать матрицу ортогонального преобразования.

Решение. Квадратичная форма имеет вид

$$f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Составляем характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 9$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Запишем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы $f(y_1, y_2, y_3) = 9y_1^2$.

2. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, из однородных уравнений $(A - \lambda_i E)\,\vec{v}_i = 0$.

При $\lambda_1 = 9$ имеем

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Это однородная система трех уравнений с тремя неизвестными, ее определитель $\det(A - \lambda_1 E) = 0$, поэтому ранг матрицы системы меньше 3. Так как базисный минор $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$, ранг равен 2. Оставляем первые два уравнения и получаем одно фундаментальное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$. Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = 9$ отвечает собственный вектор $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ имеем

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 1. Оставив одно третье уравнение, получим $x_3 = 2x_1 + 2x_2$, и общее решение этой системы $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$. Убедимся, что при любых x_1, x_2, не равных нулю одновременно, этот вектор ортогонален вектору $\vec{v}_1$. Действительно, $\vec{v}_1 \cdot \vec{x} = 2x_1 + 2x_2 - (2x_1 + 2x_2) = 0$. Из множества собственных векторов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ выберем $\vec{v}_2$, полагая $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (x_1, x_2 — независимые переменные), $x_3 = 2x_1 + 2x_2 = 2$. Таким образом, для собственного значения $\lambda_2 = 0$ найден собственный вектор $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Осталось из множества собственных векторов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ выбрать $\vec{v}_3$, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = 0$, так, чтобы $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_2$, т. е.

$$\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Longrightarrow x_1 + 2(2x_1 + 2x_2) = 0 \Longrightarrow 5x_1 = -4x_2.$$

Положив $x_1 = 4$, получим $x_2 = -5$ и $x_3 = 2x_1 + 2x_2 = -2$. Таким образом, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Нормируя полученную систему попарно ортогональных собственных векторов, получаем

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Составляем из векторов-столбцов ортонормированного базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ матрицу ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 3 & 4 \\ 2\sqrt{5} & 0 & -5 \\ -\sqrt{5} & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

которой соответствует линейная замена переменных $\vec{x} = P \cdot \vec{y}$.

Базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — ортонормированный; $\det P = +1$ — правильно ориентированный (правая тройка).

Задачи для самостоятельной работы

Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму к каноническому виду и записать матрицу ортогонального преобразования.

1. $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2$.

2. $f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2$.

3. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2$.

4. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3$.

5. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

6. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

Ответы

1. $f(y_1, y_2) = -y_1^2 + 4y_2^2$; $\quad P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $f(y_1, y_2) = 5y_1^2 + 10y_2^2$; $\quad P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $f(y_1, y_2) = 5y_2^2$; $\quad P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2$; $\quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $f(y_1, y_2, y_3) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2;\quad P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

6. $f(y_1, y_2, y_3) = \sqrt{2}\, y_1^2 - \sqrt{2}\, y_2^2;\quad P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0. \quad (5)$$

Сумма $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = f(x, y, z)$ образует квадратичную форму, которую ортогональным преобразованием можно привести к каноническому виду. Столбцы матрицы $P = \left(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\right)$ этого ортогонального преобразования образуют ортонормированный базис $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ и являются собственными векторами симметрической матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратичной формы $f(x, y, z)$.

Матрица P перехода от старого ортонормированного базиса к новому ортонормированному базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ является ортогональной и $\det P = +1$ (это можно сделать всегда, изменив направление одного собственного вектора на противоположное). Следовательно, существует такой поворот исходной системы координат, что в новой системе координат квадратичная форма в новых переменных будет иметь канонический вид.

Пусть x', y', z' — новые координаты, в которых квадратичная форма имеет канонический вид. Подставив в уравнение (5)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

получим уравнение поверхности в новом базисе:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2d_1x' + 2d_2y' + 2d_3z' + c = 0. \quad (6)$$

Здесь возможны следующие случаи при $i = 1, 2, 3$:

1) $\lambda_i = 0$, $d_i = 0$, тогда в уравнении (6) отсутствует i-я переменная, и уравнение описывает цилиндрическую поверхность. Если, например, $\lambda_3 = d_3 = 0$, то $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2d_1x' + 2d_2y' + c = 0$ есть уравнение кривой второго порядка — направляющей данной цилиндрической поверхности;

2) $\lambda_i = 0$, $d_i \neq 0$. Пусть, например, $\lambda_3 = 0$, $d_3 \neq 0$. Тогда, выделив полные квадраты, получим

$$\lambda_1\left(x' + \frac{d_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{d_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2d_3z' + c_1 = 0.$$

Сделаем параллельный перенос системы координат:

$$\begin{cases} x' + \dfrac{d_1}{\lambda_1} = X, \\ y' + \dfrac{d_2}{\lambda_2} = Y, \\ z' + \dfrac{c_1}{2d_3} = Z. \end{cases}$$

Уравнение поверхности второго порядка примет вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = -2d_3Z;$$

3) $\lambda_i \neq 0$ при всех $i = 1, 2, 3$. Тогда, выделив полные квадраты, получим:

$$\lambda_1\left(x' + \frac{d_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{d_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{d_3}{\lambda_3}\right)^2 + c_1 = 0.$$

Сделаем параллельный перенос системы координат:

$$\begin{cases} x' + \dfrac{d_1}{\lambda_1} = X, \\ y' + \dfrac{d_2}{\lambda_2} = Y, \\ z' + \dfrac{d_3}{\lambda_3} = Z. \end{cases}$$

Уравнение поверхности второго порядка примет вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + c_1 = 0.$$

Придавая коэффициентам различные значения и вводя стандартные обозначения, получаем следующие поверхности второго порядка:

$$1. \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

— эллипсоид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$).

$$2. \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

— однополостный гиперболоид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$).

$$3. \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

— двуполостный гиперболоид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$).

$$4. \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0$$

— конус ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$).

$$5. \qquad \frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = 2Z$$

— эллиптический параболоид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, d_3 \neq 0$).

$$6. \qquad \frac{X^2}{p} - \frac{Y^2}{q} = 2Z$$

— гиперболический параболоид ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = 0, d_3 \neq 0$).

$$7. \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

— эллиптический цилиндр ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = d_3 = 0$).

$$8. \qquad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1$$

— гиперболический цилиндр ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = d_3 = 0$).

$$9. \qquad \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$$

— пара пересекающихся плоскостей ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 = d_3 = 0$).

$$10. \qquad X^2 = 2pY$$

— параболический цилиндр ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = d_3 = 0$).

Пример 4. Привести уравнение кривой $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 28\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 8 = 0$ ортогональным преобразованием и параллельным переносом к каноническому виду. Указать преобразования. Построить кривую и все используемые системы координат.

Решение. Квадратичная форма $f(x, y) = 7x^2 + 2xy + 7y^2$, ее матрица —

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 48 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \text{ собственный вектор.}$$

При $\lambda_2 = 8$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ собственный вектор.}$$

Нормируем, получаем $\vec{e_1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — ортогональные векторы, отвечающие разным собственным числам. Матрица ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det P = +1.$$

Поскольку ортогональное преобразование сохраняет ориентацию, оно является поворотом на угол α, где

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \cos\alpha = 1/\sqrt{2}, \\ \sin\alpha = -1/\sqrt{2} \end{cases} \Longrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Этому ортогональному преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y'). \end{cases} \tag{7}$$

Подставляем (7) в уравнение кривой:

$$\frac{7}{2}(x' + y')^2 + \frac{2}{2}(x' + y')(-x' + y') + \frac{7}{2}(-x' + y')^2 + 28(x' + y') + 4(-x' + y') + 8 = 6x'^2 + 8y'^2 + 24x' + 32y' + 8 = 6(x' + 2)^2 + 8(y' + 2)^2 - 48 = 0$$

и получаем

$$\frac{(x' + 2)^2}{8} + \frac{(y' + 2)^2}{6} = 1.$$

Делаем параллельный перенос

$$x' + 2 = X; \qquad y' + 2 = Y.$$

Получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

где $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{6}$, с центром в точке O', координаты которой таковы:

$$O'(X = 0, Y = 0);$$
$$O'(x' = -2, y' = -2);$$
$$O'(x = -2\sqrt{2}, y = 0).$$

Строим декартову систему координат xOy на векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Далее в ней строим векторы $\vec{e_1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\vec{e_2'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, они определяют новые координатные оси Ox' и Oy'. В этой системе отмечаем точку O' с координатами $x' = -2$, $y' = -2$, которая является началом системы координат $XO'Y$, где ось $O'X$ параллельна оси Ox', а ось $O'Y$ параллельна оси Oy' (рис. 1).

Пример 5. Привести уравнение кривой $6x^2 + 8xy - 4\sqrt{5}\,x - 8\sqrt{5}\,y - 26 = 0$ ортогональным преобразованием и параллельным переносом к каноническому виду. Указать преобразования. Построить кривую и все используемые системы координат.

Решение. Квадратичная форма $f(x, y) = 6x^2 + 8xy$, ее матрица —

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

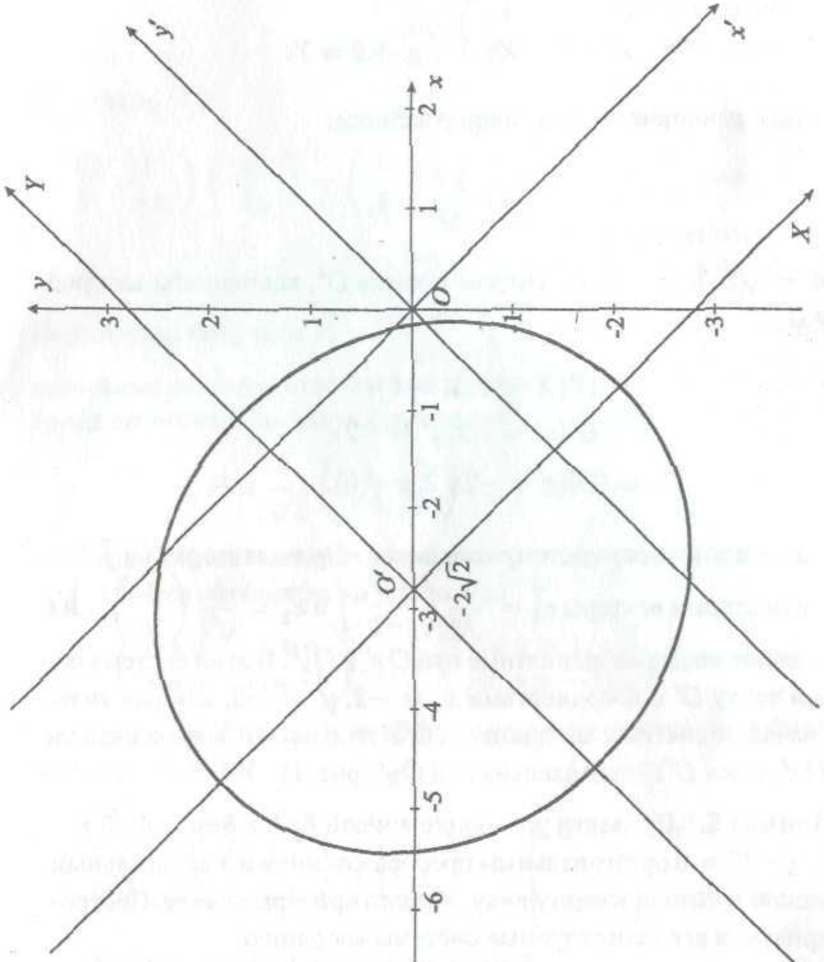

Рис. 1. Эллипс

Характеристическое уравнение матрицы

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 8$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

— собственный вектор.

При $\lambda_2 = 8$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— собственный вектор.

Так как собственные числа различны, отвечающие им собственные векторы ортогональны. Нормируем, получаем $\vec{e_1'} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2'} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Матрица ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det P = +1.$$

Этому ортогональному преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y'), \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x' + y'). \end{cases} \qquad (8)$$

Подставляем (8) в уравнение кривой:

$$-2x'^2 + 8y'^2 - 4(x' + 2y') - 8(-2x' + y') - 26 = -2x'^2 + 8y'^2 + 12x' - 16y' - 26 = -2(x'-3)^2 + 8(y'-1)^2 - 16 = 0$$

и получаем

$$\frac{(x'-3)^2}{8} - \frac{(y'-1)^2}{2} = -1.$$

Делаем параллельный перенос:

$$x' - 3 = X; \qquad y' - 1 = Y.$$

Получаем каноническое уравнение сопряженной гиперболы:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1,$$

где $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{2}$. Строим декартову систему координат xOy на векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Далее в ней строим векторы $\vec{e_1'} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\vec{e_2'} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, они определяют новые координатные оси Ox' и Oy'. В этой системе отмечаем точку O' с координатами $x' = 3$, $y' = 1$, которая является началом системы координат $XO'Y$, где ось $O'X$ параллельна оси Ox', а ось $O'Y$ параллельна оси Oy' (рис. 2).

Пример 6. Привести уравнение кривой $-16x^2 - y^2 + 8xy + 6\sqrt{17}\,x - 10\sqrt{17}\,y + 51 = 0$ ортогональным преобразованием и параллельным переносом к каноническому виду. Указать преобразования. Построить кривую и все используемые системы координат.

Решение. Квадратичная форма $f(x,y) = -16x^2 - y^2 + 8xy$, ее матрица —

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы:

$$\begin{vmatrix} -16-\lambda & 4 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 17\lambda = 0$$

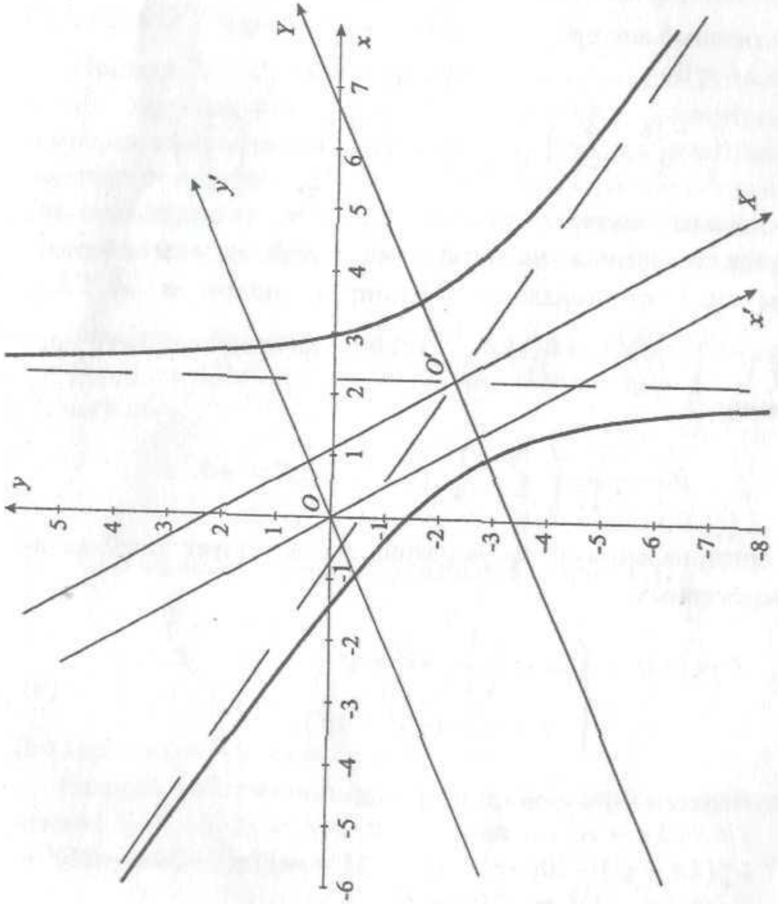

Рис. 2. Гипербола

имеет корни $\lambda_1 = -17$, $\lambda_2 = 0$. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -17$, $\lambda_2 = 0$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = -17$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

— собственный вектор.

При $\lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

— собственный вектор.

Так как собственные числа различны, отвечающие им собственные векторы ортогональны. Нормируя, получаем $\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Матрица ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \det P = +1.$$

Этому ортогональному преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(4x' + y'); \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(-x' + 4y'). \end{cases} \tag{9}$$

Подставляем (9) в уравнение кривой:

$$-17x'^2 + 6(4x' + y') - 10(-x' + 4y') + 51 = -17x'^2 + 34x' - 34y' + $$
$$+ 51 = 0 \Longrightarrow (x' - 1)^2 = -2(y' - 2).$$

Делаем параллельный перенос:

$$x' - 1 = X; \qquad y' - 2 = Y.$$

Получаем каноническое уравнение параболы $X^2 = 2pY$, у которой $p = -1$. Строим декартову систему координат xOy на векторах $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Далее в ней строим векторы $\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, они определяют новые координатные оси Ox' и Oy'. В этой системе отмечаем точку O' с координатами $x' = 1$, $y' = 2$, которая является началом системы координат $XO'Y$, где ось $O'X$ параллельна оси Ox', а ось $O'Y$ параллельна оси Oy' (рис. 3).

Пример 7. Привести уравнение поверхности $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy + 8xz + 4yz + 18x + 36y + 36z + \frac{243}{2} = 0$ ортогональным преобразованием к каноническому виду. Указать преобразование перехода от исходной декартовой системы координат $Oxyz$ к новой системе координат $Ox'y'z'$. Сделать параллельный перенос начала координат в точку O'. Построить поверхность в системе координат $O'XYZ$.

Решение. Квадратичная форма данной поверхности имеет вид $f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy + 8xz + 4yz$.
Ее матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 9\lambda^2 + 108) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$.

Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = -3$ имеем

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ -2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

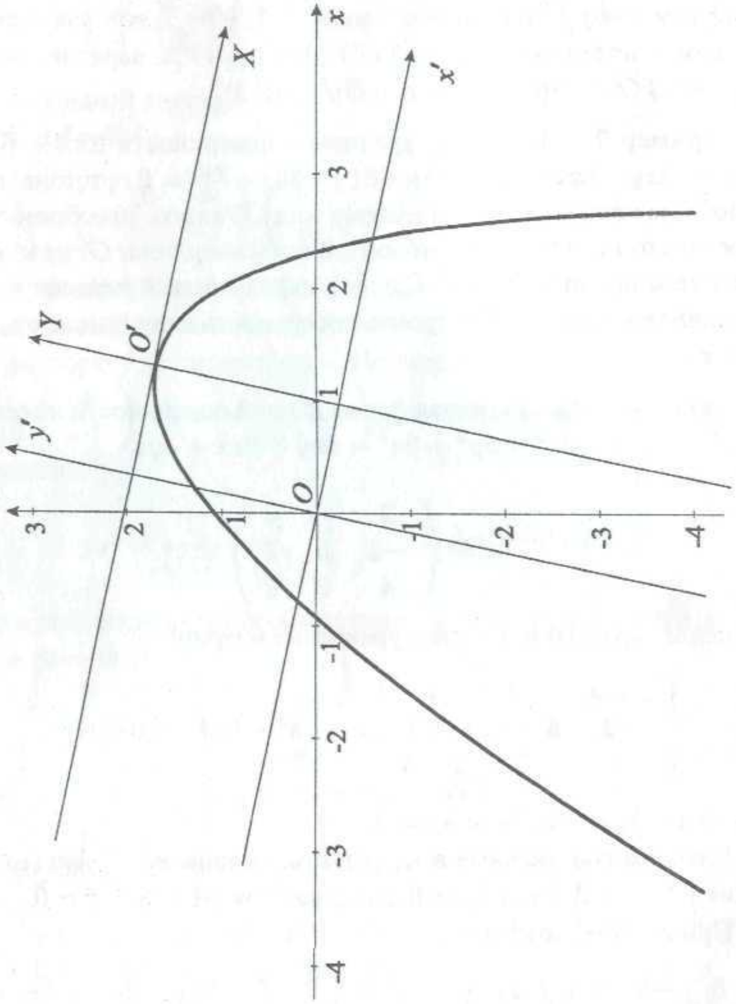

Рис. 3. Парабола

Это линейная система трех уравнений с тремя неизвестными, определитель ее матрицы равен 0, поэтому ранг матрицы меньше 3, но базисный минор $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$, поэтому ранг матрицы равен 2. Оставляя первые два уравнения и полагая $x_1 = 2$, получаем $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = -3$ отвечает собственный вектор $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ имеем

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -4x_1 & -2x_2 + 4x_3 = 0, \\ -2x_1 & -x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 & +2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен 1, поэтому в системе можно оставить одно уравнение $x_2 = -2x_1 + 2x_3$, тогда общее решение этой системы

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что при любых x_1, x_3 этот вектор ортогонален вектору $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$: скалярное произведение

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1 - 2x_1 + 2x_3 - 2x_3 = 0.$$

Остается из множества векторов $\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ выбрать два взаимно ортогональных вектора. При $x_1 = 1$ и $x_3 = 2$ получаем

$x_2 = 2$, и для собственного значения $\lambda_2 = 6$ получим отвечающий ему собственный вектор $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, уже ортогональный вектору $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, отвечающему собственному значению $\lambda_1 = -3$.

Теперь из множества собственных векторов $\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ выберем вектор $\vec{v_3}$ так, чтобы $\vec{v_2} \perp \vec{v_3}$, т. е.

$$\vec{v_2} \cdot \vec{v_3} = x_1 - 4x_1 + 4x_3 + 2x_3 = -3x_1 + 6x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2x_3.$$

Полагая $x_3 = 1$, получаем $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = 6$.

Нормируя полученную систему попарно ортогональных векторов, получаем

$$\vec{e_1'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e_2'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e_3'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим из векторов-столбцов ортонормированного базиса $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$, $\vec{e_3'}$ матрицу ортогонального преобразования

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

которой соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x' + y' + 2z' \\ x' + 2y' - 2z' \\ -2x' + 2y' + z' \end{pmatrix}.$$

Базис $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$, $\vec{e_3'}$ — ортонормированный, поскольку $\det P = +1$, базис правильно ориентирован (правая тройка).

Итак, канонический вид квадратичной формы

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy + 8xz + 4yz = -3x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2.$$

Подставляя в уравнение поверхности

$$x = \frac{1}{3}(2x' + y' + 2z'), \quad y = \frac{1}{3}(x' + 2y' - 2z'),$$
$$z = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' + z'),$$

получаем

$$-3x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2 + 6(2x' + y' + 2z') + 12(x' + 2y' - 2z') + 12(-2x' + 2y' + z') + \frac{243}{2} = -3x'^2 + 6y'^2 + 6z'^2 + 54y' + \frac{243}{2} = 0.$$

Выделяем полный квадрат:

$$-3x'^2 + 6\left(y' + \frac{9}{2}\right)^2 + 6z'^2 = 0.$$

Делаем параллельный перенос начала координат:

$$x' = X, \qquad y' + \frac{9}{2} = Y, \qquad z' = Z.$$

Получаем каноническое уравнение поверхности:

$$-\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{1} + \frac{Z^2}{1} = 0.$$

Это уравнение конуса. Строим его методом сечений.

В плоскости $X = 0$ $Y^2 + Z^2 = 0$, получаем точку $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$.

В плоскостях $X = c$ $Y^2 + Z^2 = c^2/2$ — окружности.

В плоскости $Y = 0$ $Z^2 = X^2/2 \Longrightarrow Z = \pm X/\sqrt{2}$ — две пересекающиеся прямые, проходящие через точку $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$.

В плоскости $Z = 0$ $Y^2 = X^2/2 \Longrightarrow Y = \pm X/\sqrt{2}$ — две пересекающиеся прямые, проходящие через точку $(X = 0, Y = 0, Z = 0)$ (рис. 4).

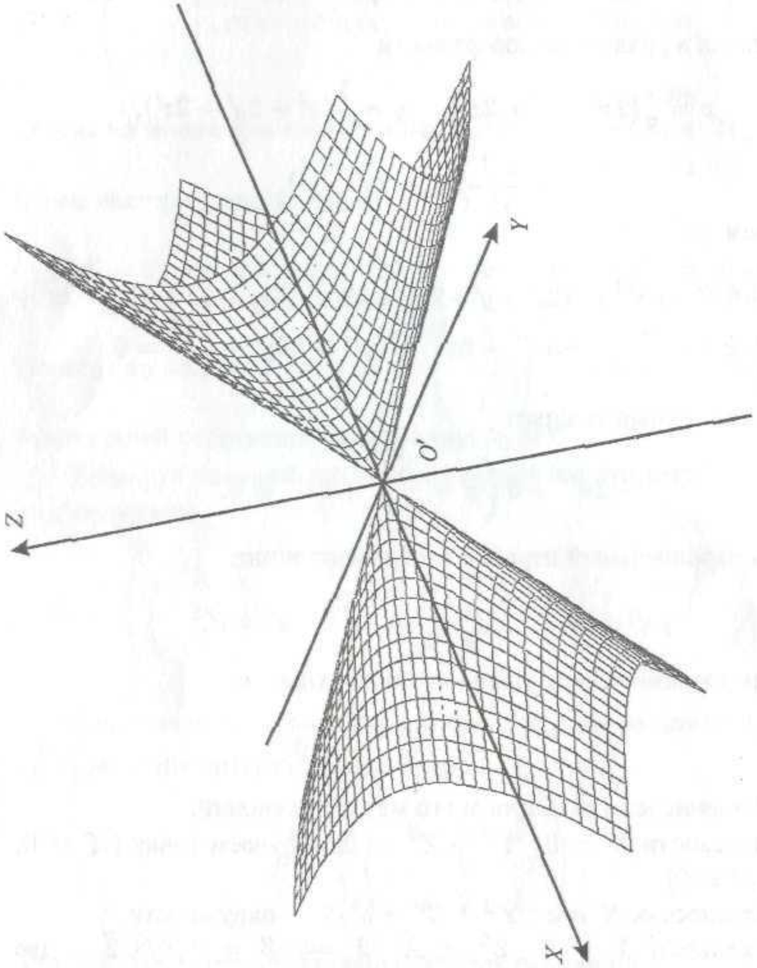

Рис. 4. Конус

Пример 8. Привести уравнение поверхности $x^2 - 8y^2 + z^2 + 2xz + 4\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\,z = 0$ ортогональным преобразованием к каноническому виду. Указать преобразование перехода от исходной декартовой системы координат $Oxyz$ к новой системе координат $Ox'y'z'$. Построить поверхность в системе координат $Ox'y'z'$.

Решение. Квадратичная форма данной поверхности имеет вид $f(x,y,z) = x^2 - 8y^2 + z^2 + 2xz$. Ее матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -8-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+8)(\lambda-2) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$. Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = -8$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 9x_1 + x_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ x_1 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что $x_1 = x_3 = 0$, а x_2 – любое число. Собственному значению $\lambda_1 = -8$ отвечает собственный вектор $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ -8x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что $x_2 = 0$, $x_1 = -x_3$, и собственному значению $\lambda_2 = 0$ отвечает собственный вектор $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0, \\ -10x_2 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Действуем аналогично. Тогда $x_2 = 0$, $x_1 = x_3$, и собственному значению $\lambda_3 = 2$ отвечает собственный вектор $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Так как собственные числа различны, отвечающие им собственные векторы попарно ортогональны. Нормируя эту систему векторов, получаем:

$$\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e_2'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{e_3'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Составим из векторов-столбцов ортонормированного базиса $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$, $\vec{e_3'}$ матрицу ортогонального преобразования:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\det P = -1$, т. е. тройка векторов $\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$, $\vec{e_3'}$ — неправильно ориентированная (левая). Этому преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы

$$x^2 - 8y^2 + z^2 + 2xz = -8x'^2 + 2z'^2.$$

Подставляя в уравнение поверхности

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + z'), \quad y = x', \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y' + z'),$$

получаем

$$-8x'^2 + 2z'^2 + 4(y' + z') - 4(-y' + z') = -8x'^2 + 2z'^2 + 8y' = 0,$$

или $\dfrac{x'^2}{1} - \dfrac{z'^2}{4} = y'$ — каноническое уравнение гиперболического параболоида. Строим его методом сечений (рис. 5).

В плоскости $x' = 0$ кривая $z'^2 = -4y'$ — парабола.

В плоскости $y' = 0$ будет $z' = \pm 2x'$ — две пересекающиеся прямые, проходящие через точку $(x' = 0, y' = 0, z' = 0)$.

В плоскостях $y' = c$ будет $x'^2 - z'^2/4 = c$ — гиперболы.

В плоскости $z' = 0$ кривая $x'^2 = y'$ — парабола.

В плоскостях $z' = c$ кривые $x'^2 = y' + c^2/4$ — тоже параболы.

Пример 9. Привести уравнение поверхности $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 4z - 5 = 0$ ортогональным преобразованием к каноническому виду. Указать преобразование перехода от исходной декартовой системы координат $Oxyz$ к новой системе координат $Ox'y'z'$. Построить поверхность в системе координат $Ox'y'z'$.

Решение. Квадратичная форма данной поверхности имеет вид $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$.

Ее матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы A:

$$A = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

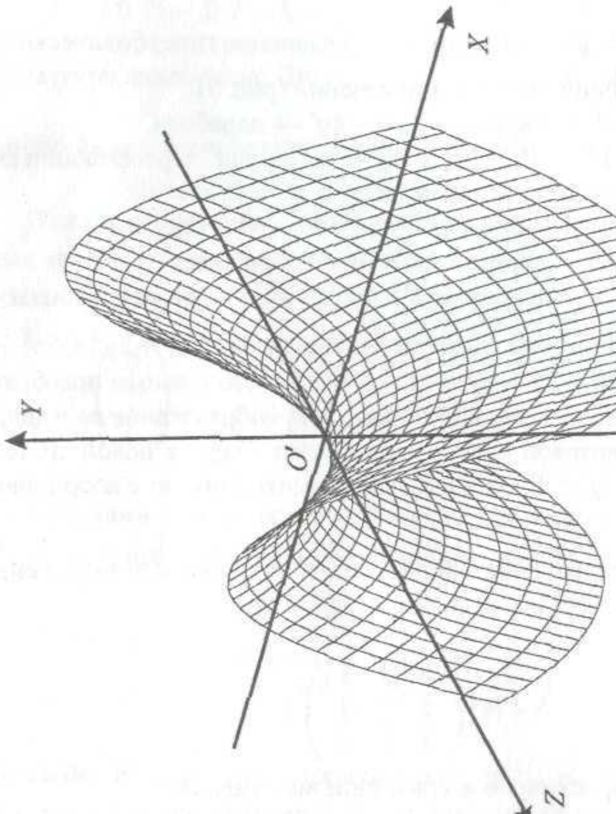

Рис. 5. Гиперболический параболоид

Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, из уравнения $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$.

При $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} x_1 = -x_2, \\ x_3 = 0. \end{array}$$

Собственному значению $\lambda_1 = 0$ *отвечает собственный вектор* $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x_1 = x_2 = -x_3.$$

Собственному значению $\lambda_2 = 3$ отвечает собственный вектор $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \end{array} \right. \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} x_1 = x_2, \\ x_3 = 2x_1. \end{array}$$

Собственному значению $\lambda_3 = 6$ отвечает собственный вектор $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Так как собственные числа различны, отвечающие им собственные векторы попарно ортогональны. Нормируя эту систему векторов, получаем:

$$\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \vec{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Составим из векторов-столбцов ортонормированного базиса $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ матрицу ортогонального преобразования:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\det P = +1$, следовательно, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ — правая тройка векторов. Этому преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 2xz + 2yz = 3y'^2 + 6z'^2.$$

Подставляя в уравнение поверхности

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}, \quad y = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}, \quad z = -\frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{2z'}{\sqrt{6}},$$

получаем

$$3y'^2 + 6z'^2 + 2\sqrt{6}\,z' - 5 = 3y'^2 + 6\left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 6 = 0,$$

или $\dfrac{y'^2}{2} + \dfrac{\left(z' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2}{1} = 1$ — уравнение эллиптического цилиндра с направляющей, являющейся эллипсом $\dfrac{y'^2}{2} + \left(z' + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$, и образующими, параллельными оси Ox' (рис. 6).

Задачи для самостоятельной работы

Привести уравнение кривой ортогональным преобразованием и *параллельным переносом к каноническому виду*. Указать преобразования. Построить кривую и все используемые системы координат.

1. $28x^2 + 12y^2 - 12xy - 16\sqrt{10}x + 12\sqrt{10}y + 10 = 0.$

2. $14x^2 - 4y^2 + 24xy + 12\sqrt{5}x + 16\sqrt{5}y - 10 = 0.$

3. $7x^2 - 2y^2 + 12xy + 30\sqrt{5}x + 60\sqrt{5}y - 55 = 0.$

4. $9x^2 + 4y^2 - 12xy - 20\sqrt{13}x + 22\sqrt{13}y = 0.$

5. $-16x^2 + 24xy - 9y^2 + 70x + 10y - 125 = 0.$

Привести уравнение поверхности ортогональным преобразованием и параллельным переносом к каноническому виду. Указать преобразования. Построить поверхность в системе координат $O'XYZ$.

6. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz + 24y - 6z - 47 = 0.$

7. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6yz - 4x + 2\sqrt{2}\,y - 2\sqrt{2}\,z + 25 = 0.$

8. $10x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 6xz + 8yz + 60z = 0.$

9. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 9\sqrt{2}\,x + 7\sqrt{2}\,y - 4z + 10 = 0.$

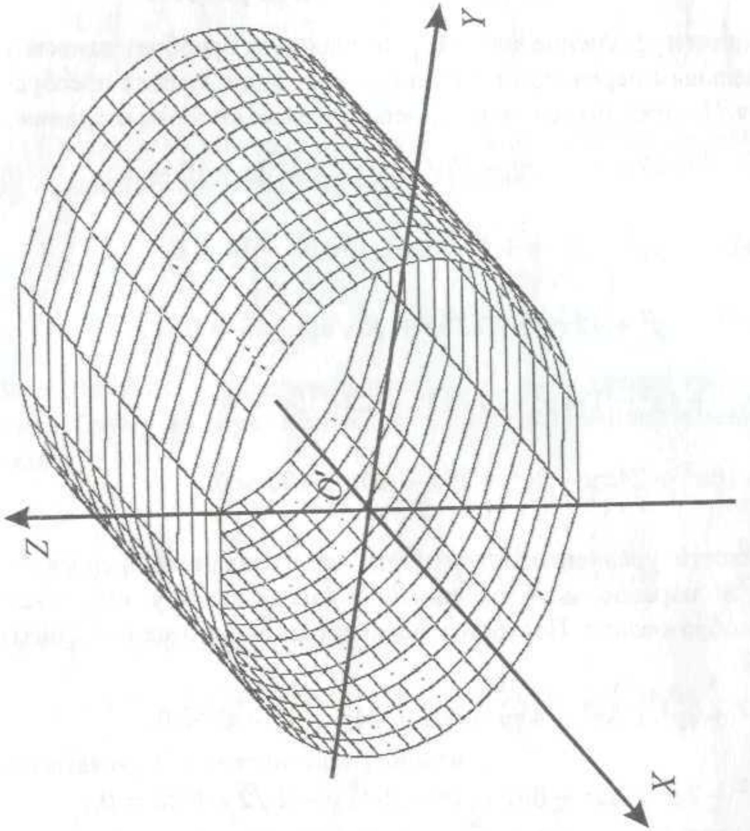

Рис. 6. Эллиптический цилиндр

Ответы

1. $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 30$;

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \frac{(x'+1)^2}{3} + \frac{(y'+1)^2}{1} = 1 \ - \ \text{эллипс.}$$

2. $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = 20$;

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad -\frac{(x'+1)^2}{2} + \frac{(y'+1)^2}{1} = 1 \ - \ \text{гипербола.}$$

3. $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 10$;

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \frac{(x'+9)^2}{2} - \frac{(y'+6)^2}{1} = -1 \ - \ \text{гипербола.}$$

4. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 13$;

$$P = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (y'+4)^2 = -2(x'-8) \ - \ \text{парабола.}$$

5. $\lambda_1 = -25$, $\lambda_2 = 0$;

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad (x'-1)^2 = 2(y'-2) \ - \ \text{парабола.}$$

6. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$; $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

$$-\frac{(x'-7)^2}{20} + \frac{(y'+1)^2}{10} + \frac{(z'-2)^2}{4} = 1 \ - \ \text{однополостный гиперболоид.}$$

7. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$; $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$-\frac{(x'+2)^2}{25} + \frac{(y'-2)^2}{25} + \frac{z'^2}{5} = -1 \ - \ \text{двуполостный гиперболоид.}$$

8. $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 15$; $P = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & -8 & 3\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 6 & 4\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

$$\frac{(x'-3\sqrt{2})^2}{24} + \frac{y'^2}{12} + \frac{(z'+\sqrt{2})^2}{8} = 1 \text{ — эллипсоид.}$$

9. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$; $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$;

$$(y'-1)^2 + 2(z'+2)^2 = (x'+4) \text{ — эллиптический параболоид.}$$

ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА

Как мы видели, для нахождения ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду, требуется находить корни характеристического многочлена $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Это не всегда удается сделать, если степень многочлена (равная размерности пространства) больше двух.

Однако, если перед нами стоит задача привести квадратичную форму к каноническому виду в каком-нибудь, *не обязательно ортонормированном* базисе, то ее можно решить более простым способом, *чем ортогональные преобразования — методом Лагранжа.*

Метод Лагранжа состоит в последовательном выделении полных квадратов из квадратичной формы. При этом матрица перехода к новым переменным может оказаться не ортогональной, т. е. новые переменные являются координатами вектора при разложении по косоугольному базису. Поясним метод Лагранжа на примере.

Пример 10. Рассмотрим квадратичную форму из примера 2:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

Поскольку в ней присутствует член $3x_1^2$, мы можем выделить полный квадрат по x_1. Для этого соберем все слагаемые, содержащие x_1, *и дополним до полного квадрата:*

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3\left(x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{4}{9}x_2^2\right) - \frac{4}{3}x_2^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3 =$$

$$= 3\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)^2 + \frac{2}{3}x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3.$$

Соберем далее все слагаемые, содержащие x_2, и дополним до полного квадрата:

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_2^2 - 6x_2x_3 + 9x_3^2\right) - 6x_3^2 + x_3^2 =$$

$$= 3\left(x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)^2 + \frac{2}{3}(x_2 - 3x_3)^2 - 5x_3^2.$$

Введем новые переменные

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 &= z_1, \\ x_2 - 3x_3 &= z_2, \\ x_3 &= z_3, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

тогда канонический вид квадратичной формы f в новых переменных z_1, z_2, z_3 будет $f(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + \dfrac{2}{3}z_2^2 - 5z_3^2$. Если $\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times$ $\times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

будет матрицей перехода от ортогонального базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ к косоугольному базису

$$\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2'} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

в котором квадратичная форма f имеет канонический вид

$$f(z_1, z_2, z_3) = 3z_1^2 + \frac{2}{3}z_2^2 - 5z_3^2.$$

В примере 2 квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

приводилась к другому каноническому виду

$$f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2.$$

В различных видах данной квадратичной формы остается неизменным *не только количество ненулевых коэффициентов, но и количество положительных и отрицательных коэффициентов* в силу закона инерции квадратичных форм. *Для любых двух канонических видов квадратичной формы*

$$f(y_1, \dots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2, \quad \lambda_i \neq 0, \quad i = \overline{1, m};$$

$$f(z_1, \dots, z_k) = \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_k z_k^2, \quad \mu_i \neq 0, \quad i = \overline{1, k}$$

одной и той же квадратичной формы $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} A \vec{x}$

1) $m = k = \mathrm{Rg}\, A$, где A — матрица квадратичной формы;

2) количество положительных коэффициентов λ_i совпадает с количеством положительных коэффициентов μ_i;

3) количество отрицательных коэффициентов λ_i совпадает с количеством отрицательных коэффициентов μ_i.

Пример 11. Дана квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

В ней присутствует член $2x_1^2$, поэтому мы можем выделить полный квадрат вида

$$2(a + b + c)^2 = 2(a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2).$$

Соберем все члены, содержащие x_1, и дополним до полного квадрата, полагая $a = x_1$, $b = -x_2/2$, $c = x_3$. Итак,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2\left(x_1^2 - 2x_1\frac{x_2}{2} + 2x_1x_3 + \frac{x_2^2}{4} - 2\frac{x_2}{2}x_3 + x_3^2\right) -$$
$$-\frac{x_2^2}{2} + 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3 = 2\left(x_1 - \frac{x_2}{2} + x_3\right)^2 +$$
$$+\frac{9}{2}x_2^2 + 6x_2x_3 + 3x_3^2.$$

В той части квадратичной формы, которая осталась после выделения $2(x_1 - \frac{x_2}{2} + x_3)^2$, присутствует $\frac{9}{2}x_2^2$, поэтому мы снова можем выделить полный квадрат. Итак,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2\left(x_1 - \frac{x_2}{2} + x_3\right)^2 + \frac{9}{2}\left(x_2^2 + 2\frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{4}{9}x_3^2\right) -$$
$$-2x_3^2 + 3x_3^2 = 2\left(x_1 - \frac{x_2}{2} + x_3\right)^2 + \frac{9}{2}\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 + x_3^2.$$

Введем новые переменные

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{x_2}{2} + x_3 = z_1, \\ x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 = z_2, \\ x_3 = z_3, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

будет матрицей перехода от базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ к косоугольному базису

$$\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3'} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

в котором квадратичная форма f имеет канонический вид

$$f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 + \frac{9}{2}z_2^2 + z_3^2.$$

Пример 12. Дана квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Здесь отсутствуют члены с x_1^2, x_2^2 и x_3^2, поэтому метод, описанный в предыдущих примерах, не удается применить сразу, придется сделать некоторые преобразования.

Легко заметить, что $x_1x_2 = \left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right)^2$. Введем вспомогательные переменные

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \\ t_2 &= \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2, \\ x_2 &= t_1 - t_2, \end{aligned}$$

тогда квадратичная форма f выразится таким образом:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2t_1^2 - 2t_2^2 - 4(t_1 + t_2)x_3 + 6(t_1 - t_2)x_3 = 2t_1^2 - 2t_2^2 + $$
$$+ 2t_1x_3 - 10t_2x_3.$$

Теперь можно действовать по схеме, описанной в примере 10:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2t_1^2 - 2t_2^2 + 2t_1x_3 - 10t_2x_3 =$$

$$= 2\left(t_1^2 + t_1x_3 + \frac{1}{4}x_3^2\right) - \frac{1}{2}x_3^2 - 2\left(t_2^2 + 5t_2x_3 + \frac{25}{4}x_3^2\right) + \frac{25}{2}x_3^2 =$$
$$= 2\left(t_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - 2\left(t_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 + 12x_3^2.$$

Введем новые переменные

$$\left\{ \begin{aligned} t_1 + \frac{1}{2}x_3 &= z_1, \\ t_2 + \frac{5}{2}x_3 &= z_2, \\ x_3 &= z_3, \end{aligned} \right. \quad \text{т. е.} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

и канонический вид квадратичной формы f в новых переменных z_1, z_2, z_3 будет $f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 12z_3^2$.

Если

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

и обратная матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

будет матрицей перехода от базиса $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ к косоугольному базису

$$\vec{e_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_3'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

в котором квадратичная форма f имеет канонический вид

$$f(z_1, z_2, z_3) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 12z_3^2.$$

ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТЬ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

Квадратичные формы подразделяют на различные типы.

Определение 3. Квадратичную форму $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{x}$, где $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$, будем называть

а) положительно (отрицательно) определенной, если для любого ненулевого столбца $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ выполняется неравенство $f(\vec{x}) > 0$ ($f(\vec{x}) < 0$);

б) неотрицательно (неположительно) определенной, если для любого ненулевого столбца $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ выполняется неравенство $f(\vec{x}) \geq 0$ ($f(\vec{x}) \leq 0$);

в) знакопеременной (неопределенной), если существуют такие столбцы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, что $f(\vec{x}) > 0$ и $f(\vec{y}) < 0$.

Представив квадратичную форму f в каноническом виде, получим критерии для типа квадратичной формы в зависимости от собственных значений ее матрицы.

1. Все собственные значения $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, тогда f — положительно определенная.

2. Все собственные значения $\lambda_i < 0$, $i = \overline{1, n}$, тогда f — отрицательно определенная.

3. Собственные значения имеют разные знаки: $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, $\lambda_j < 0$, $j = \overline{k+1, k+m}$, тогда f — знакопеременная.

4. Если есть нулевое собственное значение $\lambda_i = 0$, то f — вырожденная, т. е. существует такой ненулевой столбец $\vec{x}$, для которого $f(\vec{x}) = 0$.

Итак, найдя все собственные значения матрицы A квадратичной формы $f(\vec{x})$, можно установить тип квадратичной формы. Но это

можно сделать и не вычисляя собственных значений матрицы A. Пусть квадратичная форма представлена в виде $f = \vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Главные угловые миноры этой матрицы

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Критерий Сильвестра. Квадратичная форма $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{x}$ положительно определена тогда и только тогда, когда $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$,..., $\Delta_n > 0$ (все главные миноры положительны).

Квадратичная форма $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{x}$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0$,..., $(-1)^n\Delta_n > 0$ (знаки главных миноров чередуются, начиная с минуса).

Если у невырожденной квадратичной формы найдется главный минор, равный нулю; либо главный минор четного порядка отрицателен; либо есть два главных минора нечетного порядка с разными знаками, то в этих случаях квадратичная форма знакопеременна.

Квадратичная форма $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}}A\vec{x}$ определяется невырожденной симметрической матрицей A, поэтому симметрическая матрица A будет положительно определена ($A > 0$), если все ее главные миноры положительны, соответственно A будет отрицательно определена, если знаки ее главных миноров чередуются, начиная с минуса.

Пример 13. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ положительно определена, так как

$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$

Пример 14. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - x_2^2 - 14x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}$ отрицательно определена, так как $\Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = 1 > 0, \Delta_3 = -1 < 0.$

Пример 15. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ является знакопеременной, так как $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = -1 < 0$. Действительно, выделив полные квадраты, получим

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2.$$

Задачи для самостоятельной работы

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и определить ее тип (положительно определенная, отрицательно определенная, знакопеременная). Проверить результат, найдя собственные числа и оценив главные миноры матрицы квадратичной формы.

1. $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

3. $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2.$

Ответы

1. $f(x_1, x_2, x_3) = 7\left(x_1 - \frac{2}{7}x_3\right)^2 + 5\left(x_2 - \frac{2}{5}x_3\right)^2 + \frac{162}{35}x_3^2$; $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$; $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$; положительно определенная.

2. $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 - \frac{3}{2}x_3\right)^2 + 2x_3^2$; $\lambda_1 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$; $\Delta_1 = 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 < 0$; знакопеременная.

3. $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - (x_2 - x_1)^2$; $\lambda_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$; отрицательно определенная.

Более полно вопросы приведения квадратичной формы к каноническому виду изложены в [1]. Дополнительные задачи для самостоятельного решения методами, изложенными в данном пособии, можно найти в [2—6].