МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Методические указания в выполнению
домашнего задания по курсу :

«Функции комплексной переменной и операционное счисление»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Методические указания в выполнению
домашнего задания по курсу :

«Функции комплексной переменной и операционное счисление»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие предназначено для самостоятельной работы и подготовке по материалам математического анализа третьего семестра – теория функций комплексной переменной.

Теория аналитических функций комплексного переменного доставляет инженерам и исследователям много полезных математических моделей. Многие математические теоремы упрощаются, если рассматривать действительные переменные как частный случай комплексных переменных. Комплексные переменные употребляют для описания двумерных векторов в физике; аналитические функции комплексного переменного описывают двумерные скалярные и векторные поля.

С.В. Галкин

Математический анализ

**(Методические указания
по материалам лекций для подготовки
к экзамену в третьем семестре).**

Часть 1 Ряды Фурье.

Этот раздел может быть перенесен в третий семестр как продолжение темы «Функциональные ряды». Но часто в третьем семестре не хватает времени, поэтому материал может быть изложен и в четвертом семестре.

Лекция 1.

Задача о наилучшем приближении.

Задача о наилучшем приближении в R^n.

Поставим задачу – приблизить наилучшим образом вектор трехмерного пространства вектором **v** в двухмерном пространстве - плоскости.

Ясно, что интуитивно наилучший выбор **v** – ортогональная проекция вектора **u** на эту плоскость. Пусть $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ – ортогональные базисные векторы, а плоскость – их линейная оболочка, тогда $\mathbf{v} = C_1 \mathbf{e_1} + C_2 \mathbf{e_2}$. Остается найти коэффициенты разложения C_1, C_2.
Если **v** – ортогональная проекция вектора **u** на плоскость, то вектор **u – v** ортогонален плоскости, следовательно, ортогонален и базисным векторам. Тогда

$$\mathbf{0 = (u - v, e_1) = ([u - (C_1 e_1 + C_2 e_2)], e_1) = (u, e_1) - C_1 (e_1, e_1)}, \quad C_1 = \frac{(u, e_1)}{(e_1, e_1)}$$

$$\mathbf{0 = (u - v, e_2) = ([u - (C_1 e_1 + C_2 e_2)], e_2) = (u, e_2) - C_2 (e_2, e_2)}, \quad C_2 = \frac{(u, e_2)}{(e_2, e_2)}.$$

Здесь $\mathbf{(e_1, e_2) = 0}$, так как базисные векторы ортогональны.

Аналогично решается задача наилучшего приближения вектора из R^{n+1} вектором из R^n: Наилучший выбор приближения – проекция вектора на R^n.

$$\mathbf{V} = C_1 \mathbf{e_1} + \ldots C_n \mathbf{e_n}, \text{ где } C_n = \frac{(u, e_n)}{(e_n, e_n)}.$$

Задача о наилучшем приближении в H (гильбертовом пространстве).

Скалярное произведение. Численнозначная функция двух элементов (f,g) называется скалярным произведением, если выполнено

1) $(f, f) \geq 0$, $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$
2) $(f, g) = (g, f)$
3) $(\lambda f, g) = \lambda (f, g) = (f, \lambda g)$
4) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$

Заметим, что здесь λ считается действительным числом. Если считать λ комплексным числом, то третье свойство надо определять так: $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$, $(f, \lambda g) = \bar{\lambda} (f, g)$, где λ и $\bar{\lambda}$ - комплексно-сопряженные числа.

Упражнение. Покажите, что

1) (a , b) = |a| |b| cos φ - скалярное произведение векторов **a , b**,
2) $((x_1 \ldots x_n), (y_1, \ldots y_n)) = (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)$ – скалярное произведение векторов – строк,
3) (f(x) , g(x)) = $\int_a^b f(x)g(x)dx$ - скалярное произведение функций $f(x), g(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$.

Если в пространстве задано скалярное произведение, то, задавая норму в пространстве соотношением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, можно сделать пространство нормированным.

Задавая метрику соотношением $\rho(0,x) = \|x\|$, можно сделать нормированное пространство метрическим.

Если в пространстве задано скалярное произведение, то в нем можно определить углы и расстояния между элементами $\cos\varphi = \dfrac{(f,g)}{\|f\|\,\|g\|}$.

Гильбертовым пространством H называется полное, бесконечномерное, сепарабельное линейное пространство со скалярным произведением.

Пространство полно, если любая фундаментальная последовательность его элементов сходится к элементу пространства.

Пространство сепарабельно, если в нем существует счетное всюду плотное множество (как рациональные числа среди действительных чисел).

Элементы (функции) гильбертова пространства называются векторами (бесконечномерные векторы над осью действительных чисел, так как функция полностью определяется всеми своими значениями (при всех значениях аргумента, а их бесконечное число)).

Функции **ортогональны**, если (f , g) = 0.

Система функций называется **полной,** если любой элемент пространства может быть разложен по этой системе (представлен в виде линейной комбинации ее элементов).

Можно показать, что *любая система из бесконечного количества попарно ортогональных функций полна в гильбертовом пространстве.*

Мы будем считать, что функции $f^2(x), g^2(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, и рассматривать гильбертово пространство L^2 со скалярным произведением (f(x) , g(x)) = $\int_a^b f(x)g(x)dx$ над полем действительных чисел. Введем в нем норму элемента:

$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$. Назовем **среднеквадратическим уклонением** функции $f(x)$ от функции $g(x)$ величину $\sigma = \|f-g\| = \sqrt{(f-g, f-g)}$.

Рассмотрим **задачу о наилучшем приближении в пространстве L^2 функции $f(x)$ линейной комбинацией конечного числа ортогональных функций $\varphi_k(x)$.**

Выбрать действительные коэффициенты C_k $k = 1,\ldots n$ $\left(f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x)\right)$, $\varphi_k(x)$ - **попарно ортогональны,** чтобы минимизировать среднеквадратическое уклонение функции от линейной комбинации

$$\sigma=\sqrt{\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k(x)\right),\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k(x)\right)}.$$

Преобразуем выражение для $\sigma^2(x)$, применяя известную еще из школы процедуру выделения полного квадрата и учитывая ортогональность функций $\varphi_k(x)$**:** **(**$(\varphi_k(x),\varphi_s(x))=0,\ k\neq s$**).**

$$\sigma^2=\left(\left(f-\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k\right),\left(f-\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k\right)\right)=(f,f)-2\sum_{k=1}^{n}C_k(f,\varphi_k)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}C_kC_s(\varphi_k,\varphi_s)=$$

$$(f,f)-2\sum_{k=1}^{n}C_k(f,\varphi_k)+\sum_{k=1}^{n}C_k^2(\varphi_k,\varphi_k)=$$

$$(f,f)+\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k,\varphi_k)\left[C_k^2-2C_k\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}+\frac{(f,\varphi_k)^2}{(\varphi_k,\varphi_k)^2}\right]-\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k,\varphi_k)\left[\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\right]^2=$$

$$(f,f)+\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k,\varphi_k)\left[C_k-\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\right]^2-\sum_{k=1}^{n}(\varphi_k,\varphi_k)\left[\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\right]^2.$$

Минимизировать это выражение по C_k - означает минимизировать второе слагаемое, в котором содержатся коэффициенты C_k. Это слагаемое неотрицательно, так как $(\varphi_k,\varphi_k)\geq 0$ (свойство скалярного произведения), а квадратная скобка, в которую входят C_k, стоит в квадрате. Следовательно, минимизировать это второе слагаемое – означает сделать его нулевым, выбрав коэффициенты

$C_k=d_k=\dfrac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}$. **Коэффициенты d_k называются коэффициентами Фурье.**

Если $C_k=d_k=\dfrac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}$, то $\sigma^2=(f,f)-\sum_{k=1}^{n}d_k^{\ 2}(\varphi_k,\varphi_k)\quad\forall n$. Но $\sigma^2\geq 0$, поэтому $\sum_{k=1}^{n}d_k^{\ 2}(\varphi_k,\varphi_k)\leq(f,f)\quad\forall n$ или $\sum_{k=1}^{\infty}d_k^{\ 2}(\varphi_k,\varphi_k)\leq(f,f)$. **Эти неравенства называются неравенствами Бесселя.**

Если система функций $\{\varphi_k(x)\ k=1,2,...\}$ полна (в гильбертовом пространстве это выполнено, так как функции попарно ортогональны), то справедливо **равенство Парсеваля** $\sum_{k=1}^{\infty}d_k^{\ 2}(\varphi_k,\varphi_k)=(f,f)$.

В самом деле, пусть $f=\sum_{k=1}^{\infty}d_k\varphi_k$. Тогда $(f,f)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}d_k\varphi_k,\sum_{s=1}^{\infty}d_s\varphi_s\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}d_kd_s(\varphi_k,\varphi_s)=\sum_{k=1}^{\infty}d_k^2(\varphi_k,\varphi_k)$ (так как $(\varphi_k,\varphi_s)=0,\ k\neq s$).

Если функции φ_k не только ортогональны, но еще и ортонормированны, т.е. $(\varphi_k,\varphi_k)=1,\ k=1,2,\ldots$, то равенство Парсеваля – это аналог теоремы Пифагора в бесконечномерном пространстве $\sum_{k=1}^{\infty}d_k^{\ 2}=(f,f)$.

Следствие из равенства Парсеваля. Пусть выполнено равенство Парсеваля, пусть $\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|\neq 0$. Тогда $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

Доказательство. Пусть выполнено равенство Парсеваля $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{\,2}(\varphi_k,\varphi_k) = (f,f)$. Тогда по необходимому признаку сходимости ряда $\lim_{n\to\infty} d_n^{\,2}(\varphi_n,\varphi_n) = 0$. Так как $(\varphi_n,\varphi_n) > 0$ *и* $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n,\varphi_n) = \lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|^2 \neq 0$, тогда $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

Ряд Фурье по тригонометрической системе функций (тригонометрический ряд Фурье).

Тригонометрической системой функций называется система функций
$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ Это – периодические функции.
Докажем **два свойства периодических функций.**

1) *Если функция $f(x)$ имеет период T, то функция $f(\alpha x)$ имеет период $\frac{T}{\alpha}$.*

Доказательство. $f\left(\alpha\left(x+\frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x + T) = f(\alpha x)$.

2) *Если функция $f(x)$ имеет период T, то $\forall c$* $\int_c^{c+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Доказательство. $\int_c^{c+T} f(x)dx = \int_c^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{T+c} f(x)dx =$

(делаем замену переменных в последнем интеграле $z = x - T,\ dz = dx$)

$$= \int_c^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^c f(z)dz = \int_c^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^c f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Доказанные свойства позволяют

1) рассматривать тригонометрическую систему функций на любом отрезке длиной 2π (период $\cos nx, \sin nx$ равен $\frac{2\pi}{n}$, $n = 1,2,\ldots$), например *на отрезке* $[-\pi,\pi]$,
2) при вычислениях интегралов от функций с периодом, кратным 2π, проводить интегрирование по любому отрезку длиной 2π.

Так как элементы тригонометрической системы функций представляют собой непрерывные функции, то они сами и их квадраты (как произведение непрерывных функций) интегрируемы на отрезке $[-\pi,\pi]$. Поэтому можно рассматривать пространство L^2 на отрезке $[-\pi,\pi]$ и строить ряд Фурье.

Скалярное произведение функций введем так: $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

Для того, чтобы построить ряд Фурье по тригонометрической системе функций надо доказать, что эти функции попарно ортогональны на $[-\pi,\pi]$.

Теорема. *Тригонометрическая система функций состоит из попарно ортогональных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций.*

Доказательство. $\left(\frac{1}{2},\cos x\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos xdx=0$. $\left(\frac{1}{2},\sin x\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin xdx=0$,

$$(\sin mx,\cos nx)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x)dx=0,$$

Пусть $m\neq n$.

$$(\cos nx,\cos mx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)dx=0$$

$$(\sin mx,\sin nx)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)dx=0$$

Теорема доказана.

Вычислим скалярные квадраты элементов тригонометрической системы.

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\frac{1}{2}dx=\frac{\pi}{2}$, $(\cos nx,\cos nx)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\pi$

$(\sin nx,\sin nx)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx=\pi$.

Составим **ряд Фурье по тригонометрической системе функций**

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\varphi_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Коэффициенты Фурье вычисляются по формуле $d_n=\frac{(f,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}$.

$$a_0=\frac{\left(f,\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{(f,\cos nx)}{(\cos nx,\cos nx)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{(f,\sin nx)}{(\sin nx,\sin nx)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Теперь необходимо сформулировать условия, при которых функция представляется рядом Фурье по тригонометрической системе функций.

Условия Дирихле.

1) *Интервал, на котором определена функция, может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых функция непрерывна и монотонна.*
2) *Функция в области определения непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода.*

Теорема Дирихле.

Пусть функция $f(x)$ *задана на некотором сегменте и удовлетворяет на нем условиям Дирихле. Тогда функция может быть разложена на этом сегменте в сходящийся к ней ряд Фурье по ортогональной системе функций* φ_m.

В точке непрерывности функции $f(x)=S(x)$, *где* $S(x)$ *- сумма ряда Фурье.*

В точке разрыва функции $S(x)=\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$.

Лекция 2.

Связь между гладкостью функции и периодом малости коэффициентов Фурье.

Теорема. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на отрезке* $[-\pi,\pi]$, *разлагается на нем в тригонометрический ряд Фурье и непрерывна на нем вместе со своими производными до p –1 порядка включительно. Пусть* $f^{(k)}(-\pi)=f^{(k)}(\pi)$, $k=0,1,2,\dots p-1$. *Если p –ая производная функции* $f^{p}(x)$ *кусочно непрерывна на интервале* $(-\pi,\pi)$, *то коэффициенты Фурье* a_n, b_n *- бесконечно малые функции по отношению к* $\frac{1}{n^p}$.

Доказательство. $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\begin{pmatrix} u=f(x) & dv=\cos nxdx \\ du=f'(x)dx & v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{pmatrix}=$

$\frac{1}{\pi}\frac{f(x)\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx=-\frac{1}{n}b_n{}'$.

Здесь $a_n{}'\ b_n{}'$ - коэффициенты Фурье для функции $f'(x)$.

Продолжая аналогично интегрирование по частям, получим

$b_n{}'=\frac{1}{n}a_n{}''$. Из этих соотношений следует

$$a_n=-\frac{1}{n}b_n{}'=-\frac{1}{n^2}a_n{}''=\frac{1}{n^3}b_n{}^{(3)}=\dots=(-1)^k\frac{1}{n^{2k}}a_n{}^{(2k)}=(-1)^{k+1}\frac{1}{n^{2k+1}}b_n{}^{(2k+1)}=\dots$$

Из этого соотношения или непосредственно можно получить аналогичное соотношение для b_n.

Поэтому $d_n=\frac{1}{n^p}d_n{}^{(p)}$, где $d_n=a_n$ или $d_n=b_n$ - n –ый коэффициент Фурье.

По следствию из равенства Парсеваля $d_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ для коэффициентов Фурье самой функции и ее производных.. Следовательно, $a_n, b_n=0\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Теорема доказана.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0)\\ x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$ и построить график суммы ряда $S(x)$.

Продолжим заданную функцию периодически на всю ось. Тогда функция будет иметь разрывы первого рода в точках $x=\pi+2\pi k,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$. В этих точках функция $S(x)$ будет принимать значение $\frac{\pi}{2}$, равное, по теореме Дирихле, полу сумме левого и правого пределов функции $f(x)$. В остальных точках значения функций $S(x)$ и $f(x)$ будут совпадать.

Вычислим коэффициенты Фурье.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int\limits_{-\pi}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{\pi}xdx=\frac{\pi^2}{2}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{(-1)^n}{n}$. Проверьте, выполнив интегрирование по частям.

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right) +$$

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots$$

Из таких разложений часто можно получать суммы числовых рядов.

Например, подставим в разложение $x = 0$, получим

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) \Rightarrow 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Подставим в разложение $x = \frac{\pi}{2}$, получим

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Разложения в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[-l\ l]$.

Выше были получены формулы коэффициентов ряда Фурье при разложении в ряд функции, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$ (или периодических функций с периодом 2π).

Выведем **формулы коэффициентов ряда Фурье при разложении в ряд функции, заданной на отрезке $[-l\ l]$.**

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l\ l]$ (или периодическая с периодом $T = 2l$), то функция $f\left(\frac{l}{\pi}x\right)$ имеет период $T = 2\pi$ (первое свойство периодических функций). Поэтому ее можно разложить в ряд Фурье для функции с периодом $T = 2\pi$.

$$f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}x\right)\sin nx dx.$$

Сделаем в этих формулах замену переменных $t = \frac{l}{\pi}x, x = \frac{\pi}{l}t, dx = \frac{\pi}{l}dt$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)dt, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt.$$

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nt}{l} + b_n \sin\frac{\pi nt}{l} = S(t)$ (в точках непрерывности функции).

В точках разрыва функции $S(t) = \frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(t-0)\right)$. Возвращаясь к переменной x, заменяя формально t на x, получим **формулы коэффициентов ряда Фурье при разложении в ряд функции, заданной на отрезке $[-l\ l]$.**

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

$$f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}$$ (в точках непрерывности функции).

В точках разрыва функции $S(x)=\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in[1,2]\\ 1, & x\in[2,6]\\ 7-x, & x\in[6,7]\end{cases}$, не вычисляя коэффициенты ряда Фурье.

Функция непрерывна, по теореме Дирихле

$$f(x)=S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{3}+b_n\sin\frac{\pi nx}{3},$$

$$a_0=\frac{1}{3}\int_1^7 f(x)dx=\frac{1}{3}[\int_1^2(x-1)dx+\int_2^6 1dx+\int_6^7(7-x)dx],$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_1^7 f(x)\cos\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_1^2(x-1)\cos\frac{\pi nx}{3}dx+\int_2^6\cos\frac{\pi nx}{3}dx+\int_6^7(7-x)\cos\frac{\pi nx}{3}dx\right],$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_1^7 f(x)\sin\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_1^2(x-1)\sin\frac{\pi nx}{3}dx+\int_2^6\sin\frac{\pi nx}{3}dx+\int_6^7(7-x)\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right],$$

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.

Свойства четных и нечетных функций.

1) *произведение четных функций – четная функция. Произведение нечетных функций – четная функция, произведение четной функции на нечетную – нечетная функция.*

Обозначим $н(x), ч(x)$ - нечетную и четную функции. $н(-x)=-н(x),\quad ч(-x)=ч(x)$,

Получим, $ч_1(-x)ч_2(-x)=ч_1(x)ч_2(x),\quad н_1(-x)н_2(-x)=(-н_1(x))(-н_2(x))=н_1(x)н_2(x)$, $ч(-x)н(-x)=ч(x)(-н(x))=-ч(x)н(x)$.

2) $$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^l f(x)dx, & f(x)-четная\\ 0, & f(x)-нечетная\end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=\int_{-l}^{0} f(x)dx+\int_0^l f(x)dx=_{(z=-x)}-\int_l^0 f(-z)dz+\int_0^l f(x)dx=_{(z=\text{"немая переменная"})}=$$

$$\int_0^l f(-x)dx+\int_0^l f(x)dx=\int_0^l\left(f(-x)+f(x)\right)dx=\begin{cases}2\int_0^l f(x)dx, & f(x)-четная\\ 0, & f(x)-нечетная\end{cases}.$$

Рассмотрим формулы разложения функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-l\, l]$ в ряд Фурье

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

$f(x) = S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\dfrac{\pi nx}{l}+b_n\sin\dfrac{\pi nx}{l}$ (в точках непрерывности функции).

В точках разрыва функции $S(x)=\dfrac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$.

Если функция $f(x)$ четна, то по четности косинуса, нечетности синуса и свойству 1 под интегральные функции в $a_0, a_n -$ *четны, а в* $b_n -$ *нечетна*. Следовательно,

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=0.$$

$f(x) = S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\dfrac{\pi nx}{l}$ (в точках непрерывности функции). *Четная функция разлагается по четным функциям.*

Если функция $f(x)$ нечетна, то по четности косинуса, нечетности синуса и свойству 1 под интегральные функции в $a_0, a_n -$ *нечетны, а в* $b_n -$ *четна*. Следовательно,

$$a_0=0,\quad a_n=0,.\,b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

$f(x) = S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin\dfrac{\pi nx}{l}$ (в точках непрерывности функции). *Нечетная функция разлагается по нечетным функциям.*

Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[0, l]$ по синусам и косинусам кратных дуг.

Так как функция задана на отрезке $[0, l]$**,** то ее можно доопределить на отрезок $[-l, 0]$ **четным или нечетным образом.**

Если функция доопределена **четным образом**, то она, как четная функция может быть разложена по формулам для четной функции

$$a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=0.$$

$f(x) = S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos\dfrac{\pi nx}{l}$ (в точках непрерывности функции).

Это – разложение в ряд Фурье по косинусам кратных дуг.

Если функция доопределена **нечетным образом**, то она, как нечетная функция может быть разложена по формулам для нечетной функции

$a_0 = 0$, $a_n = 0$,. $b_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\dfrac{\pi nx}{l}dx$.

$f(x) = S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{\pi nx}{l}$ (в точках непрерывности функции).

Это – разложение в ряд Фурье по синусам кратных дуг.

Одну и ту же функцию, заданную на отрезке $[0, l]$, можно разложить и по синусам, и по косинусам кратных дуг.

Пример. Разложить по косинусам и синусам кратных дуг функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0, 1]$ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$.

Так как мы доопределяем функцию на отрезок $[-l, 0]$ при разложении по косинусам и синусам кратных дуг, то $T = 2l = 2, l = 1$.

Разложим функцию по косинусам кратных дуг.

$a_0 = 2\int\limits_0^1 dx = 2$, $a_n = 2\int\limits_0^l \cos\pi nx dx = 0$, $b_n = 0$.

$f(x) = S(x) = \dfrac{a_0}{2} = 1.$ $\forall x \in [0, 1]$

Разложим функцию по синусам кратных дуг.

$a_0 = 0$, $a_n = 0$,. $b_n = 2\int\limits_0^1 \sin nx dx = -\dfrac{2}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)$.

$f(x) = S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\pi nx = \dfrac{4}{\pi}\left(\sin\pi x + \dfrac{1}{3}\sin 3\pi x + \dfrac{1}{5}\sin 5\pi x + ...\right)$ $\forall x \in (0, 1)$,

$S(0) = S(1) = 0$ (теорема Дирихле).

Часть 2. Теория функций комплексной переменной.

Лекция 1.

Комплексные числа, 3 формы записи, основные операции.

Алгебраическая форма записи комплексного числа **z=x+iy,** x = Re z – действительная часть (real), y = Im z – мнимая часть комплексной числа (imagine), i – мнимая единица (i^2 = -1). Степени мнимой единицы: i^0 =1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 =-i, i^8 =1,….значения повторяются через 4. Например, $i^{23} = i^{20}\, i^3 = -i$, $i^{61} = i^{60}\, i = i$, и т.д. Если ввести в комплексной плоскости декартову систему координат, то x откладывают на действительной оси в комплексной плоскости (оси абсцисс), y – на мнимой оси (оси ординат).

Если ввести в комплексной плоскости полярную систему координат (полярные координаты $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + artg\,\dfrac{y}{x}, & x < 0, y \ge 0 \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{matrix}$),

то комплексное число можно записать в **тригонометрической форме** $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$**.**

Комплексное число можно ассоциировать с его радиусом – вектором. Полярная координата $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - это модуль радиуса – вектора или просто **модуль комплексного числа** $\rho = [z]$**,** а полярный угол φ - **аргумент комплексного числа**, $\varphi = \arg z$.

Аргумент определяется так сложно, потому что $arctg(\cdot)$ имеет область значений $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а необходимо обеспечить возможность изменения полярного угла в диапазоне $(-\pi, \pi]$.

Пример. Записать $z = 1 + i$ в тригонометрической форме. $\rho = \sqrt{2}, \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right).$

Записать $z = -2$ в тригонометрической форме. $\rho = 2, \varphi = \pi, \quad z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Справедлива **формула Эйлера** $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$**.** Это – одна из самых красивых и фундаментальных формул в математике. Достаточно сказать, что из нее следует равенство $e^{i\pi} + 1 = 0$, связывающее почти все основные математические константы: 0, 1, i, π, e.

Используя формулу Эйлера, можно записать комплексное число в **показательной форме** $z = \rho\, e^{i\varphi}$. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы – три формы записи комплексных чисел.

Рассмотрим **операции** над комплексными числами. **Сложение и вычитание** комплексных чисел удобнее всего производить в алгебраической форме записи.

$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$. Например, $(1+2i)+(1-2i)=2$. Заметим, что числа $z = x+iy,\ \bar{z} = x - iy$ называются **комплексно сопряженными** числами.

Сложение или вычитание комплексных чисел соответствует сложению или вычитанию их радиусов векторов и может быть проведено по «правилу параллелограмма» или «правилу треугольника».

Умножение и деление комплексных чисел тоже можно выполнять в алгебраической форме.

Примеры. $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = [z]^2$,

$(3+2i)(-1+i) = (-3-2)+(-2+3)i = -5+i$,

$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$. Здесь числитель и знаменатель дроби умножают на число, сопряженное знаменателю, чтобы получить в знаменателе действительное число.

Удобнее выполнять умножение или деление в тригонометрической или показательной формах:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Итак, действует правило: при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Особенно удобно использовать тригонометрическую и показательную формы при возведении комплексного числа в степень.

$z^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. С другой стороны, $z^n = \rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

Из сопоставления этих выражений получается знаменитая **формула Муавра**

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Ее удобно применять для выражения синусов и косинусов кратных углов через степени синусов и косинусов самого угла. Например,

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi,$$

Отделяя действительные и мнимые части, получим

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

Например, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6 = \frac{(\sqrt{2})^6 e^{-\frac{6\pi}{4}i}}{(\sqrt{2})^6 e^{\frac{6\pi}{4}i}} = e^{-\frac{12\pi}{4}i} = e^{-3\pi i} = \cos 3\pi - i\sin 3\pi = -1.$

Здесь можно было $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^6 = \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^6 = \left(\frac{-2i}{2}\right)^6 = i^6 = -1$.

Рассмотрим «пятое действие арифметики» – извлечение корня. $\omega = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow \omega^n = z$. Пусть $\omega = re^{i\varphi}, \quad z = \rho e^{i\psi}$. Тогда $r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}, k = 0,1,...n-1$. Получим **формулу** $\omega = \sqrt[n]{z}$ **.** $\omega = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi+2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2,...n-1.$

Из формулы ясно, что все n корней лежат в комплексной плоскости на круге радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат на равном угловом расстоянии друг от друга $\dfrac{2\pi}{n}$, причем первый корень расположен под углом $\dfrac{\psi}{n}$ к действительной оси.

Найдем, например, $\omega = \sqrt[4]{-16}$. Определяем $r = 16, \psi = \pi, n = 4$

$$\omega = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,...n-1.$$

$$\omega = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)\right), \quad k = 0,1,2,3$$

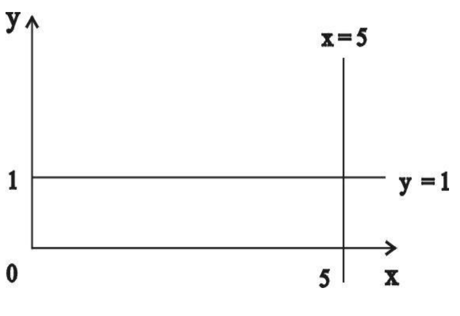
$$\omega_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \omega_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \omega_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \omega_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

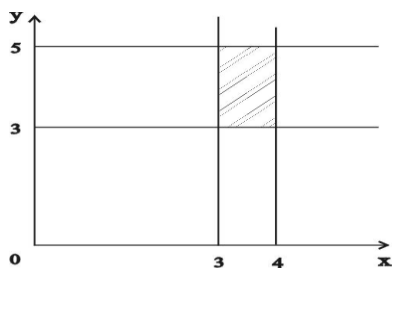
Все корни лежат на круге радиусом 2 с центром в начале координат, на угловом расстоянии $\dfrac{\pi}{2}$ друг от друга, причем первый корень лежит под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к действительной оси.

Множества на комплексной плоскости.

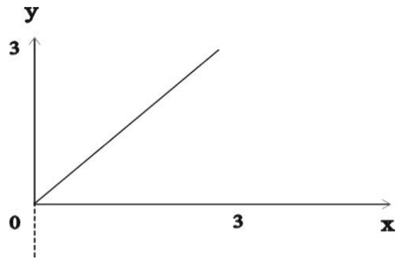
Для того, чтобы правильно строить типичные кривые на комплексной плоскости, прежде всего надо помнить, что $|z| = \rho(0, z)$. Следовательно, $|z - z_0| = R$ - это окружность радиуса R с центром в точке z_0 на комплексной плоскости (расстояние от точки z до точки z_0 равно R). $a \le |z - z_0| < b$ - это круговое кольцо с центром в точке z_0, включая внутреннюю окружность радиусом a, исключая внешнюю окружность радиусом b .

$\arg z = \varphi$ - это прямая линия на комплексной плоскости $y = tg\varphi\ z$, φ - угол наклона прямой к действительной оси. Некоторые часто встречающиеся кривые и области изображены ниже

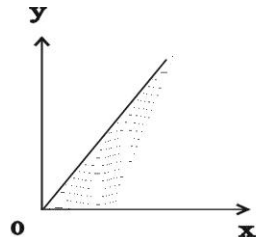




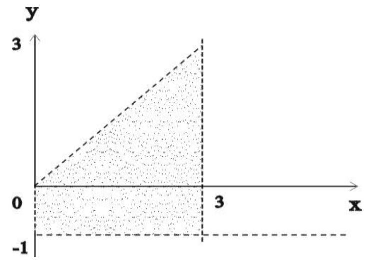
$$\begin{cases} \operatorname{Re} z = 5 \\ \operatorname{Im} z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 \le \operatorname{Re} z \le 4 \\ 3 \le \operatorname{Im} z \le 5 \end{cases}$$



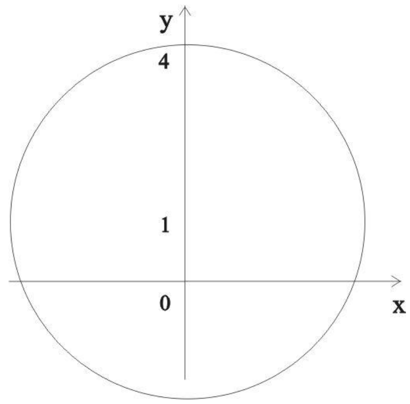
$\arg z = \dfrac{\pi}{4}$

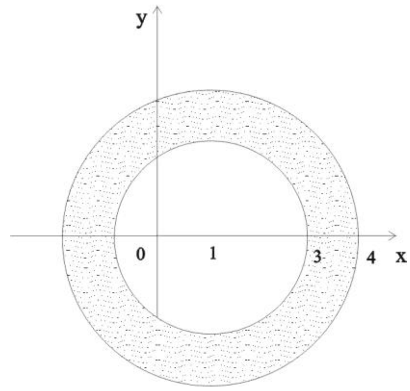


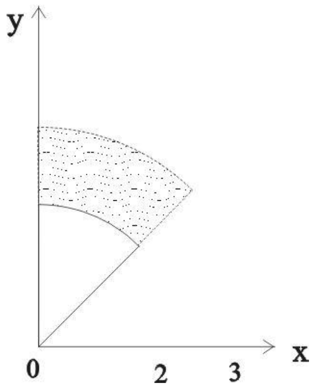
$0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{3}$



$\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z 3 \\ -1 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z \end{cases}$



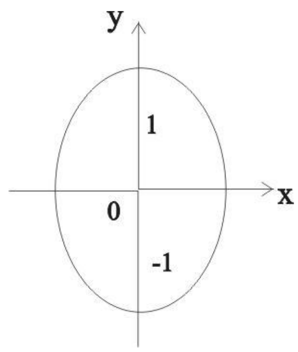


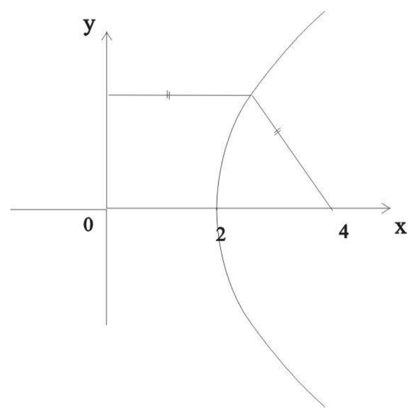


$|z - i| = 3$

$2 \le |z - 1| \le 3$

$\begin{cases} 2 \le |z| \le 3 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$





$|z - i| + |z + i| = 3$

$|z - 4| = \operatorname{Re} z$

При построении двух последних областей надо вспомнить определение эллипса (геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек плоскости $(-i, i)$постоянна и равна $2a(=3)$) и определение параболы (геометрическое место точек плоскости, расстояние которых от фиксированной точки плоскости $(z = 4)$ равно расстоянию до фиксированной прямой $(\operatorname{Re} z = 0)$).

Открытые и замкнутые множества, односвязное множество.

$\varepsilon -$ *окрестностью точки* z_0 $(V_\varepsilon(z_0))$ называется множество $|z - z_0| < \varepsilon$.

Точка z_0 называется *внутренней точкой множества,* если существует ее окрестность, целиком принадлежащая этому множеству. Например, все точки круга $|z| < 1$ - внутренние.

Точка z_0 называется *граничной точкой множества*, если в любой ее окрестности найдутся как точки, принадлежащие множеству, так и точки, не принадлежащие множеству. *Границей множества* называется совокупность его граничных точек. Например, окружность $|z| = 1$ - граница круга $|z| < 1$.

Множество называется открытым, если оно состоит только из внутренних точек. Например, круг $|z| < 1$ - открытое множество.

Замыканием множества называется объединение множества и его границы. *Замкнутым* называется множество, совпадающее со своим замыканием.

Множество называется *ограниченным,* если его можно накрыть кругом конечного радиуса.

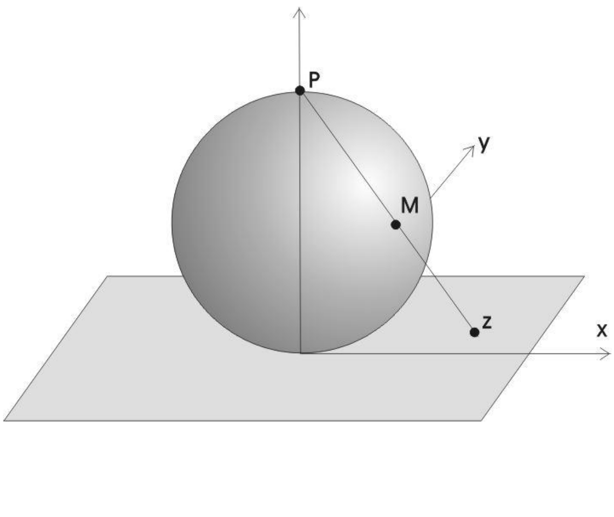
Открытой областью (или просто областью) называется открытое множество, любые две точки которого можно соединить ломаной, целиком принадлежащей множеству.

Замкнутой областью называется объединение открытой области и ее границы.

Рассмотрим последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, \dots z_n, \dots$. Последовательность называется *неограниченно возрастающей,* если $\forall R > 0\ \exists n, \text{что} |z_n| > R$. То есть все элементы неограниченно возрастающей последовательности нельзя накрыть кругом конечного радиуса.

По определению полагают, что все неограниченно возрастающие последовательности сходятся к (единственной) бесконечно удаленной точке ($z = \infty$ *или* БУТ), которая не принадлежит комплексной плоскости. Пополняя комплексную плоскость, мы получаем *расширенную комплексную плоскость.*

Пояснить единственность бесконечно удаленной точки можно, рассматривая **сферу Римана**



Сфера находится на комплексной плоскости. Проведем прямую из верхней точки сферы (ее северного полюса) в какую-либо точку z комплексной плоскости. Прямая «проткнет» сферу в некоторой точке M. Организуем из точек z плоскости неограниченно возрастающую последовательность. Образы этих точек стремятся к точке P, а сама точка P является отображением бесконечно удаленной точки плоскости.

Кривой на комплексной плоскости называется однопараметрическое семейство точек плоскости $\gamma = \gamma(t)$. *Точкой самопересечения или кратной точкой кривой* называется точка, отвечающая двум или более значениям параметра.

Кривая, не содержащая кратных точек, называется ***простой или жордановой кривой***. Кривая называется замкнутой, если ее начало совпадает с ее концом.

Теорема Жордана. Любая замкнутая жорданова кривая делит расширенную комплексную плоскость на две области, общей границей которых она является. Одна из этих областей ограничена и называется внутренностью кривой. Вторая не ограничена и называется внешностью кривой.

Множество G называется ***односвязным,*** если для любой замкнутой кривой $\gamma = \gamma(t) \in G$ либо внутренность кривой принадлежит G, либо внешность кривой принадлежит G. Например, множества $|z| < 1, |z| > 2$, да и все изображенные на рисунках области, за исключением кругового кольца $2 \le |z-1| \le 3$ - односвязные, они «не содержат дыр».

Лекция 2

Последовательность и ее предел.

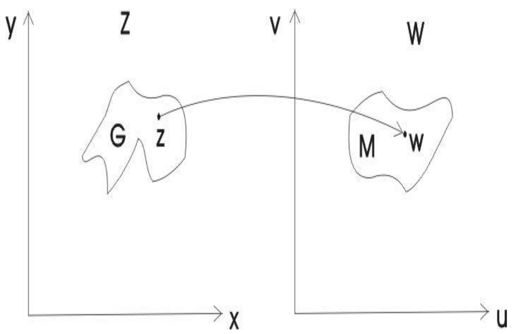
Комплексное число z_0 называется *пределом последовательности:* $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ (или *последовательность сходится к точке* z_0 : $\{z_n\} \to z_0$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N, \quad \forall n > N$ выполнено $|z_n - z_0 <|\varepsilon$.

Теорема. Для того чтобы последовательность $\{z_n\} \to z_0$ { $(z_n = x_n + iy_n), \quad (z_0 = x_0 + iy_0)$ } *необходимо и достаточно* $\{x_n\} \to x_0, \quad \{y_n\} \to y_0$.

Доказательство провести самостоятельно, используя неравенство треугольника ($|x - x_0| \le |z - z_0|, \quad |y - y_0| \le |z - z_0|$) и теорему Пифагора ($|z - z_0|^2 = |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2$).

Из теоремы следует, что многие свойства последовательностей действительных чисел могут быть перенесены на последовательности комплексных чисел.

Функция комплексной переменной.



Пусть произвольной точке $z \in G \subset Z$ поставлена в соответствие точка (единственная) $w \in M \subset W$ (Z, W - две комплексных плоскости) по некоторому закону $w = f(z)$. Тогда говорят, что определена функция комплексной переменной с областью определения G и областью значений в множестве M (или задано отображение области $G \subset Z$ в область $M \subset W$).

Комплексное число $w = f(z)$, как всякое комплексное число, имеет действительную и мнимую части $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Это – действительная $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и мнимая $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ части функции.

Пример. Выделим действительную и мнимую части функции $f(z) = e^z$.

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y, \quad u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y$

Элементарные функции комплексной переменной.

Экспонента e^z и при комплексных z сохраняет свои основные свойства

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $e^z \neq 0, \forall z$.

Формула Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ справедлива и для комплексных чисел z. Это будет показано позже. Используя четность cosz, chz и нечетность sinz, shz, (для комплексных z это тоже будет показано позже), получим формулы связи экспоненты с с тригонометрическими и гиперболическими синусами и косинусами. $e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i\sin z$. Складывая и вычитая e^{iz} c e^{-iz}, получим

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

Гиперболические косинус и синус определяются аналогично функциям действительной переменной

$$ch\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right), \quad sh\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right).$$

Отсюда $e^z = ch\, z + sh\, z$, $e^{-z} = ch\, z - sh\, z$.

Получим формулы связи тригонометрических и гиперболических косинусов и синусов.

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = ch\, iz, \quad ch\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i(iz)} + e^{i(iz)}\right) = \cos iz$$

$$i\sin z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = sh\, iz, \quad \sin iz = \frac{1}{2i}\left(e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right) = \frac{-i}{2}\left(e^{-z} - e^{z}\right) = i\frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = ish\, z$$

Покажем, что функции e^{iz}, $\cos z, \sin z$ - функции **периодические** с периодом 2π.

$$e^{i(z+2\pi)} = e^{iz}e^{2\pi i} = e^{iz}\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = e^{iz},$$

$\cos z, \sin z$ имеют тот же период 2π, так как они являются линейной комбинацией e^{iz}, e^{-iz} - периодических функций с периодом 2π.

Покажем, что функции e^z, $ch\, z, sh\, z$ - функции **периодические** с периодом $2\pi i$.

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = e^z.$$

$ch\, z, sh\, z$ имеют тот же период $2\pi i$, так как они являются линейной комбинацией e^z, e^{-z} - периодических функций с периодом $2\pi i$.

Упражнение. Выведите формулы

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2, \quad \cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$$

$$sh(z_1 + z_2) = sh\, z_1 ch\, z_2 + ch\, z_1 sh\, z_2, \quad ch(z_1 + z_2) = ch\, z_1 ch\, z_2 + sh\, z_1 sh\, z_2$$

$$sh(z_1 - z_2) = sh\, z_1 ch\, z_2 - ch\, z_1 sh\, z_2, \quad ch(z_1 - z_2) = ch\, z_1 ch\, z_2 - sh\, z_1 sh\, z_2,$$

используя свойства экспоненты и полученные выше формулы.

Пример. Вычислить sin (2π +5i), tg (πi)

sin (2π +5i) = $\sin 2\pi$ cos5i + $\cos 2\pi$ sin5i = sin5i = ch5

$$tg(\pi i) = \frac{\sin \pi i}{\cos \pi i} = \frac{ish\, \pi}{ch\, \pi} = ith\, \pi = i\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{e^{\pi} + e^{-\pi}}$$

Логарифмическая функция.

Функция $w = Lnz$ определяется как обратная функция по отношению к функции $z = e^w$. Пусть $z = |z|e^{i\arg z}$, $w = u + iv$.

Тогда $z = |z|e^{i\arg z} = e^w = e^u e^{iv}$.

Так как $\left|e^{i\alpha}\right| = \left|\cos\alpha + i\sin\alpha\right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1, \forall\alpha$, то, переходя в последнем соотношении к модулям, имеем $|z| = e^u$, $u = \ln|z|$.

Аргументы левой и правой части в соотношении могут отличаться на $2\pi k, \forall k$, поэтому $v = \arg z + 2\pi k$. Поэтому

$Lnz = u + iv = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ki$.

Это – многозначная функция. Ее главная ветвь

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$ - функция однозначная.

Пример. Вычислить ln(-1), Ln(-1), ln(1+i).

Ln(-1) = ln |-1| + iarg (-1) + $2\pi ki = \pi i + 2\pi ki$, ln(-1) = πi

ln(1+i) = ln|1+i| + iarg(1+i) = $\ln\left(\sqrt{2}\right) + i\dfrac{\pi}{4}$.

Предел и непрерывность функции.

Комплексное число b называется пределом функции f(z) при $z \to z_0$,

$\lim_{z\to z_0} f(z) = b, если \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - b| < \varepsilon$.

Это определение – то же, что определение предела функции действительной переменной с той лишь разницей, что модуль здесь имеет смысл расстояния на комплексной плоскости, а не на действительной прямой, как раньше. Кроме того, *окрестность точки* – не интервал с центром в этой точке, а *круг без границы с центром в этой точке.*

Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0**,** если $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z)$ называется **непрерывной в области G**, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Область M называется областью однолистности функции $f(z)$, если $\forall z_1, z_2 \in M \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

Линейная функция $f(z) = az$ осуществляет **линейное отображение** комплексной плоскости на себя. $|f(z)| = |a||z|, \arg f(z) = \arg a + \arg z$. Отсюда видно, что линейное отображение сводится к растяжению в $|a|$ раз и повороту на $\arg a$ комплексной плоскости. Здесь область однолистности – вся плоскость.

Инверсия $f(z) = \dfrac{1}{z}$ ($|f(z)| = \dfrac{1}{|z|}, \arg f(z) = -\arg z$) переводит все точки, лежащие вне единичной окружности $|z| = 1$ внутрь и наоборот. Точки $z = \pm 1$ остаются на месте, единичная окружность отображается на себя.

Отображение $f(z) = z^2$ ($|f(z)| = |z|^2, \arg f(z) = 2\arg z$) часть действительной оси ($x \geq 0, y = 0$) и верхнюю полуплоскость отображает на всю плоскость. Часть действительной оси ($x \leq 0, y = 0$) и нижняя полуплоскость тоже отображаются на всю плоскость. Здесь две области однолистности. Поэтому обратная функция $f(z) = \sqrt{z}$ двузначна.

Упражнение. Покажите, что при отображении $f(z) = z^n$ существует n областей однолистности. Выделите их. Функция $f(z) = \sqrt[n]{z}$ поэтому n – значна.

Отображение $f(z)=e^z$ переводит прямую, параллельную мнимой оси ($z=x+it$) в $e^z=e^x(\cos t+i\sin t)$ - окружность с центром в начале координат, радиусом e^x. Прямая, параллельная действительной оси $(z=t+iy)$ переводится в $e^z=e^t(\cos y+i\sin y)$ - луч из начала координат под углом y к действительной оси.

Поэтому полоса размером 2π вдоль действительной оси переводится во всю плоскость и представляет собой область однолистности (каждый отрезок в полосе, параллельный мнимой оси (x = a) отобразится в окружность радиуса а с центром в начале координат, меняя а, заполним этими окружностями всю плоскость). Следовательно, здесь бесконечное количество областей однолистности, а обратная функция $f(z)=Lnz$- бесконечнозначна.

Производная функции комплексной переменной вводится так же, как и для функции действительной переменной

$$f'(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** z_0**,** если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$\Delta f(z_0)=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A(z_0)\Delta z+\varepsilon(z,z_0)\Delta z,\ где \lim_{z\to z_0}\varepsilon(z,z_0)=0$, то есть $\varepsilon(z,z_0)$ - бесконечно малая при $z\to z_0$. Главная линейная относительно Δz часть приращения функции в точке z_0, $A(z_0)\Delta z$ называется **дифференциалом функции в точке** z_0**, (**$df(z_0)=A(z_0)\Delta z$).

Замечание. Функция двух переменных $\varphi(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0,y_0), если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta\varphi(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1(x,y,x_0,y_0)\Delta x+\varepsilon_2(x,y,x_0,y_0)\Delta y,$$

где $\varepsilon_1(x,y,x_0,y_0)$, $\varepsilon_2(x,y,x_0,y_0)$ - бесконечно малые при $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$,

$$A=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0),\ B=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Теорема. Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала ее конечная производная в этой точке.

Доказательство. Проводится так же, как и для функции действительной переменной с использованием теоремы о связи функции, предела и бесконечно малой.

Необходимость. Пусть функция дифференцируема в точке z_0, тогда

$$\Delta f(z_0)=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A(z_0)\Delta z+\varepsilon(z,z_0)\Delta z,\ где \lim_{z\to z_0}\varepsilon(z,z_0)=0,$$

Делим обе части на Δz

$\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=A(z_0)+\varepsilon(z,z_0)$. Так как $\varepsilon(z,z_0)$ - бесконечно малая при $z\to z_0$, то по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, $A(z_0)=\lim_{z\to z_0}\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)$.

Поэтому $df(z_0)=f'(z_0)\Delta z$ - **формула для вычисления дифференциала.**

Достаточность. Пусть в точке z_0 существует конечная производная функции $\lim_{z\to z_0}\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)$. Тогда по теореме о связи функции, предела и бесконечно малой $\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)+\varepsilon(z,z_0)$. Умножая на Δz, получим

$\Delta f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\varepsilon(z,z_0)\Delta z,\ где \lim_{z\to z_0}\varepsilon(z,z_0)=0$. Следовательно, функция дифференцируема в точке z_0.

Функция называется дифференцируемой в области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Теорема (Коши – Римана). Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части $u(x,y)$, $v(x,y)$были бы дифференцируемы в этой точке $(z_0=x_0+iy_0)$как функции двух переменных x,yи в этой точке выполнялись бы **условия Коши – Римана**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases},\ \text{причем}\ f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Замечание. С учетом условий Коши – Римана производная функции в точке может быть записана так: $f'(z_0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)+i\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Необходимость. Пусть функция дифференцируема в точке z_0. Тогда

$\Delta f(z_0)=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\varepsilon(z,z_0)\Delta z,\ где \lim_{z\to z_0}\varepsilon(z,z_0)=0$.

Пусть $f'(z_0)=a+bi$, $\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$.

$\Delta f(z_0)=\Delta u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)=(a+bi)(\Delta x+i\Delta y)+(\varepsilon_1+i\varepsilon_2)(\Delta x+i\Delta y)=$
$(a\Delta x-b\Delta y)+i(b\Delta x+a\Delta y)+(\varepsilon_1\Delta x-\varepsilon_2\Delta y)+i(\varepsilon_2\Delta x+\varepsilon_1\Delta y)$.

Отделяя действительную и мнимую части, имеем:

$\Delta u=(a\Delta x-b\Delta y)+(\varepsilon_1\Delta x-\varepsilon_2\Delta y)$,
$\Delta v=(b\Delta x+a\Delta y)+(\varepsilon_2\Delta x+\varepsilon_1\Delta y)$.

Следовательно, функции $u(x,y)$, $v(x,y)$дифференцируемы в точке (x_0,y_0)

Из первого соотношения следует, что

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=a,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-b$.

Из второго соотношения следует, что

$\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=b$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=a$.

Поэтому $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$. $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Достаточность. Пусть функции $u(x,y)$, $v(x,y)$дифференцируемы в точке (x_0,y_0)и выполняются условия Коши – Римана.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}[\Delta u+i\Delta v]=\frac{1}{\Delta z}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\alpha\Delta x+\beta\Delta y)+i(\gamma\Delta x+\delta\Delta y)\right]$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - бесконечно малые при $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y+i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right]+\left(\alpha\frac{\Delta x}{\Delta z}+\beta\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)+i\left(\gamma\frac{\Delta x}{\Delta z}+\delta\frac{\Delta y}{\Delta z}\right).$$

Функции $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, поэтому они являются бесконечно малыми при $\Delta z \to 0$. Справедливы неравенства $|\Delta x| \le |\Delta z|, |\Delta y| \le |\Delta z|$. Поэтому отношения приращений в двух последних скобках – ограниченные величины. Следовательно, выражения в двух последних скобках – бесконечно малые величины при $\Delta z \to 0$ как произведения бесконечно малых на ограниченные. Обозначим два последних слагаемых $\varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = \varepsilon(z, z_0)$ - бесконечно малая при $\Delta z \to 0$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon(z, z_0) = f'(z_0) + \varepsilon(z, z_0).$$

Умножая это выражение на Δz, получим

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z, \text{ где } \lim_{z \to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0.$$

Следовательно, функция дифференцируема в точке z_0.

Условия Коши – Римана позволяют легко проверить дифференцируемость функции в точке.

Функция называется **аналитической в области,** если она дифференцируема в области.

Функция называется **аналитической в точке,** если она **дифференцируема в этой точке и некоторой ее окрестности.**

Основные элементарные функции $e^z, \sin z, \cos z, shz, chz$ **аналитические на всей комплексной плоскости.**

Проверим, например, условия Коши – Римана для функции e^z

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$ Условия Коши – Римана выполнены при любых значениях переменных, функция аналитическая во всей комплексной плоскости.

Пример. Функция z = x не является дифференцируемой ни в одной точке, так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Пример Функция $f(z) = z \operatorname{Re} z = zx = (x + iy)x = x^2 + ixy$.

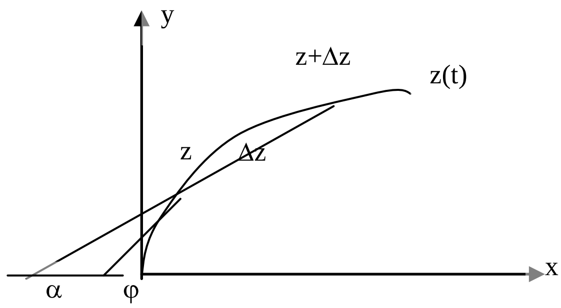
$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = x, -\frac{\partial v}{\partial x} = -y$. Функция дифференцируема только в точке z=0 и более ни в одной точке. Она не аналитическая ни в одной точке, поскольку для аналитичности кроме дифференцируемости в точке нужна еще дифференцируемость в некоторой области.

Пример. $f(z) = \bar{z} = x - iy$ не является дифференцируемой ни в одной точке, так как условия Коши – Римана не выполнены, $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Лекция 3

Геометрический смысл аргумента и модуля производной аналитической функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.

Рассмотрим комплекснозначную дифференцируемую в точке t и некоторой ее окрестности функцию действительной переменной z(t).



Рассмотрим точку z , дадим приращение Δz, α= arg Δz. Тогда $\arg\frac{\Delta z}{\Delta t} = \arg z' = \alpha$.

При $\Delta t \to 0$ секущая переходит в касательную, $\frac{\Delta z}{\Delta t} \to z'(t), tg\alpha \to tg\varphi$, где φ - угол наклона касательной к графику в точке z . Тогда $\arg\frac{\Delta z}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \arg z'(t) = \varphi$

Наличие ненулевой производной $z'(t)$ *означает наличие касательной к графику функции с углом наклона к действительной оси, равным* $\arg z'(t)$.

Рассмотрим теперь комплекснозначную аналитическую функцию комплексной переменной $f(z)$. Пусть $z = z(t)$, где t - действительное число. Тогда $f(z) = f(z(t))$ - комплекснозначная функция действительной переменной z(t), дифференцируемая в точке t и некоторой ее окрестности.

Касательная к графику функции, по рассмотренному выше, имеет угол наклона к действительной оси равный $\arg f'(z(t))$.

По теореме о сложной функции $f'(z(t)) = f'(z)z'(t)$, поэтому

$\arg f'(z(t)) = \arg f'(z) + \arg z'(t)$. **Следовательно,** $\arg f'(z)$ **- аргумент производной аналитической функции** $f(z)$**. имеет смысл угла поворота касательной к кривой в точке** z **при ее отображении посредством функции** $f(z)$**.**

Так как $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$, $| f'(z)| = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{|\Delta f(z)|}{|\Delta z|}$, то $|f'(z)|$ - **модуль производной аналитической функции имеет смысл коэффициента растяжения при отображении посредством функции** $f(z)$**.** Все это справедливо в тех точках, в которых *производная отлична от нуля*.

Если две кривые отображаются посредством аналитической функции $f(z)$ $(f'(z) \neq 0)$**,** то угол наклона касательной к каждой кривой изменяется в точке z на один и тот же угол $\arg f'(z)$**, поэтому углы между кривыми сохраняются при отображении посредством аналитической функции** (в тех точках, в которых ее *производная отлична от нуля)*.

Отображение, сохраняющее углы между кривыми, называется **конформным**. Поэтому **отображение посредством аналитической функции** (в тех точках, в которых ее *производная отлична от нуля)* **является конформным.**

Пример. Линейное отображение $f(z) = az$ ($f'(z) = a$), как было показано выше, сводится к повороту на угол $\arg a$ и растяжению в $|a|$ раз.

Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.

Пусть задана функция $u(x, y)$, требуется определить, может ли она быть действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$**,** а если может, то восстановить эту функцию.

Та же задача может быть поставлена относительно мнимой части. Пусть задана функция $v(x, y)$, требуется определить, может ли она быть мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)$**,** а если может, то восстановить эту функцию.

При решении этих задач сначала надо проверить, существует ли такая аналитическая функция $f(z)$**.**

Справедлива **теорема.** *Действительная и мнимая части аналитической функции есть функции гармонические (т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа).*

Доказательство. Если $f(z)$ - функция аналитическая, то выполнены условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Дифференцируем частным образом первое равенство по x, второе по y и складываем. Получим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, поэтому функция $u(x, y)$ - гармоническая. Дифференцируем частным образом первое равенство по y, второе по x и вычитаем из первого равенства второе. Получим $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, поэтому функция $v(x, y)$ - гармоническая.

Следовательно, если функция $u(x, y)$ или функция $v(x, y)$ не являются гармоническими, то аналитическую функцию построить нельзя.

Пусть функция $u(x, y)$ и функция $v(x, y)$ - гармонические функции. Покажем, как можно восстановить аналитическую функцию по известной действительной части $u(x, y)$.

Восстановление функции по $v(x, y)$ аналогично.

1 способ.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + a(x) + C_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow v = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + b(y) + C_2$$

Сравнивая оба выражения, определяем $a(x), b(y), C_1, C_2$. Теперь $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) + C\,i$.

Замечание. При восстановлении по $v(x, y)$ функция восстанавливается с точностью до действительной постоянной, а не мнимой.

2 способ. $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + a(x) + C_1$ (как в первом способе). Если при интегрировании второго условия Коши – Римана возникают проблемы, то можно продифференцировать полученное соотношение по x и приравнять известной функции.

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + \alpha'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Решая это дифференциальное уравнение, получим $\alpha(x)$, $v(x, y)$+C, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) + C\,i$.

3 *способ.* В первых двух способах функция восстанавливается как функция x, y. Гораздо приятнее получить ее в виде f(z). В третьем способе используется формула для производной $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Так как функция $u(x, y)$ известна, то $f'(z)$ определяется как функция (x, y). Функцию определяем по формуле

$f(z) = \int f'(z)\big|_{z=x,\, y=o} dz$.

Пример. Задана функция $u(x, y) = e^x \cos y$. Проверить, можно ли восстановить аналитическую функцию с такой действительной частью. Если возможно, то восстановить.

Проверьте самостоятельно, что заданная функция является гармонической.

1 способ.

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \Rightarrow v = \int e^x \cos y dy + a(x) + C_1 = e^x \sin y + \alpha(x) + C_1$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y \Rightarrow v = \int e^x \sin y dx + b(y) + C_2 = e^x \sin y + b(y) + C_2$.

Сравнивая эти выражения, имеем $\alpha(x) \equiv 0, b(y) \equiv 0, C_1 = C_2 + C$,

$v(x, y) = e^x \sin y + C$. Поэтому $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$+ C i = $e^z + Ci$.

2 способ.

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \Rightarrow v = \int e^x \cos y dy + a(x) + C_1 = e^x \sin y + \alpha(x) + C_1$

$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y + \alpha'(x) = e^x \sin y \Rightarrow \alpha'(x) = 0 \Rightarrow \alpha(x) = C_2$. $v(x, y) = e^x \sin y + C$,

Поэтому $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$+ C i = $e^z + Ci$.

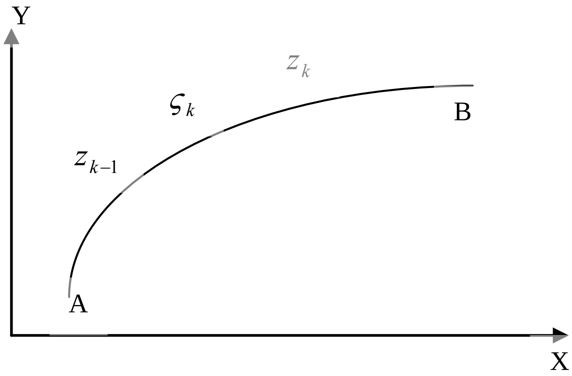
3 способ.

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y - i(-e^x \sin y)$

$f(z) = \int \left(e^x \cos y + ie^x \sin y\right)\big|_{z=x,\, y=o} dz = \int e^z dz = e^z + C$. Здесь C – комплексное число.

Лекция 4

Интеграл от функции комплексной переменной.



Рассмотрим кусочно-гладкую дугу AB. Введем разбиение дуги точками A=z_0, $z_1 \ldots z_{k-1}$, z_k, … z_n =B. На каждом элементе дуги z_{k-1}, z_k отметим точку ς_k Обозначим l_k длину элемента дуги z_{k-1}, z_k . Рассмотрим непрерывную на дуге AB и в некоторой ее окрестности функцию комплексной переменной $f(z)$. Вычислим $f(\varsigma_k)$.

Построим интегральную сумму $\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k, где \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Введем интеграл от функции комплексной переменной по дуге AB как предел интегральной суммы при неограниченном измельчении разбиения.

$$\int_{AB} f(z)dz = \lim_{\max l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k$$

Теорема существования. Пусть функция f(z) непрерывна в области G. Пусть кусочно-гладкая дуга L принадлежит области G. Тогда интеграл $\int_{AB} f(z)dz$

существует как предел интегральных сумм $\int_{AB} f(z)dz = \lim_{\max l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k$

Причем предел этот не зависит:

- от выбора способа разбиения дуги на элементы, лишь бы дуга представляла собой объединение элементов, и пересечение любых двух соседних элементов было бы точкой или пустым множеством (но никак не дугой конечной длины),
- от выбора точек на элементе разбиения, в которых вычисляются значения функции,
- от способа «измельчения» разбиения, лишь бы выполнялось условие $\max_k l_k \to 0$.

Свойства интеграла.

1. *Линейность* а) $\int_L (f_1(z)+f_2(z))dz = \int_L f_1(z)dz + \int_L f_2(z)dz$, б) $\int_L \lambda f(z)dz = \lambda \int_L f(z)dz$.
   Заметим, что первое свойство иногда называют аддитивностью, второе – однородностью. *Доказательство* проводится через интегральные суммы, как в определенном, кратных и криволинейных интегралах.
2. *Аддитивность по множеству.* Пусть $L = L_1 \cup L_2$. Тогда $\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$. *Доказательство* проводится через интегральные

суммы с фиксацией граничной точки дуг на основании теоремы существования так же, как в определенном, кратных и криволинейных интегралах..

3. «*Ориентируемость*» $\int\limits_L f(z)dz = -\int\limits_{-L} f(z)dz$, где –L – та же дуга L, но проходимая в другом направлении. *Доказательство* основано на том, что для дуги L $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, а для дуги –L $\Delta z_k = z_{k-1} - z_л$ и проводится через интегральные суммы, как в определенном и криволинейных интегралах..

4. $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le \int\limits_L |f(z)|dl$. Заметим, в правой части неравенства стоит криволинейный интеграл от функции $|f(z)|$, принимающей только действительные значения. *Доказательство.* $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n}|f(\varsigma_k)\Delta z_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n}|f(\varsigma_k)||\Delta z_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n}|f(\varsigma_k)|\Delta l_k$.
Переходя к пределу при $\max_k l_k \to 0$, получим $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le \int\limits_L |f(z)|dl$.

5. Пусть $|f(z)| \le M$, *тогда* $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le Ml$, *где* l *– длина дуги L.*
Доказательство. По свойству 4 $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le \int\limits_L Mdl = Ml$.

6. $\int\limits_{AB} Kdz = K(B - A)$ *Доказательство*. Достаточно показать, что $\int\limits_{AB} dz = B - A$ и использовать свойство 1б).
$\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta z_k = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + ... + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0 = B - A$. Переходя к пределу при $\max_k l_k \to 0$, получим $\int\limits_{AB} dz = B - A$.

Три формы записи интеграла.

$$\int\limits_L f(z)dz = \lim_{\max l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta z_k = \lim_{\max l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} (u(\varsigma_k) + iv(\varsigma_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \lim_{\max l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} (u(\varsigma_k)\Delta x_k - v(\varsigma_k)\Delta y_k) + i(v(x_k)\Delta x_k + u(x_k)\Delta y_k) =$$

$\int\limits_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_L v(x,y)dx + u(x,y)dy$. Это – *1 форма записи – в виде двух криволинейных интегралов.*

Параметризуем дугу L: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $L = AB,\ A(x(t_0), y(t_0)),\ B(x(t_1), y(t_1))$.

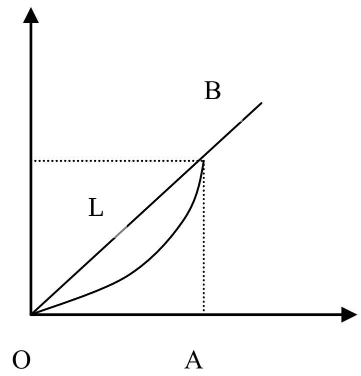
$dx = \dot{x}(t)dt,\ dy = \dot{y}(t)dt$. Подставляя в первую форму записи, имеем:

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_0}^{t_1} (u(x(t),y(t))\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\dot{y}(t))dt + i\int\limits_{t_0}^{t_1} (v(x(t),y(t))\dot{x}(t) + u(x(t),y(t))\dot{y}(t))dt.$$

Это – 2 ая форма записи – в виде двух определенных интегралов.

Параметризуем дугу L:z=z(t), $z(t_0)=A,\ z(t_1)=B$

$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_{t_0}^{t_1} f(z(t))\dot{z}(t)dt$. Это – *третья форма записи – в виде определенного интеграла от комплексно - значной фунции действительной переменной.*



Пример. Вычислить $\int\limits_L z^2dz$ по трем различным дугам : 1) OB: y=x,
2) OB: $y=x^2$,
3) OAB

1) Воспользуемся третьей формой записи интеграла, параметризуя дугу OB: (1+i)t, O(0,0) (t=0), B(1,i) (t=1). $z^2=(1+i)^2t^2$, dz = (1+i) dt. $\int\limits_L z^2dz=\int\limits_0^1(1+i)^3t^2dt=\frac{1}{3}(1+i)^3=$
$=\frac{1}{3}(1+3i-3-i)=\frac{2}{3}(i-1)$

2) $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy,\ u=x^2-y^2,\ v=2xy,\ y=x^2,\ dy=2xdx,\ 0\le x\le 1$.
По первой форме записи интеграла

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_0^1\left(\left(x^2-y^2\right)dx-2xy2xdx\right)+i\int\limits_0^1(2xydx+(x^2-y^2)2xdx)=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2-x^4-4x^4\right)dx+i\int\limits_0^1\left(2x^3+2x^3-2x^5\right)dx=(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{4}{5})+i(1-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}(i-1).$$

3) OA: y = 0, dy = 0. AB: x =1, dx = 0. Поэтому $\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_{OA}f(z)dz+\int\limits_{AB}f(z)dz=$

$$\int\limits_{OA}(u+iv)dx+\int\limits_{AB}(-v+iu)dy=\int\limits_{OA}x^2dx+\int\limits_{AB}\left(-2y+i\left(1-y^2\right)\right)dy=\frac{1}{3}+\left(-1+i-\frac{1}{3}i\right)=$$

$$\frac{2}{3}(i-1).$$

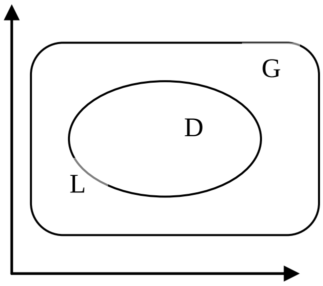
Как оказалось, результат во всех трех случаях один и тот же. В чем же здесь дело? Это – случай или закономерность? Ответ на этот вопрос дает интегральная теорема Коши.

Интегральная теорема Коши (для односвязной области).

Пусть G – односвязная область, пусть функция f(z) – аналитическая в G функция, пусть L – кусочно—гладкий контур, принадлежащий области G. Тогда $\oint\limits_L f(z)dz=0$.

Теорему можно сформулировать и так: *интеграл от аналитической функции вдоль кусочно-гладкого контура равен нулю.*

Доказательство.



Обозначим D – внутренность контура L . Запишем формулу Грина $\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$. Представим интеграл $\oint\limits_L f(z)dz$ в первой форме записи через два криволинейных интеграла $\oint\limits_L f(z)dz=\oint\limits_L udx-vdy+i\oint\limits_L vdx+udy$

Применим к каждому слагаемому в правой части равенства формулу Грина. В первом интеграле примем P = u, Q = -v.

$$\oint\limits_L udx-vdy=\iint\limits_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy=0$$

(для аналитической функции выполнены условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$).

Во втором интеграле примем P = v, Q = u.

$$\oint\limits_L vdx+udy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0$$ (условие Коши – Римана).

Поэтому $\oint\limits_L f(z)dz=0$.

Следствие. Пусть L_1, L_2 – две кусочно-гладких дуги в односвязной области G, соединяющие точки A, B. Пусть функция f(z) – аналитическая в области G. Тогда $\oint\limits_{L_1} f(z)dz=\oint\limits_{L_2} f(z)dz$.

Можно дать словесную формулировку: *интеграл от аналитической функции в односвязной области вдоль кусочно-гладкой дуги не зависит от формы дуги, а зависит только от начальной и конечной точек дуги.*

Доказательство. Образуем контур $\gamma=L_1\cup(-L_2)$. По интегральной теореме Коши $\oint\limits_\gamma f(z)dz=0$. Но $\oint\limits_\gamma f(z)dz=\int\limits_{L_1} f(z)dz+\int\limits_{-L_2} f(z)dz=\int\limits_{L_1} f(z)dz-\int\limits_{L_2} f(z)dz$. Следовательно, $\oint\limits_{L_1} f(z)dz.=\oint\limits_{L_2} f(z)dz$.

Поэтому результат в рассмотренном выше примере не случаен.

Очень важный пример. Вычислить интеграл $\oint\limits_\gamma\frac{dz}{(z-z_0)^n}$, где n – целое число, контур γ - окружность с центром в точке z_0 радиусом ρ.

Покажем, что точки z на контуре γ можно описать уравнением $z=z_0+\rho e^{i\varphi}$, $0\le\varphi<2\pi$, $\rho>0$ - действительное число. В самом деле, $|z-z_0|=\rho\left|e^{i\varphi}\right|=\rho$, так как $\left|e^{i\varphi}\right|=|\cos\varphi+i\sin\varphi|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1$. Таким образом, контур γ - это геометрическое место точек комплексной плоскости, расположенных на расстоянии ρ от точки z_0 - окружность с центром в точке z_0 радиусом ρ.

Если $n \le 0$, то подынтегральная функция – аналитическая внутри контура γ. Тогда по интегральной теореме Коши $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0.$

Пусть $n > 0$. Так как точка z лежит на контуре γ, то $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$. Перейдем к переменной φ. Пусть $n \ne 1$.

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho^n e^{in\varphi}} = \rho^{1-n} i \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\varphi} d\varphi = \frac{i\rho^{1-n}}{n-1} e^{-i(n-1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

по периодичности экспоненты.

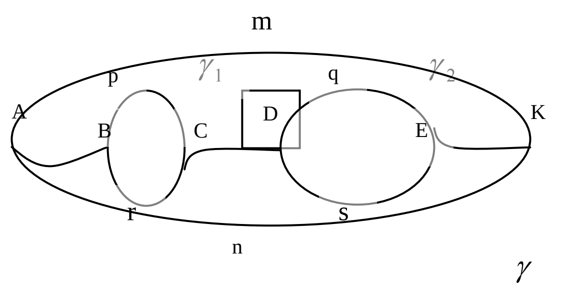
Пусть $n = 1$. Тогда

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Вывод. $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \ne 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}.$

Интегральная теорема Коши для многосвязной области.

Пусть кусочно-гладкие контуры $\gamma_1, \ldots \gamma_n$. лежат внутри контура γ и вне друг друга. Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в области между контурами и на самих этих контурах. Тогда $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz$.



Соединим контуры линиями AB, CD, EK. По интегральной теореме Коши интегралы по контуру AbpCDqEKmA и по контуру AnKEsDCrBA равны нулю. Представим эти интегралы как сумму интегралов по составляющим контуры дугам и сложим эти интегралы, сокращая интегралы по одним и тем же дугам в разных направлениях

$$0 = \oint\limits_{ABpCDqEKmA} f(z)dz = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BpC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DqE} + \int\limits_{EK} + \int\limits_{KmA}$$

$$0 = \oint\limits_{AnKEsDCrBA} f(z)dz = \int\limits_{BA} + \int\limits_{CrB} + \int\limits_{DC} + \int\limits_{EsD} + \int\limits_{KE} + \int\limits_{AnK}$$

Складывая интегралы, получим

$0 = \int\limits_{BpCrB} + \int\limits_{DqEsD} + \int\limits_{KmAnK} = -\oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz - \oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma} f(z)dz$. Отсюда имеем

$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2} f(z)dz$. Теорема доказана для случая n = 2. Для n > 2 доказательство аналогично.

Следствие 1. В условиях теоремы при n = 1 будет $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz$. Поэтому, если в какой-либо точке нарушается аналитичность функции, то интеграл может быть взят по любому кусочно-гладкому не самопересекающемуся контуру, охватывающему эту точку, мы получим один и тот же результат.

Следствие 2. Если кусочно-гладкий контур γ один раз охватывает некоторую точку, $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = W$.а контур L n раз охватывает эту точку, то в условиях теоремы $\oint\limits_{L} f(z)dz = nW$. Докажите это самостоятельно.

Интеграл с переменным верхним пределом.

Введем интеграл с переменным верхним пределом $J(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$. Ясно, что эта запись имеет смысл, если интеграл не зависит от дуги, по которой производится интегрирование, а зависит только от начальной и конечной точек дуги.

Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу.

Пусть

- функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области G,
- $\int\limits_{AB} f(z)dz$ вдоль любой кусочно-гладкой дуги AB, принадлежащей G, не зависит от формы дуги, а зависит только от значений функции в точках A, B.

Тогда $J'(z) = f(z)$.

Доказательство.

$$J'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{J(z+\Delta z) - J(z)}{\Delta z}.$$

$$J(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz, \quad J(z+\Delta z) = \int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz + \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz$$

Такая запись оправдана тем, что дугу, соединяющую точки z_0 и z + Δz, можно провести через точку z, так как интеграл не зависит от формы дуги. На том же основании выберем дугу, соединяющую точки z и z + Δz, отрезком λ прямой линии, тогда $\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)dz = \int\limits_{\lambda} f(z)dz$, $J'(z) = \dfrac{\int\limits_{\lambda} f(z)dz}{\Delta z}$. Заметим, что $\int\limits_{\lambda} dz = \Delta z$ (свойство 6 интеграла). Надо доказать, что $J'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{J(z+\Delta z) - J(z)}{\Delta z} = f(z)$.

Оценим

$$\left| \frac{J(z+\Delta z) - J(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{\int\limits_{\lambda} f(t)dt}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{\int\limits_{\lambda} f(t)dt - f(z)\int\limits_{\lambda} dt}{\Delta z} \right| = \left| \frac{\int\limits_{\lambda} (f(t) - f(z))dt}{\Delta z} \right| \le$$

(По непрерывности функции $f(z)$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0, что\ |\Delta z| < \delta \Rightarrow |\Delta f(z)| = |f(z+\Delta z) - f(z)| < \varepsilon$. Точка t лежит на отрезке λ, соединяющем точки z и z + Δz, поэтому $|t - z| < |\Delta z| \Rightarrow |f(t) - f(z)| < \varepsilon$.)

$$\le \frac{\int\limits_{\lambda} |f(t) - f(z)| dt}{|\Delta z|} \le \frac{\varepsilon \left|\int\limits_{\lambda} dt\right|}{|\Delta z|} = \varepsilon \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|} = \varepsilon$$ (использованы свойства 4, 6 интеграла).

Следовательно, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0, что\ |\Delta z| < \delta \Rightarrow \left|\frac{J(z+\Delta z) - J(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \varepsilon$.

Поэтому $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{J(z+\Delta z) - J(z)}{\Delta z} = J'(z) = f(z)$. Теорема доказана.

Функция Ф(z) называется **первообразной** для функции f(z), если $\Phi'(z) = f(z)$.

Следствие. По теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом, он является первообразной для подынтегральной функции.

Теорема. Пусть Φ_1(z), Φ_2(z) – две первообразные для функции f(z), тогда Φ_1(z) = Φ_2(z) + C (C- константа).

Доказательство. Обозначим g(z) = Φ_1(z) – Φ_2(z). g'(z) = Φ_1'(z) – Φ_2'(z) = f(z) – f(z)=0.

Пусть g(z) = u(x,y) + i v(x,y). Тогда $0 = g'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Отсюда

$$0 \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow u(x,y) \equiv C_1,\ v(x,y) = C_2 \Rightarrow g(x,y) = C_1 + iC_2 = const\,.$$

Формула Ньютона – Лейбница.

Пусть справедливы условия теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом. Пусть Ф(z) – первообразная для функции f(z). Тогда

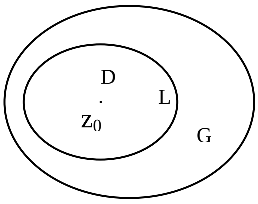
$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$$

Доказательство. $J(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz$ по теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом – первообразная для функции f(z). Поэтому J(z)=Ф(z)+C.

J(z_0) = 0 = Ф(z_0) + C, отсюда C = - Ф(z_0). Тогда J(z_1) = Ф(z_1) + C = Ф(z_1) - Ф(z_0).

Лекция 5.
Интегральная формула Коши.

Интегральная формула Коши



Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области G . Пусть кусочно-гладкий контур L принадлежит G вместе со своей внутренностью D . Пусть $z_0 \in D$, тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Доказательство. По интегральной теореме Коши для многосвязной области $\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$, где γ_ρ - окружность с центром в точке z_0, радиусом ρ, $\gamma_\rho : z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, 0 \le \varphi < 2\pi$. Радиус окружности выбран достаточно малым, чтобы окружность целиком лежала в области D. Так как $\oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ (важный пример в предыдущей лекции), то $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$. Оценим $| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz | =$

$$= | \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz | \le \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \oint_{\gamma_\rho} \frac{|f(z_0) - f(z)|}{|z - z_0|} |dz| \le$$

(на окружности γ_ρ, $|dz| = |\rho i e^{i\varphi} d\varphi| = \rho d\varphi$, так как $|i| = 1, |e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$. По непрерывности функции $f(z)$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho(\varepsilon) > 0, |z - z_0| < \rho \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$).

$\le \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} \oint_{\gamma_\rho} |dz| = \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \int_0^{2\pi} \rho d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} 2\pi\rho = \varepsilon$. В силу произвольности ε $| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz | = 0$. Следовательно, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.

Теорема. *Аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой в области аналитичности.*

Доказательство. Можно показать, что интеграл в интегральной формуле Коши можно дифференцировать по z_0, как по параметру. Проводя это дифференцирование нужное число раз, получим формулу для n – ой производной аналитической функции.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz,\ f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz,\ f'''(z_0) = \frac{3 \cdot 2}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^4} dz \ldots.$$

$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$. *Это - формула для n – ой производной аналитической функции.*

С помощью полученных формул (деля обе части на коэффициент перед интегралом) можно вычислять интегралы вида

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0),\ \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Примеры. 1. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin z}{z-2}\,dz = 2\pi i \sin 2$ (по интегральной формуле Коши)

2. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-i)^2}dz = 2\pi i\left(e^z\right)'\Big|_{z=i} = 2\pi i e^i = 2\pi i(\cos 1 + i\sin 1)$ (по формуле для первой производной)

3. Вычислить $\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{\cos z}{(z-1)z^2}dz$. Аналитичность функции нарушается в точках z=0, z=1. Рассмотрим два контура: $\gamma_1\ u\ \gamma_2$ – окружности с центрами в точках z=0, z=1, радиусами r=1/4. $\left(|z| = \frac{1}{4}, |z-1| = \frac{1}{4}\right)$. По интегральной теореме Коши для многосвязной области $\oint\limits_{|z-2|=5} \frac{\cos z}{(z-1)z^2}dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\cos z}{(z-1)z^2}dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\cos z}{(z-1)z^2}dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{z^2}\,dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos z}{z^2}}{z-1}dz =$

$$= 2\pi i\left[\left(\frac{\cos z}{z-1}\right)'\Big|_{z=0} + \left(\frac{\cos z}{z^2}\right)\Big|_{z=1}\right] = 2\pi i\left[\frac{-\sin z(z-1) - \cos z}{(z-1)^2}\Big|_{z=0} + \cos 1\right] = 2\pi i(\cos 1 - 1).$$

Лекция 6.

Ряды в ТФКП

Большая часть теорем из теории рядов ТФКП доказывается аналогично соответствующим теоремам из теории рядов действительных переменных.

Числовые ряды.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частичных сумм $\{S_n\} \to S, \left(S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n\right)$ или $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N \Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon$.

Теорема. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, где $z_n = x_n + iy_n$, сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды из действительных и мнимых частей $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Доказательство следует из теоремы лекции 2 относительно эквивалентности сходимости последовательности $\{S_n\} \to S = S_x + S_y$ сходимости последовательностей действительных и мнимых частей $S_{nx} \to S_x, S_{ny} \to S_y$.

Следствие. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ или ряд $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ расходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ расходится.

Доказательство (от противного) – проведите сами.

Замечание. Эта теорема как раз и «перекидывает мостик» между изученными ранее рядами действительной переменной и рядами комплексной переменной.

Критерий Коши. Для того чтобы числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N, \forall p \geq 0 \Rightarrow \left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}\right| < \varepsilon$.

Доказательство.

Необходимость. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся. Следовательно, для них выполняется критерий Коши. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N_1, \forall p \geq 0 \Rightarrow \left|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\right| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N_2, \forall p \geq 0 \Rightarrow \left|y_{n+1} + y_{n+2} + \ldots + y_{n+p}\right| < \varepsilon$.

Выбирая $n > \max(N_1, N_2)$, получим $\forall n > N$

$$\left|z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}\right| = \sqrt{\left|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}\right|^2 + \left|y_{n+1} + \ldots + y_{n+p}\right|^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{2}.$$

Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N, \forall p \geq 0 \Rightarrow \left|z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}\right| < \varepsilon$. Тогда, так как $\left|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\right| \leq \left|z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}\right|, \left|y_{n+1} + \ldots + y_{n+p}\right| \leq \left|z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}\right|$, то для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ выполнен критерий Коши. Следовательно, они сходятся. Тогда, по доказанной теореме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится.

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | z_n |$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится (*если ряд сходится абсолютно, то он сходится*).

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | z_n |$ – знакоположительный числовой ряд, так как $|z_n|$ - неотрицательное действительное число. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} | z_n |$ сходится и $\forall n \, |x_n| \le |z_n|$, то по первому признаку сравнения знакоположительных числовых рядов ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |$ сходится. Аналогично, так как $\forall n \, |y_n| \le |z_n|$, то по первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | y_n |$ сходится. Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся абсолютно, то они сходятся. Тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится.

Пример. Ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + ... \right) + i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... \right)$ сходится, так как по признаку Лейбница сходятся ряды из действительных и мнимых частей.

Функциональные ряды.

Функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(z)$ в каждой фиксированной точке z представляет собой числовой ряд. Исследуя этот числовой ряд, можно выяснить, сходится или расходится функциональный ряд в данной точке z.

Функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(z)$ *сходится в точке* z, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon, z), \forall n > N \Rightarrow |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$. Это так называемая *обычная или поточечная* сходимость функционального ряда, заметим, что N зависит не только от ε, как в числовых рядах, но и от z, поэтому ряд может сходиться с разной скоростью в различных точках z.

Критерий Коши (поточечной сходимости ряда). Для того чтобы функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(z)$ сходился в точке z, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon, z), \forall n > N, \forall p \ge 0 \Rightarrow |S_{n+p}(z) - S_n(z)| = |u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + ... + u_{n+p}(z)| < \varepsilon$.

Множество точек z, в которых функциональный ряд сходится, называется **областью сходимости функционального ряда.**

Примеры

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ сходится на всей комплексной плоскости. Проверим это. Исследуем ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}$. Так как это числовой знакоположительный ряд, применим к нему признак Даламбера. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}n!}{|z|^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0\,(<1\;\forall z)$. Ряд абсолютно сходится во всей комплексной плоскости.

2. Ряд $\sum_{m=1}^{\infty}(z-i)^n n!$ сходится только в точке $z=i$. Проверьте это.

3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}$ абсолютно сходится в круге $|z-1|<3$, проверьте это по признаку Даламбера или радикальному признаку Коши. На окружности $|z-1|=3$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z-1|^n}{3^n}$ превращается в ряд из единиц, расходящийся, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда.

4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n n^2}$ абсолютно сходится в круге $|z-1|<3$, проверьте это по признаку Даламбера или радикальному признаку Коши. На окружности $|z-1|=3$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z-1|^n}{3^n n^2}$ превращается в сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n\,3^n}$ абсолютно сходится в круге $|z-1|<3$, проверьте это по признаку Даламбера или радикальному признаку Коши. Исследуем сходимость на окружности $|z-1|=3$ в различных ее точках. В точке $z=4$ имеем расходящийся гармонический ряд. В точке $z=-2$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Это – условно сходящийся ряд (по признаку Лейбница). В точке $z=1+3i$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{n}$. Этот ряд рассмотрен выше, он сходится условно. В точке $z=1-3i$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n}$. Он тоже сходится условно, так как условно сходятся ряды из действительных и мнимых частей.

Функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty}u_n(z)$ ***сходится равномерно в области G*** если $\forall\varepsilon>0\;\exists N(\varepsilon),\forall z\in G,\;\forall n>N\Rightarrow|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon$. Это – **равномерная** сходимость функционального ряда в области G, заметим, что N зависит только от ε, как в числовых рядах, поэтому ряд сходится с одной и той же скоростью в различных точках z области G.

Критерий Коши (равномерной сходимости ряда). Для того чтобы функциональный ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(z)$ сходился равномерно в области G, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N, \forall z \in G, \forall p \geq 0 \Rightarrow \left|S_{n+p}(z) - S_n(z)\right| = \left|u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots + u_{n+p}(z)\right| < \varepsilon$.

Для равномерно сходящихся функциональных рядов функций комплексной переменной справедливы теоремы о непрерывности суммы ряда, о почленном интегрировании и почленном дифференцировании. *Формулировки этих теорем и доказательства идентичны теоремам о равномерно сходящихся рядах функций действительного переменного*. Разница лишь в различном понимании модуля действительного и комплексного числа и в том, что интегрирование проводится по кусочно-гладкой дуге..

Аналогично формулируется и доказывается и признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.

Признак Вейерштрасса. Пусть члены функционального ряда $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(z)$ мажорируются членами сходящегося числового ряда в некоторой области G $\left(\forall z \in G, \left|u_n(z)\right| \leq c_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty\right)$. Тогда функциональный ряд сходится равномерно в области G.

Доказательство. Для сходящегося числового знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ выполнен критерий Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N, \forall p > 0\ \left|c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p}\right| = c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$.

Так как $\left|u_n\right| \leq c_n$ (по свойствам сходящихся числовых рядов можно считать, что неравенство выполняется, начиная с первого номера, т.е. для всех n), поэтому для функционального ряда выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon), \forall n > N, \forall z \in G, \forall p \geq 0 \Rightarrow \left|u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots + u_{n+p}(z)\right| \leq \left|u_{n+1}\right| + \ldots + \left|u_{n+p}\right| \leq$$
$$\leq c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$$

Следовательно, функциональный ряд сходится равномерно в области G.

Степенные ряды.

Степенные ряды $\sum_{m=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ - это частный случай функциональных рядов, в котором члены ряда представляют собой степени отклонения переменной z от некоторой фиксированной точки плоскости z_0 (центра сходимости ряда). Степенные ряды действительной переменной сходятся в интервале $\left|x - x_0\right| < R$, где R - радиус сходимости ряда. Точно так же степенной ряд комплексной переменной сходится на множестве $\left|z - z_0\right| < R$, только в комплексных числах это множество представляет собой круг без границы. Сходимость ряда на границе исследуется отдельно.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в круге $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ расходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он расходится во внешности круга $|z-z_0| > |z_1 - z_0|$.

Доказательство (аналогично случаю действительной переменной).

1) Пусть ряд сходится в точке $z_1 \neq z_0$ и $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$.

Так как ряд сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то по необходимому признаку сходимости ряда $c_n (z_1 - z_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow |c_n||z_1 - z_0|^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon), \forall n > N \; \left|c_n (z_1 - z_0)^n\right| < \varepsilon$.

Исследуем степенной ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд из модулей членов ряда. $\sum_{n=0}^{\infty} \left|c_n (z-z_0)^n\right|$ Оценим общий член ряда из модулей.

$$\left|c_n (z-z_0)^n\right| = \left|c_n \frac{(z-z_0)^n}{(z_1-z_0)^n}(z_1-z_0)^n\right| \le \left|c_n (z_1-z_0)^n\right| \frac{|z-z_0|^n}{|z_1-z_0|^n} \le \varepsilon\, q^n,\ \text{где}\ 0 < q = \frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} < 1.$$

Ряд из модулей исходного ряда сходится по первому признаку сравнения числовых рядов (ряд сравнения – сходящаяся бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon\, q^n, 0 < q < 1$). Следовательно, исходный ряд в области $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ *сходится абсолютно.*

Замечание. Казалось бы, что из признака Вейерштрасса в области $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ следует равномерная сходимость исходного ряда, но здесь $q = q(z)$, а в признаке Вейерштрасса требуется указать один мажорирующий ряд для всех точек z рассматриваемой области, то есть q не должно зависеть от z. Поэтому равномерную сходимость ряда в области $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ утверждать нельзя. Однако если взять $\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} < q_1 < 1$ (q_1 не зависит от z), то в области $|z-z_0| < q_1|z_1 - z_0|$ степенной ряд будет сходиться равномерно по признаку Вейерштрасса.

2) Пусть ряд расходится в точке $z_1 \neq z_0$ и $|z-z_0| > |z_1 - z_0|$.

Если ряд сходится в точке z, то по доказанному в пункте 1), он должен абсолютно сходиться в точке z_1, следовательно, сходиться в точке $z_1 \neq z_0$. Это противоречит тому, что исходный ряд расходится в точке $z_1 \neq z_0$, следовательно исходный ряд расходится в области $|z-z_0| > |z_1 - z_0|$.

Определение радиуса сходимости и исследование сходимости ряда на границе круга сходимости.

Рассмотрим *монотонно убывающую* последовательность $\{|z_k - z_0|\}$, такую, что в точке z_k степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_k - z_0)^n$ *расходится*. Если выбрать $z_k = z_0$, то степенной ряд будет сходиться (ряд из нулей), поэтому рассматриваемая последовательность ограничена снизу нулем. По теореме Вейерштрасса монотонно убывающая, ограниченная снизу числовая последовательность имеет предел. То есть $\exists R = \lim_{k\to\infty} |z_k - z_0|$.

Такое число R называется **радиусом сходимости степенного ряда.** Следовательно, **степенной ряд абсолютно сходится в круге $|z - z_0| < R$ сходимости степенного ряда.**

Теорема. Степенной ряд равномерно сходится внутри круга сходимости.

Доказательство. Пусть $|z - z_0| < R_1 < R$. Выберем $R_2 : R_1 < R_2 < R$, например $R_2 = \frac{1}{2}(R_1 + R)$. На окружности $|z_1 - z_0| = R_2$ степенной ряд сходится абсолютно, так как эта окружность лежит внутри круга сходимости. Тогда $\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} = \frac{R_1}{R_2} < 1$ ($\frac{R_1}{R_2}$ не зависит от z), тогда в области $|z - z_0| < \frac{R_1}{R_2}|z_1 - z_0| = R_1$ степенной ряд будет сходиться равномерно по признаку Вейерштрасса (замечание в доказательстве теоремы Абеля).

Следствие. Внутри круга сходимости справедливы теоремы о непрерывности суммы ряда, о почленном интегрировании (по любой кусочно-гладкой дуге, принадлежащей кругу сходимости) и дифференцировании ряда.

Теорема. При почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда его радиус сходимости не меняется.

Доказательство. Рассмотрим ряд из модулей членов степенного ряда (это – знакоположительный числовой ряд в конкретной точке) и определим радиус сходимости по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}||z - z_0|^{n+1}}{|c_n||z - z_0|^n} = |z - z_0| \lim \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}}.$$

Продифференцируем почленно степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^n$, перейдем к ряду из модулей и найдем радиус сходимости по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|c_{n+1}||z - z_0|^{n+1}}{n|c_n||z - z_0|^n} = |z - z_0| \lim \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}}.$$

Таким образом, при почленном дифференцировании радиус сходимости степенного ряда не меняется. Он не меняется и при почленном интегрировании, иначе он изменился бы при почленном дифференцировании.

Исследуем сходимость степенного ряда на границе круга сходимости.

Рассмотрим ряд из модулей на границе круга сходимости $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|R^n$.

1) *Если ряд из модулей на границе круга сходимости сходится, то исходный степенной ряд абсолютно сходится на всей границе.*
   В самом деле этот ряд является мажорантным для степенного ряда в любой точке границы.
2) *Если* $\lim_{n\to\infty}|c_n|R^n \neq 0$*, то исходный степенной ряд расходится на всей границе.*
   В этом случае $\lim_{n\to\infty} c_n(z-z_0)^n \neq 0, |z-z_0| = R$, и не выполняется необходимый признак сходимости для исходного степенного ряда на всей границе круга сходимости. Поэтому *исходный степенной ряд расходится на всей границе.*
3) Если ряд из модулей на границе круга сходимости расходится, но $\lim_{n\to\infty}|c_n|R^n = 0$, то исходный степенной ряд сходится в одних точках границе и расходится в других. В этом случае для того, чтобы исследовать сходимость в точке границы, надо подставить ее в качестве z в степенной ряд и исследовать сходимость полученного числового ряда.

Приведенные выше примеры 3, 4, 5 (после критерия Коши): ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^n n^2}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n\,3^n}$ иллюстрируют все три случая. Первый ряд расходится на всей границе $|z-1| = 3$, так как на ней не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Второй ряд сходится на всей границе, третий ряд сходится в одних точках границы и расходится в других.

Теорема. Сумма степенного ряда является аналитической функцией в его круге сходимости (без доказательства).

Ряд Тейлора.

Рядом Тейлора называется степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ (предполагается, что функция $f(z)$ является бесконечно дифференцируемой).

Рядом Маклорена называется ряд Тейлора при $z_0 = 0$, то есть ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$.

Теорема. Степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ и степенной ряд сходится в круге $|z-z_0| < R$. Подставим в разложение $z = z_0$, получим $f(z_0) = c_0$.

Так как сумма степенного ряда – функция аналитическая, мы можем дифференцировать функцию, а так как степенной ряд сходится равномерно внутри круга сходимости, мы можем его дифференцировать почленно. Полученный ряд будет сходиться в том же круге, так как радиус сходимости при дифференцировании не меняется. Поэтому сумма этого ряда $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n(z-z_0)^{n-1}$ будет фунцией аналитической в том же круге. Ее вновь можно дифференцировать, дифференцируя почленно степенной ряд и т.д. Отсюда следует, что если **аналитическая функция** является суммой степенного ряда (это будет показано позже), то она **является бесконечно дифференцируемой функцией.** Вычислим коэффициенты в степенных рядах, полученных почленным дифференцированием. $f'(z_0)=c_1$,

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2}, \; f''(z_0)=2\,1\,c_2, \; c_2=\frac{f''(z_0)}{2!},$$

$$f'''(z)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n(z-z_0)^{n-3}, \; f'''(z_0)=3\,2\,1\,c_3, \; c_3=\frac{f'''(z_0)}{3!},$$

Продолжая этот процесс, получим $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Это – коэффициенты ряда Тейлора.

Запишем разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций.

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$shz=z+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$chz=1+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Так как эти формулы справедливы на всей действительной оси, то по теореме Абеля они справедливы и на всей комплексной плоскости (в круге с началом координат бесконечного радиуса).

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \; |z|<1.$$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \; |z|<1.$$

$\ln(1+z)=-\dfrac{z^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n}\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n}$, $|z|<1$ (интегрируя предыдущую формулу)

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\ldots$$

$|z|<1, \; \alpha\in R\setminus N$

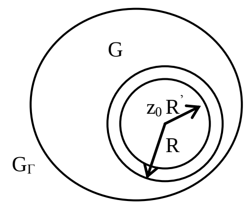
Лекция 8.
Теоремы Тейлора и Лорана

Теорема о разложении аналитической функции в степенной ряд (теорема Тейлора).

Пусть функция $f(z)$ *- аналитическая в односвязной области* G *с кусочно-гладкой границей* $G_Г$, $z_0 \in Int(G)$. *Тогда функция* $f(z)$ *разлагается в степенной ряд по степеням* $(z-z_0)$ *в круге* $|z-z_0| < R = \rho(z_0, G_Г)$ *(расстояние от точки до границы области).*

Доказательство. Точка z_0 лежит внутри G, поэтому можно выбрать $R' < R,$ *что круг* $|z-z_0| < R'$ целиком лежит в области

Пусть точка z принадлежит кругу $|z-z_0| < R'$. По интегральной формуле Коши $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R}\dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma, \varsigma \in \gamma_R, |\varsigma - z| = R$



Разложим $\dfrac{1}{\varsigma - z}$ в ряд по степеням $(z-z_0)$.

$$\frac{1}{\varsigma - z} = \frac{1}{(\varsigma - z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{\varsigma - z_0}\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\varsigma - z_0}} = \frac{1}{\varsigma - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^n}.$$

Так как $|z-z_0| < R', |\varsigma - z_0| = R, R' < R$, то полученный ряд мажорируется сходящейся бесконечно убывающей геометрической прогрессией $\dfrac{1}{R}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(R')^n}{R^n}$ и равномерно сходится по признаку Вейерштрасса в круге $|z-z_0| < R'$.

Функция $f(\varsigma)$ - аналитическая в G и на $\gamma_R : |\varsigma - z_0| = R$, следовательно, она непрерывна и ограничена на γ_R. То есть $\exists M, |f(\varsigma)| < M$ на γ_R.

Умножим полученный ряд на непрерывную ограниченную функцию $f(\varsigma)$.

$\dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} = \dfrac{1}{\varsigma - z_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f(\varsigma)(z-z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^n}$. Этот ряд мажорируется сходящейся бесконечно убывающей геометрической прогрессией $\dfrac{1}{R}\sum\limits_{n=0}^{\infty}M\dfrac{(R')^n}{R^n}$ и равномерно сходится по признаку Вейерштрасса в круге $|z-z_0| < R'$. Следовательно, его можно почленно интегрировать, получая сходящийся ряд.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma, = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}d\varsigma\right)(z-z_0)^n =$$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, где коэффициенты ряда Тейлора равны $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R}\dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}}d\varsigma =$

$= \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. В самом деле, по следствию из интегральной формулы Коши

$f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}d\varsigma$. Заметим, что точно так же записывался ряд Тейлора для функции действительной переменной: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$. Таким образом, показано, что функция, аналитическая в круге, разлагается в нем в сходящийся степенной ряд. Это разложение единственно и оказывается *рядом Тейлора* для данной функции. Коэффициенты разложения вычисляются однозначно по формулам $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R}\dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}d\varsigma=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Неравенства Коши.

$$|c_n|=\frac{1}{|2\pi i|}\left|\oint\limits_{\gamma_R}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}d\varsigma\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\gamma_R}\frac{|f(\varsigma)|}{|\varsigma-z_0|^{n+1}}dl\le\frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R=\frac{M}{R^n},\text{ где}$$

$M=\max_{\gamma_R}|f(z)|$. Таким образом, справедливы **неравенства Коши** для коэффициентов ряда Тейлора разложения функции в окрестности точки z_0 $|c_n|\le\dfrac{\max_{\gamma_R}|f(z)|}{R^n}$. По следствию из интегральной теоремы Коши для многосвязной области здесь R можно выбрать любым, лишь бы R не превышало расстояния от точки z_0 до границы области G.

Ряд Лорана.

Рядом Лорана называется ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.

Второе слагаемое представляет собой степенной ряд и, как всякий степенной ряд, сходится в круге $|z-z_0|<R$. Это слагаемое называется **правильной частью ряда Лорана** и является, как сумма степенного ряда аналитической функцией.

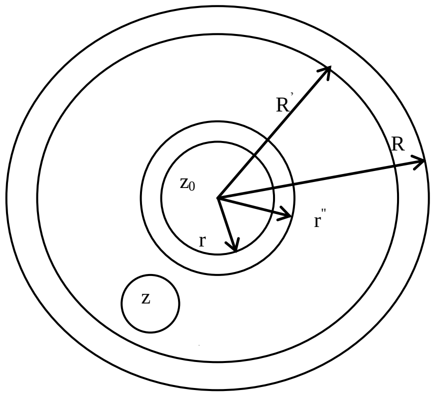
Первое слагаемое называется **главной частью ряда Лорана.** Делая в нем замену $\varsigma=\dfrac{1}{z-z_0}$, запишем главную часть в виде $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}c_nt^{-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}t^n$. Относительно переменной t это – степенной ряд, сходящийся в некотором круге $|t|<\dfrac{1}{r}$. Возвращаясь к переменной z, получим, что главная часть сходится во внешности круга, радиуса r:

$|z-z_0|=\dfrac{1}{|t|}>r$. Ряд Лорана сходится в области, представляющей собой пересечение областей сходимости правильной и главной частей. Поэтому *область сходимости ряда Лорана представляет собой круговое кольцо* $r<|z-z_0|<R$. Радиусы сходимости r, R определяются для степенных рядов обычным образом, сходимость на границах кольца также исследуется, как в степенных рядах. Кольцо может быть вырождено, представлять собой окружность, если r = R или пустое множество, если r > R.

Теорема Лорана.

Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $r < |z - z_0| < R$ и на его границе, *разлагается в нем в сходящийся ряд Лорана.*

Рассмотрим круговое кольцо $r < |z - z_0| < R$, построим внутри него еще одно круговое кольцо с радиусами r', R' так, что $r < r' < |z - z_0| < R' < R$. Рассмотрим произвольную точку z во внутреннем кольце, проведем из нее, как из центра окружность радиусом ρ так, чтобы она лежала целиком внутри внутреннего кольца.



По теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{\gamma_R} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma + \oint_{\gamma_r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$$

По интегральной формуле Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$.

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

1) В *первом слагаемом* повторим все выкладки из доказательства теоремы Тейлора, считая $|z - z_0| < R', |\varsigma - z_0| = R,\ R' < R$.

$$\frac{1}{\varsigma - z} = \frac{1}{(\varsigma - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\varsigma - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\varsigma - z_0}} = \frac{1}{\varsigma - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^n}.$$

Так как $|z - z_0| = R', |\varsigma - z_0| = R, R' < R$, то полученный ряд мажорируется сходящейся бесконечно убывающей геометрической прогрессией $\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(R')^n}{R^n}$ и равномерно сходится по признаку Вейерштрасса в круге $|z - z_0| < R'$.

Функция $f(\varsigma)$ - аналитическая на $\gamma_R : |\varsigma - z_0| = R$, следовательно, она непрерывна и ограничена на γ_R. То есть $\exists M, |f(\varsigma)| < M_R$ на γ_R.

Умножим полученный ряд на непрерывную ограниченную функцию $f(\varsigma)$.

$\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} = \frac{1}{\varsigma - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\varsigma)(z - z_0)^n}{(\varsigma - z_0)^n}$. Этот ряд мажорируется сходящейся бесконечно убывающей геометрической прогрессией $\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} M_R \frac{(R')^n}{R^n}$ и равномерно сходится по признаку Вейерштрасса в круге $|z - z_0| < R'$. Следовательно, его можно почленно интегрировать, получая сходящийся ряд.

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma, = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\varsigma = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma \right) (z - z_0)^n =$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где коэффициенты ряда Тейлора равны

$c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R} \dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_K} \dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma$ (По следствию из теоремы Коши для многосвязной области интегрирование по γ_r можно заменить интегрированием по γ_K, $r' < K < R'$).

.

2) Рассмотрим второе слагаемое, полагая $|z - z_0| > r'$, $|\varsigma - z_0| = r$, $r' > r$.

$-\dfrac{1}{\varsigma - z} = \dfrac{1}{-(\varsigma - z_0) + (z - z_0)} = \dfrac{1}{z - z_0} \dfrac{1}{1 - \dfrac{\varsigma - z_0}{z - z_0}} = \dfrac{1}{z - z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\varsigma - z_0)^n}{(z - z_0)^n}$. Это справедливо, так как здесь $\dfrac{|\varsigma - z_0|}{|z - z_0|} < \dfrac{r}{r'} < 1$.

Функция $f(\varsigma)$ - аналитическая на $\gamma_r : |\varsigma - z_0| = r$, следовательно, она непрерывна и ограничена на γ_r. То есть $\exists M_r$, $|f(\varsigma)| < M_r$ на γ_r.

Умножим полученный ряд на непрерывную ограниченную функцию $f(\varsigma)$

$-\dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} = \dfrac{1}{z - z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f(\varsigma)(\varsigma - z_0)^n}{(z - z_0)^n}$. Этот ряд мажорируется сходящейся бесконечно

Этот ряд мажорируется сходящейся бесконечно убывающей геометрической прогрессией $\dfrac{1}{r'} \sum\limits_{n=0}^{\infty} M \dfrac{(r)^n}{(r')^n}$ и равномерно сходится по признаку Вейерштрасса во внешности круга $|z - z_0| > r'$. Следовательно, его можно почленно интегрировать, получая сходящийся ряд.

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma, = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{-n}} (z - z_0)^{-n-1} d\varsigma \Big|_{-m=-n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{-m+1}} d\varsigma \right) (z - z_0)^{-m} \Big|_{-m=n} =$$

$= \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \left(\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r} \dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma \right) (z - z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где коэффициенты ряда Тейлора равны $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r} \dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma . = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_K} \dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma$ (По следствию из теоремы Коши для многосвязной области интегрирование по γ_r можно заменить интегрированием по γ_K, $r' < K < R'$).

Складывая полученные разложения для двух слагаемых, получим разложение функции в ряд Лорана

$f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где коэффициенты ряда Лорана раны $c_n . = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_K} \dfrac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z_0)^{n+1}} d\varsigma$.

Для коэффициентов ряда Лорана аналогично выводятся **неравенства Коши** $|c_n| \le \dfrac{\max_{\gamma_K} |f(z)|}{K^n}$.

Лекция 8.
Особые точки функций комплексной переменной.

Правильная точка.

Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки z_0. Если существует комплексное число А, доопределяя которым функцию в самой точке, удается сделать функцию аналитической в окрестности точки z_0 (включая точку z_0), то точка z_0 называется **правильной** точкой функции $f(z)$. Если такого числа не существует, то точка z_0 называется **изолированной особой точкой** $f(z)$ (однозначного характера).

Если z_0 - правильная точка функции $f(z)$, то $\exists$ *конечный* $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

Теорема. *Для того чтобы z_0 была правильной точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f(z)$ была ограниченной в окрестности точки z_0.*

Доказательство. Необходимость. Если z_0 - правильная точка функции $f(z)$, то, доопределяя ее в точке z_0, сделаем функцию аналитической, следовательно, и непрерывной, (тогда $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$). Непрерывная функция является ограниченной в некоторой окрестности точки z_0.

Достаточность. Пусть функция $f(z)$- аналитическая в проколотой окрестности точки z_0 $0<|z-z_0|<\delta$ и ограничена в окрестности $|z-z_0|<\delta$.

Так как функция $f(z)$ аналитическая в круговом кольце $0<|z-z_0|<\delta$, то по теореме Лорана ее можно разложить в этом кольце в сходящийся ряд Лорана $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$. Справедливы неравенства Коши $|c_n| \le \dfrac{M}{\rho^n},\ 0<\rho<\delta,\ M=\max_{\gamma_\rho} |f(z)|$. Рассмотрим $c_n,\ n<0$. $|c_n| \le \dfrac{M}{\rho^n} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0$. Следовательно, $c_n=0,\ n<0$. Тогда ряд Лорана для функции $f(z)$ превращается в ряд Тейлора $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$. Доопределим функцию в точке z_0 $f(z_0)=c_0=\lim_{z\to z_0} f(z)$.Тогда функция $f(z)$ станет аналитической в окрестности $|z-z_0|<\delta$ как сумма степенного ряда. Поэтому точка z_0 - правильная точка функции $f(z)$.

Следствие. *Разложение функции в ряд Лорана в окрестности правильной точки представляет собой ряд Тейлора и не содержит членов с отрицательными степенями.*

Следствие.**Теорема Лиувилля.** *Любая целая, ограниченная во всей расширенной плоскости функция, есть константа.*

Доказательство. Целая функция содержит только положительные степени в ее разложении в ряд Лорана ($c_n=0,\ n<0$). Из неравенств Коши $|c_n| \le \dfrac{M}{\rho^n},\ 0<\rho<\delta,\ M=\max_{\gamma_\rho} |f(z)|$ при $n>0,\ \rho\to\infty$ будет $c_n=0,\ n>0$. Следовательно, $f(z)\equiv c_0 = const$.

Полюсы

Пусть не существует конечного предела $\lim_{z\to z_0} f(z)$. Если $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, то особая точка z_0 называется **полюсом** функции $f(z)$.

Связь полюсов и нулей.

Точка z_0 называется **нулем** функции $f(z)$, если $f(z_0)=0$.

Теорема. *Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы она была нулем функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть z_0 - полюс функции $f(z)$, тогда $f(z)$ аналитическая в $0<|z-z_0|<\delta$, а $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, то есть $\forall M>0\ \exists\delta(M), \forall z: |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)|>M \Rightarrow |\varphi(z)|=\dfrac{1}{|f(z)|}<\dfrac{1}{M}$

Тогда функция $\varphi(z)$ аналитическая в $0<|z-z_0|<\delta$ и ограничена в окрестности точки z_0. Поэтому точка z_0 - правильная точка функции $\varphi(z)$ и существует конечный $\lim_{z\to z_0} \varphi(z)$. В силу произвольности M $\lim_{z\to z_0} \varphi(z)$=0. z_0 - нуль функции $\varphi(z)$.

Достаточность. Пусть z_0 - нуль функции $\varphi(z)$ (z_0 - правильная точка функции $\varphi(z)$) и $\varphi(z)$ аналитическая в $|z-z_0|<\delta$.

Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: |z-z_0<\delta \Rightarrow |\varphi(z)|<\varepsilon \Rightarrow |f(z)|=\dfrac{1}{|\varphi(z)|}>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ и z_0 - полюс функции $f(z)$.

Примеры.

1. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$. Так как точки $z=0, z=1$ - нули функции $\dfrac{1}{f(z)}$, то точки $z=0, z=1$ полюсы функции $f(z)$.
2. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3}$. Так как $\lim_{z\to 0}\dfrac{z^3}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\dfrac{z^2}{1-\cos z}\lim_{z\to 0} z = 2\lim_{z\to 0} z = 0$, то $z=0$ - полюс функции $f(z)$.

Будем считать $f(z)$ аналитической в $0<|z-z_0|<\delta$

Точка z_0 называется **полюсом n–го порядка** функции $f(z)$, если $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}, \psi(z_0)\neq 0, \psi(z) - \textit{аналитическая в } z=z_0$.

Точка z_0 называется нулем **n–го порядка** функции $\varphi(z)$, если $\varphi(z)=(z-z_0)^n\lambda(z)$, $\lambda(z_0)\neq 0, \lambda(z) - \textit{аналитическая в } z=z_0$.

Пример. $f(z)=\dfrac{1}{z^5(z-1)^3(z-i)^2}$. Точка $z=0$ - полюс пятого порядка, $z=1$ - полюс третьего порядка, $z=i$ - полюс второго порядка..

Теорема. *Для того чтобы точка* z_0 *была полюсом функции* $f(z)$ *n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы она была нулем n-го порядка функции* $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка z_0 полюс функции $f(z)$ n-го порядка, тогда $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}$, $\psi(z_0)\neq 0$, $\psi(z)$ – *аналитическая в* $z=z_0$, $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=$

$(z-z_0)^n\lambda(z)$, где $\lambda(z)=\dfrac{1}{\psi(z)}$. Так как $\psi(z)$ - аналитическая в $z=z_0$ и $\psi(z_0)\neq 0$, то $\lambda(z)$ - аналитическая в $z=z_0$ и $\lambda(z_0)\neq 0$, поэтому точка z_0 - нуль n-го порядка функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Достаточность доказать самостоятельно (доказательство аналогично).

Теорема. *Для того чтобы точка* $z_0\neq\infty$ *была полюсом n-го порядка функции* $f(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы ее разложение в ряд Лорана по степеням* $z-z_0$ *не содержало степеней ниже (-n) и содержало слагаемое* $\dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$, $(c_{-n}\neq 0)$.

Доказательство. Необходимость. Если точка $z_0\neq\infty$ - полюс n-го порядка функции $f(z)$, то $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}$, $\psi(z_0)\neq 0$, $\psi(z)$ – *аналитическая в* $z=z_0$. Разложим аналитическую функцию $\psi(z)$ в ряд Тейлора $\psi(z)=\sum_{k=o}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$, $(\psi(z_0)=a_0\neq 0)$ по степеням $(z-z_0)$ и подставим разложение.

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}\sum_{k=o}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=\frac{a_0}{(z-z_0)^n}+\frac{a_1}{(z-z_0)^{n-1}}+\dots .\ a_0\neq 0.$$

Достаточность. Пусть $f(z)=\dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\dfrac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}}+..,\ (c_{-n}\neq 0)$. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}\left(c_{-n}+c_{-n+1}(z-z_0)+\dots\right)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n},$$ где $\psi(z_0)=c_{-n}\neq 0$, $\psi(z)$ - аналитическая в точке z_0 функция (как сумма степенного ряда). Поэтому z_0 - полюс n-го порядка функции $f(z)$.

Существенно особая точка.

Если вообще не существует $\lim_{z\to z_0}f(z)$, ни конечного, ни бесконечного, то особая точка z_0 называется **существенно особой точкой** функции $f(z)$.

Теорема. *Разложение функции в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки конечной плоскости* z_0 *содержит бесконечное количество отрицательных степеней* $(z-z_0)$.

Доказательство. Если разложение в ряд Лорана в окрестности особой точки конечной плоскости z_0 не содержит отрицательных степеней, то точка z_0 - правильная (доказанная выше теорема) - противоречие. Если разложение в ряд Лорана содержит конечное число отрицательных степеней, то точка z_0 - полюс (.доказанная выше теорема) - противоречие. Остается только вариант наличия в разложении бесконечного числа слагаемых с отрицательными степенями.

Теорема Сохоцкого. *Каково бы ни было число A, конечное или бесконечное, существует такая последовательность* $\{z_n\} \to z_0, z_0$*- существенно особая точка функции* $f(z)$*, что* $f\{z_n\} \to A$.

Доказательство. 1) Пусть A – конечное число. Предположим, что не существует последовательности, о которой идет речь в теореме. Тогда значения функции отделены от A, т.е. $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta(\varepsilon) > 0, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| > \varepsilon$. Рассмотрим функцию $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$.

Из предыдущей оценки следует, что в δ - окрестности точки z_0 $|\varphi(z)| < \dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\varphi(z)$ ограничена, следовательно, z_0- правильная точка функции $\varphi(z)$. Поэтому существует конечный предел $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = c$.

a) Пусть $c \neq 0$. Выразим $f(z)$ через $\varphi(z)$. $f(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)} + A$. Тогда $\lim_{z \to z_0} f(z) = \dfrac{1}{c} + A$ - конечное число. Следовательно, z_0- правильная точка функции $f(z)$ - противоречие.

b) Пусть $c = 0$. $\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(z)| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - A| = \dfrac{1}{|\varphi(z)|} > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Тогда $\lim_{z \to z_0} |f(z) - A| = \infty$, т.е. z_0 - полюс $f(z)$. Противоречие.

2) Пусть $A = \infty$. Надо доказать, что при $\{z_n\} \to z_0$ $\{f(z_n)\} \to \infty$. Пусть для любой последовательности $\{f(z_n)\}$ не стремится к бесконечно удаленной точке. Тогда для любой последовательности $\{z_n\} \to z_0$ $|f(z_n)| < M$, следовательно, функция $f(z)$ ограничена в окрестности z_0, тогда z_0 - правильная точка $f(z)$ - противоречие.

Классификация особой точки z_0 (конечной плоскости) функции $f(z)$ по ее разложению в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Если разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 (по степеням $z - z_0$):

1. Не содержит отрицательных степеней, то z_0 - правильная точка $f(z)$.
2. Содержит конечное число отрицательных степеней, то z_0 - полюс $f(z)$, причем наинизшая отрицательная степень определяет порядок полюса.
3. Содержит бесконечное количество членов с отрицательными степенями, то z_0 - существенно особая точка $f(z)$.

Это следует из доказанных выше теорем.

Классификация бесконечно удаленной особой точки $z_0 = \infty$ функции $f(z)$ по ее разложению в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > R$ представляет собой ряд Лорана по степеням z: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, в котором *главная часть*, определяющая особенности функции, содержит *положительные степени,* а *правильная часть – отрицательные степени*.

Если разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > R$:

1 Не содержит положительных степеней, то $z_0 = \infty$ - правильная точка $f(z)$.

2 Содержит конечное число положительных степеней, то $z_0 = \infty$ - полюс $f(z)$, причем наивысшая положительная степень определяет порядок полюса.

3 Содержит бесконечное количество членов с положительными степенями, то $z_0 = \infty$ - существенно особая точка $f(z)$.

Примеры.

1 $f(z) = z^2$. Это и есть разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > R$, поэтому $z_0 = \infty$ - полюс $f(z)$ второго порядка.

2 $f(z) = e^z$. Разложение по степеням z: $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots$ справедливо в области $|z| > R$, т.е. в окрестности точки $z_0 = \infty$. Оно содержит бесконечное количество членов с положительными степенями, поэтому $z_0 = \infty$ - существенно особая точка $f(z)$.

3 $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Запишем разложение в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > 1$.

$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots$. Разложение не содержит положительных степеней z, поэтому точка $z_0 = \infty$ - правильная, точнее, нуль первого порядка.

4. $f(z) = (z-1)^2 \sin\frac{1}{z}$. Запишем разложение по степеням z в окрестности точки $z_0 = \infty$. $f(z) = \left(z^2 - 2z + 1\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right) = z - 2 + (1 - \frac{1}{3!})\frac{1}{z} + \ldots$

В разложении старшая положительная степень – первая, поэтому $z_0 = \infty$ - полюс первого порядка. Это же разложение справедливо в области $|z| < R$, поэтому оно является разложением в окрестности точки $z = 0$. В нем бесконечное количество отрицательных степеней, поэтому точка $z = 0$ - существенно особая.

Лекция 9.

Вычеты и их применение.

Вычетом функции f(z) в точке z_0 $\operatorname{Res}_{z_0} f(z)$ называется коэффициент c_{-1} при z^{-1} в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Эквивалентное определение: **вычетом** функции f(z) в точке z_0 $\operatorname{Res}_{z_0} f(z)$ называется $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz$. В самом деле, коэффициент ряда Лорана равен $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$. Поэтому $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz$.

Вычисление вычетов в точке z_0 конечной плоскости.

Для различных типов особых точек (правильная, полюс, существенно особая) различны алгоритмы вычисления вычетов функции в этих точках.

Если z_0 – **правильная особая точка**, то ряд Лорана превращается в ряд Тейлора, в котором нет отрицательных степеней $z - z_0$, поэтому $\operatorname{Res}_{z_0} f(z)$=0.

Если z_0 – **полюс первого порядка,** то разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит степеней $z - z_0$, ниже, чем –1 и содержит степень -1. Разложение выглядит так.

$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots \quad (c_{-1} \neq 0)$. Умножим обе части на $z - z_0$.

$f(z)(z-z_0) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \ldots$ Перейдем к пределу при $z \to z_0$, чтобы обратились в нуль все слагаемые в правой части, содержащие целые степени $z - z_0$.

$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$- **формула для вычета функции в полюсе первого порядка.**

В том случае, когда z_0 – **полюс первого порядка функции вида**

$f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \; (\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) \neq 0)$, можно получить удобную в вычислениях формулу для вычета.

$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) =$

$\lim_{z\to z_0} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}(z-z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\psi(z)}{\frac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}$ - **формула для вычета функции в полюсе первого порядка.** Здесь использованы условия $(\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) \neq 0)$.

Пример. Найти вычеты функции $\frac{1}{z^2+1}$ во всех особых точках конечной плоскости.

У функции два полюса первого порядка $z = i, z = -i$.

По первой формуле

$\operatorname{Res}_i f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z-i)(z+1)}(z-i) = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$

$$\operatorname{Re}s_{-i} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z-i)(z+1)}(z+i) = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2} \quad .$$

Применим вторую формулу

$$\varphi(z) = z^2 + 1, \quad \varphi'(z) = 2z, \quad \psi(z) = 1.\ \operatorname{Re}s_i f(z) = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2},\ \operatorname{Re}s_{-i} f(z) = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}.$$

В том случае, когда z_0 – **полюс n-го порядка,** то разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит степеней $z - z_0$, ниже, чем –n и содержит степень –n $(c_{-n} \neq 0)$. Разложение выглядит так.

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{c_{-n+2}}{(z-z_0)^{n-2}} + .. + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + ...$$

Умножим обе части на $(z-z_0)^n$.

$$f(z)(z-z_0)^n = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + c_{-n+2}(z-z_0)^2 + ... + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + ...$$

Уничтожим степень при коэффициенте c_{-1} дифференцированием, его надо провести $(n-1)$ раз. Получим

$$\frac{d^{n-1}\left(f(z)(z-z_0)^n\right)}{dz^{n-1}} = (n-1)!c_{-1} + n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2(z-z_0) + ...$$

Перейдем к пределу при $z \to z_0$. Все слагаемые в правой части, содержащие целые степени $z - z_0$ (второе, третье, четвертое и т.д.) обратятся в нуль. **Отсюда имеем формулу для вычета функции в полюсе n – ого порядка:**

$$\operatorname{Re}s_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(f(z)(z-z_0)^n\right)$$

Пример. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$. $z = 0$ - полюс 1 порядка, z = 1 – полюс 2 порядка.

$$\operatorname{Re}s_{z=0} f(z) = \frac{1}{(0-1)^2} = 1, \operatorname{Re}s_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1}\left(\frac{1}{z}\right)' = -1.$$

В том случае, когда точка z_0 - **существенно особая точка,** вычет в ней вычисляется единственным способом – непосредственным разложением функции в ряд Лорана и вычислением коэффициента при –1 степени.

Пример. $f(z) = \dfrac{1}{z-1}\sin\dfrac{1}{z}$.

Здесь $z = 0$ - существенно особая точка. Разложение в ряд Лорана в окрестности $z = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}.$$

$$= -\left(1 + z + z^2 + z^3 + ...\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - ...\right) = .. - \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - ...\right) + ...$$

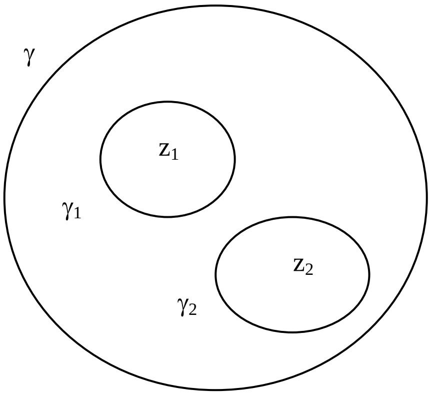
$$\operatorname{Re}s_{z=0} f(z) = -\sin 1.$$

Вычетом функции в бесконечно удаленной точке $(z = \infty)$ **называется коэффициент** $-c_{-1}$**,** (взятый со знаком минус коэффициент при –1 ой степени в разложении в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки).

Общая теорема о вычетах.

Пусть функция $f(z)$- аналитическая в области G и на ее границе – кусочно-гладком контуре γ за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1 ... z_n$, лежащих внутри области G.

Тогда $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$



Доказательство. По интегральной теореме Коши для многосвязной области $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz$. Вычислим интеграл $\oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz$. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_k и подставим в интеграл. По равномерной сходимости степенного ряда внутри круга сходимости, проведем почленное интегрирование и используем полученный ранее результат $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$.

$$\oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m_k} (z - z_k)^m dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m_k} \oint\limits_{\gamma_k} (z - z_k)^m dz = c_{-1_k} 2\pi i = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k} f(z).$$

Тогда $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$.

Теорема. *Сумма вычетов функции по всей расширенной плоскости равна нулю.*

Доказательство. Выберем контур γ так, чтобы все особые точки функции лежали внутри контура. Тогда при обходе контура в положительном направлении надо учитывать особые точки, попавшие внутрь контура, т.е. все особые точки конечной плоскости. По общей теореме о вычетах $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$. С другой стороны, при обходе контура в отрицательном направлении мы должны учитывать только бесконечно удаленную точку и интеграл получится тем же, но со знаком «минус» (свойство интеграла). Поэтому $-\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Re} z_{z=\infty} f(z)$. Складывая эти интегралы, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Следствие. Сумма вычетов функции по всей конечной плоскости равна вычету функции в бесконечно удаленной точке, взятому со знаком «минус».

Доказательство. По предыдущей теореме $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} s_{z_k} f(z) + \operatorname{Re} s_{z=\infty} f(z) = 0$. Отсюда $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} s_{z_k} f(z) = -\operatorname{Re} s_{z=\infty} f(z)$.

Пример. Вычислить $\oint\limits_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)^2} \sin \frac{1}{z} dz$

Подынтегральная функция имеет полюс второго порядка $z=1$ и существенно особую точку $z=0$. Вычислим вычеты в этих особых точках.

$$\operatorname{Re} s_{z=1} f(z) = \left(\sin \frac{1}{z} \right)' \Big|_{z=1} = -\frac{\cos \frac{1}{z}}{z^2} \Big|_{z=1} - \cos 1.$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана в окрестности $z=0$.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots \qquad \frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \left(1 + 2z + 3z^2 + \ldots\right)$$

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} \sin \frac{1}{z} = \left(1 + 2z + 3z^2 + \ldots\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} + \ldots \right) = \ldots \frac{1}{z} \left(1 - \frac{3}{3!} + \frac{5}{5!} - \ldots \right) + \ldots =$$

$$= \ldots \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \ldots \right) + \ldots$$

Следовательно $\operatorname{Re} s_{z=0} f(z) = \cos 1$. $\operatorname{Re} s_{z=\infty} f(z) = -\left(\operatorname{Re} s_{z=1} f(z) + \operatorname{Re} z_{z=0} f(z) \right) = 0$.

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{1}{(z-1)^2} \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i \left(-\cos 1 + \cos 1 \right) = 0.$$

Применение вычетов для вычисления несобственных интегралов.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z > 0$) за исключением конечного числа особых точек $z_1 \ldots . z_n$, лежащих в верхней полуплоскости непрерывна на действительной оси, удовлетворяет (при больших |z|) неравенству $|f(z)| \le \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, $M > 0, \delta > 0$. Тогда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} s_{z_k} f(z)$

Доказательство. Выберем контур γ полуокружностью C_R радиуса R, лежащей в верхней полуплоскости, с основанием – отрезком $[-R, R]$ действительной оси, R - достаточно велико, чтобы все особые точки лежали внутри контура. По общей теореме Коши о вычетах $\oint\limits_{\gamma} f(z) dz = \int_{=R}^{R} f(x) dx + \int\limits_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} s_{z_k} f(z)$

. Оценим $\left| \int\limits_{C_R} f(z) dz \right| \le \frac{\pi R M}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^{\delta}} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$. Поэтому $\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} f(z) dz = 0$.

Устремляя $R \to +\infty$, имеем $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} s_{z_k} f(z)$.

Пример. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$. Подынтегральная функция, рассматриваемая как функция комплексной переменной, имеет в верхней полуплоскости имеет полюс второго порядка $z=2i$. $\operatorname{Re}s_{z=2i}\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{\left(z+2i\right)^2}\right)=\frac{-2}{\left(z+2i\right)^3}\Big|_{я=2ш}\rangle=\frac{-2}{4^3 i^3}=\frac{-i}{32}$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=2\pi i\frac{-i}{32}=\frac{\pi}{16}$$

Лемма Жордана. *Пусть функция* $f(z)$ *- аналитическая в полуплоскости* ($\operatorname{Im} z\ge a$) *за исключением конечного числа особых точек*. Пусть $M(\rho)=\max_{z\in\gamma_\rho}\left|f(z)\right|\xrightarrow[\rho\to\infty]{}0$, где $\gamma_\rho=\left\{z,\left|z\right|=\rho,\operatorname{Im} z\ge a\right\}$. Тогда $\forall\lambda\in R,\lambda>0$ выполнено

$$\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{\gamma_\rho}f(z)e^{i\lambda z}dz=0.$$

Замечание. Применяя лемму Жордана к функции $f(iz)$, можно сформулировать лемму Жордана для полуплоскости $\operatorname{Re} z\le a$.

Пусть функция $f(z)$ *- аналитическая в полуплоскости* ($\operatorname{Re} z\le a$) *за исключением конечного числа особых точек*. Пусть $M(\rho)=\max_{z\in\gamma_\rho}\left|f(z)\right|\xrightarrow[\rho\to\infty]{}0$, где $\gamma_\rho=\left\{z,\left|z\right|=\rho,\operatorname{Re} z\le a\right\}$. Тогда $\forall\lambda\in R,\lambda>0$ выполнено

$$\lim_{\rho\to\infty}\int\limits_{\gamma_\rho}f(z)e^{\lambda z}dz=0.$$

Пример (стр. 214 задачника А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича, ч.2 1986).

Вычислить интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$. Эти интегралы являются мнимой и действительной частями интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx$, к которому применима лемма Жордана. Подынтегральная функция, как функция комплексной переменной, имеет в в верхней полуплоскости один полюс $z_0=1+3i$. Вычисляя вычет и применяя общую теорему о вычетах, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2-2x+10}dx=\frac{\pi}{3}(1+3i)e^{-3+i}=\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1)+\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1+\sin 1).$$

Поэтому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx=\frac{\pi}{3}e^{-3}(3\cos 1+\sin 1)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx=\frac{\pi}{3}e^{-3}(\cos 1-3\sin 1)$.

Часть 3. Операционное исчисление

Лекция 1

Преобразование Лапласа, таблица изображений.

Преобразование Лапласа – это интегральное преобразование, при котором функция $f(t)$ действительной переменной t преобразуется в функцию $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\omega$ по формуле $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = L(f(t))$.

Функция $f(t)$ называется прообразом или **оригиналом**, функция $F(p)$ называется образом или **изображением (по Лапласу)**. Принято обозначать соответствие оригинала и изображения $f(t) \sim F(p)$.

Не всякая функция $f(t)$ может быть оригиналом, она должна удовлетворять определенным требованиям.

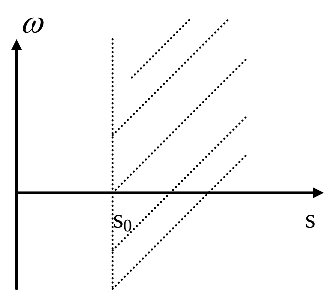
Требования, предъявляемые к оригиналу.

1. *Условия Дирихле.*
   - На любом конечном интервале изменения аргумента функция $f(t)$ может иметь не более конечного числа точек разрыва и не более конечного числа точек экстремума.
   - Допустимы только разрывы первого рода, разрывы второго рода не допускаются.
2. *Условие физической реализуемости.* $f(t) \equiv 0$ *при* $t < 0$.
3. *Функция* $f(t)$ *не может расти быстрее экспоненты.* $\exists M, s_0, |f(t)| < Me^{s_0 t}, s_0$ *– показатель роста*.

В операционном исчислении для обеспечения физической реализуемости любая функция умножается на функцию Хевисайда $1(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ - «единичный скачок» или единичную функцию. Это подразумевается, то есть всегда $f(t) = f(t)1(t)$.

Теорема. Изображение определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Доказательство. (Аналитичность – без доказательства)



Вычислим

$$\left|e^{-pt}\right| = \left|e^{-(s+i\omega t)}\right| = e^{-st}\left|e^{-i\omega t}\right| = e^{-st}\left|\cos\omega t + i\sin\omega t\right| = e^{-st}\sqrt{\cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = e^{-st}.$$

Из 3 требования к оригиналу $|f(t)| < Me^{s_0 t}$.

Оценим

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)|\left|e^{-pt}\right|dt \le M\int_0^\infty e^{s_0 t}e^{-st}dt = M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt$$

$$= \frac{M}{s-s_0} e^{-(s-s_0)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{M}{s-s_0}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-(s-s_0)t} - 1\right) = \frac{M}{s-s_0}, \text{ так как } \operatorname{Re} p = s > s_0.$$

Следствие. Если $F(p)$*- изображение, то* $\lim_{s\to\infty} F(p) = 0$

Доказательство. $|F(p)| \le \dfrac{M}{s-s_0} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$, *так как* $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Найдем **изображения по Лапласу единичной функции и экспоненты**.

$$L(1(t)) = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p} \quad (\operatorname{Re} p = s > 0).\ 1(t) \sim \frac{1}{p}.$$

$$L\left(e^{\alpha t}\right) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{1}{p-\alpha} \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha).\ e^{\alpha t} \sim \frac{1}{p-\alpha}$$

Свойства преобразования Лапласа $L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ **(простейшие теоремы).**

Линейность $L(f(t)+g(t)) = F(p)+G(p)$, $L(\lambda f(t)) = \lambda F(p)$ (здесь $F(p) = L(f(t))$, $G(p) = L(g(t))$). Докажите самостоятельно, опираясь на свойство линейности интеграла.

Следствие. $L\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k(p)$.

Пример. Найдем **изображения по Лапласу тригонометрических и гиперболических синуса и косинуса.**

$$e^{t} \sim \frac{1}{p-1}, \quad e^{-t} \sim \frac{1}{p+1}, \quad e^{it} \sim \frac{1}{p-i}, \quad e^{-it} \sim \frac{1}{p+i}$$

$$cht = \frac{1}{2}\left(e^{t} + e^{-t}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^2-1}, \quad sht = \frac{1}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1}$$

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}, \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \sim \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p^2+1}$$

Теорема подобия. $f(\alpha t) \sim \dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right)$.

Доказательство.

$$L(f(\alpha t)) = \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-\frac{p}{\alpha}(\alpha t)} \frac{1}{\alpha} d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\left(\frac{p}{\alpha}\right)\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Примеры. $\sin\alpha t \sim \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1} = \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, $\cos\alpha t \sim \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2+1} = \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$**,**

$$sh\alpha t \sim \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2-1}=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}, \quad ch\alpha t \sim \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2-1}=\frac{p}{p^2-\alpha^2}.$$

Теорема смещения. $f(t)e^{\lambda t} \sim F(p-\lambda)$.

Доказательство. $L\left(f(t)e^{\lambda t}\right)=\int_0^\infty f(t)e^{\lambda t}e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-\lambda)t}dt=F(p-\lambda)$

Здесь $\operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\lambda + s_0$ по теореме об области определения изображения.

Примеры. $e^{\lambda t}\sin\alpha t \sim \frac{\alpha}{(p-\lambda)^2+\alpha^2}$, $\quad e^{\lambda t}\cos\alpha t \sim \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\alpha^2}$,

$e^{\lambda t}sh\alpha t \sim \frac{\alpha}{(p-\lambda)^2-\alpha^2}$, $\quad e^{\lambda t}ch\alpha t \sim \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-\alpha^2}$,

Заданы изображения найти оригиналы $f(t) \sim F(p)$.

$$F(p)=\frac{3p+4}{p^2+10p+29}$$

$$F(p)=\frac{3p+4}{p^2+10p+29}=\frac{3p+4}{(p+5)^2+2^2}=3\frac{p+5}{(p+5)^2+2^2}-\frac{11}{2}\frac{2}{(p+5)^2+2^2}$$

$$\sim 3e^{-5t}\cos 2t-\frac{11}{2}e^{-5t}\sin 2t=e^{-5t}\left(3\cos 2t-\frac{11}{2}\sin 2t\right).$$

$$F(p)=\frac{p+1}{p^2-4p+3}$$

$$F(p)=\frac{p+1}{p^2-4p+3}=\frac{p+1}{(p-1)(p-3)}=\frac{\frac{3}{2}}{p-3}+\frac{-\frac{1}{2}}{p-1}\sim\frac{3}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{t}.$$

Теоремы о дифференцировании и интегрировании.

Теорема о дифференцировании оригинала.
Пусть $f'(t)$*- оригинал. Тогда* $f'(t) \sim pF(p)-f(+0)$.

Доказательство.

$$L(f'(t))=\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f(t)d\left(e^{-pt}\right)=\lim_{t\to+\infty}f(t)e^{-pt}-\lim_{t\to+0}f(t)e^{-pt}+pF(p)=$$

$=pF(p)-f(+0)$, так как $\lim_{t\to+\infty}f(t)e^{-pt}=0$ *при* $\operatorname{Re}p=s>s_0$.

Следствие. Если $f^{(n)}(t)$ - оригинал, то
$$f^{(n)}(t)\sim p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\ldots-pf^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0).$$

Доказательство. $L\left(f^{(n)}(t)\right)=L\left(\left(f^{(n-1)}(t)\right)'\right)=pL\left(f^{(n-1)}(t)\right)-f^{(n-1)}(+0)=$

$$p\left(pL\left(f^{(n-2)}(t)\right)-f^{(n-2)}(+0)\right)-f^{(n-1)}(+0)=p\left(p\left(pL\left(f^{(n-3)}(t)\right)-f^{(n-3)}(+0)\right)-f^{(n-2)}(+0)\right)-f^{(n-1)}(+0)=$$

$$\ldots=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)-\ldots-pf^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0).$$

Например, $f''(t) \sim p^2F(p) - pf(+0) - f'(+0)$.

Теоремы о начальном и конечном значениях.

Теорема о конечном значении. $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$.

Доказательство. $L(f'(t)) = \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0)$ (теорема о дифференцировании оригинала). Перейдем к пределу при $p \to 0$.

Предел левой части $\lim_{p\to 0}\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f'(t)dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - \lim_{t\to +0} f(t)$,

Предел правой части $\lim_{p\to 0} pF(p) - \lim_{t\to +0} f(t)$. Приравнивая эти выражения, получим $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$.

Теорема о начальном значении. $\lim_{t\to +0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$.

Доказательство. $L(f'(t)) = \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(+0)$ (теорема о дифференцировании оригинала). $f'(t)$ - оригинал, поэтому $\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty} L(f'(t)) = 0$. Поэтому $\lim_{\operatorname{Re} p\to\infty} pF(p) = f(+0) = \lim_{t\to +0} f(t)$.

Теорема об интегрировании оригинала. $\int\limits_0^t f(t)dt \sim \dfrac{F(p)}{p}$.

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(t)dt$. Это – оригинал (проверьте требования к оригиналу). $\varphi(0) = 0$. Обозначим $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала $f(t) = \varphi'(t) \sim L(\varphi'(t)) = p\Phi(p) - \varphi(0) = F(p)$. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Следовательно, $\int\limits_0^t f(t)dt \sim \dfrac{F(p)}{p}$.

Пример. $t^n \sim \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

$$1(t) \sim \frac{1}{p}, \quad t = \int\limits_0^t 1(t)dt \sim \frac{1}{p^2}, \quad t^2 = 2\int\limits_0^t tdt \sim \frac{2}{p^3}, \quad t^3 = 3\int\limits_0^t t^2dt \sim \frac{3\cdot 2}{p^4}, \ldots\ t^n \sim \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Теорема о дифференцировании изображения. $-tf(t) \sim F'(p)$.

Доказательство. $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$. Дифференцируем обе части по p.

$F'(p) = \int\limits_0^\infty -tf(t)e^{-pt}dt$. Тогда $-tf(t) \sim F'(p)$.

Пример. Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)^2}$.

$\sin t\sim\dfrac{1}{p^2+1},\quad t\sin t\sim-\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)'=\dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)}$. Поэтому $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)^2}\sim\dfrac{t}{2}\sin t$.

Пример. Найти изображение функции t^2e^t двумя способами.

1) $t^2\sim\dfrac{2}{p^3}$. По теореме смещения $t^2e^t\sim\dfrac{2}{(p-1)^3}$.

2) $e^t\sim\dfrac{1}{p-1}$. Дважды применим теорему о дифференцировании изображения: $-te^t\sim-\dfrac{1}{(p-1)^2}$, $t^2e^t\sim\dfrac{2}{(p-1)^3}$.

Теорема об интегрировании изображения. Если $\dfrac{f(t)}{t}$ - оригинал, то $\dfrac{f(t)}{t}\sim\int\limits_p^\infty F(p)dp$.

Доказательство. Обозначим $\varphi(t)=\dfrac{f(t)}{t},\quad L(\varphi(t))=\Phi(p)$. Тогда $f(t)=t\varphi(t)$.

По теореме о дифференцировании изображения $f(t)=t\varphi(t)\sim-\Phi'(p)$. Но $f(t)\sim F(p)$. Поэтому $-\Phi'(p)=F(p)$, $\int\limits_p^\infty F(p)dp=-\int\limits_p^\infty\Phi'(p)dp=-\left(\lim_{p\to\infty}\Phi(p)-\Phi(p)\right)=$ $=\Phi(p)$, так как $\lim_{p\to\infty}\Phi(p)=0,\left(\Phi(p)-\textit{изображение}\right)$.

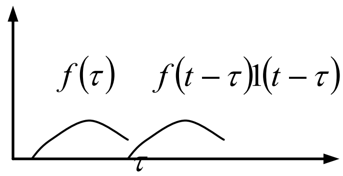
Пример. $L\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)=\int\limits_p^\infty\dfrac{dp}{p^2+1}=arctgp\Big|_p^\infty=\dfrac{\pi}{2}-arctgp$.

Лекция 2.

Теоремы запаздывания и свертки.

Теорема запаздывания. $f(t-\tau)1(t-\tau) \sim e^{-p\tau}F(p)$

Здесь $f(t-\tau)1(t-\tau)$ - функция $f(t)$, удовлетворяющая условию физической реализуемости и смещенная по оси времени вправо на $\tau > 0$ - «запаздывающая функция».



Доказательство . Заметим, что $f(t-\tau)1(t-\tau)$=0 при $t<\tau$, $1(t-\tau)=1$ *при* $t>\tau$.

$$L(f(t-\tau)1(t-\tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau)1(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-p(t-\tau)}e^{-p\tau}dt = (\text{замена } t-\tau = z)$$

$$= e^{-p\tau}\int_0^\infty f(z)dz = e^{-p\tau}F(p).$$

Изображение периодической функции.

Пусть функция $f(t)$- периодическая с периодом Т. Обозначим $f_0(t) = \begin{cases} f(t), t\in[0,T] \\ 0, t\notin[0,T] \end{cases}$.

Вычислим $L(f_0(t)) = F_0(p) = \int_0^T f(t)e^{--pt}dt$. Представим функцию $f(t)$ в виде

$f(t) = f_0(t)1(t) + f_0(t-T)1(t-T) + f_0(t-2T)1(t-2T) + \dots$ и применим теорему запаздывания

$$F(p) = F_0(p) + e^{-pT}F_0(p) + e^{-2pT}F_0(p) + \dots = F_0(p)(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}.$$

Примеры.

1) Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p^2+4}$.

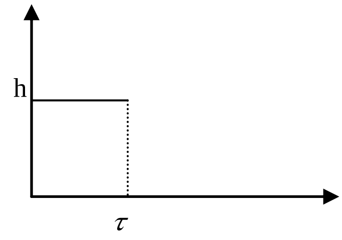
$\sin 2t \sim \dfrac{2}{p^2+4}$. По теореме запаздывания $\dfrac{1}{2}\sin 2(t-2)1(t-2) \sim \dfrac{e^{-2p}}{p^2+4}$.

2) Найти изображение периодической функции с периодом Т. $f(t) = e^{-t}, t\in[0,T]$

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}},\ F_0(p) = \int_0^T e^{-t}e^{-pt}dt = \int_0^T e^{-(p+1)t}dt = \frac{1-e^{-(p+1)T}}{p+1}$$

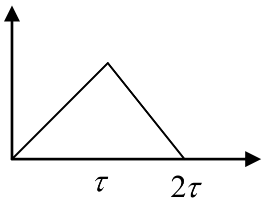
Изображения элементарных импульсов.

Прямоугольный импульс.



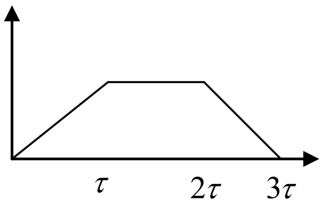
$$f(t) = h(t) - h(t-\tau)$$
$$F(p) = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right)$$

Треугольный импульс.



$$f(t) = \frac{h}{\tau}\left(t - 2(t-\tau) + (t - 2\tau)\right)$$
$$F(p) = \frac{h}{\tau\, p^2}\left(1 - 2e^{-p\tau} + e^{-2p\tau}\right)$$

Трапецеидальный импульс



$$f(t) = \frac{h}{\tau}\left(t - (t-\tau) - (t-2\tau) + (t - 3\tau)\right)$$
$$F(p) = \frac{h}{\tau\, p^2}\left(1 - e^{-p\tau} - e^{-2p\tau} + e^{-3p\tau}\right)$$

Синусоидальный импульс

$$f(t) = \begin{cases} \sin t,\ t \in [0,\pi] \\ 0,\ t \notin [0,\pi] \end{cases}$$

$$f(t) = \sin t\, 1(t) + \sin(t-\tau) 1(t-\tau)$$
$$F(p) = \frac{1}{p^2+1}\left(1 + e^{-p\tau}\right)$$

Свертка.

Сверткой $f(t) * \varphi(t)$ двух функций называется интеграл $f(t) * \varphi(t) = \int\limits_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$.

Свойства свертки.

1. **Коммутативность.** $f * \varphi = \varphi * f$

$$\varphi * f = \int\limits_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau = (\text{замена } v = t - \tau) = -\int\limits_t^0 \varphi(v) f(t-v) dv = \int\limits_0^t f(t-v)\varphi(v) dv = f * \varphi$$

2. **Ассоциативность.**
$f * (\varphi * \psi) = (f * \varphi) * \psi$ **(**доказательство громоздко, см. его в учебнике т.X1).

3. $f * \varphi$ **- оригинал, если** f, φ **- оригиналы.**

Самостоятельно проверьте первые два требования к оригиналу. Проверим третье требование.
Пусть $\left|f(t)\right| < M_1 e^{s_1 t}$, $\left|\varphi(t)\right| < M_2 e^{s_2 t}$. Обозначим $M = M_1 M_2$, $s = \max(s_1, s_2) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

$$\left|f * \varphi\right| = \left|\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right| \le \int_0^t \left|f(t-\tau)\right|\left|\varphi(\tau)\right|d\tau < M_1 M_2 \int_0^t e^{s_1(t-\tau)} e^{s_2\tau} d\tau \le$$

а) $s_1 > s_2$

$$\le M\int_0^t e^{s_1 t} e^{(s_2 - s_1)\tau} d\tau < M\int_0^t e^{s_1 t} d\tau = Mte^{s_1 t} < Me^{st}$$

б) $s_1 < s_2$.

$$\le M\int_0^t e^{s_2(t-\tau)} e^{s_2\tau} d\tau = M\int_0^t e^{s_2 t} d\tau = Mte^{s_2 t} < Me^{st}.$$

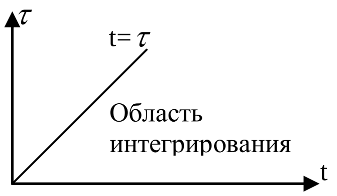
Теорема о свертке (теорема о произведении изображений). $f * \varphi \sim F(p)\Phi(p)$.

Доказательство.

$$L(f * \varphi) = \int_0^\infty f * \varphi \;\; e^{-pt} dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty f(t-\tau)\varphi(\tau)\, e^{-pt} dt\right) d\tau = (v = t - \tau) =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(v)\varphi(\tau)\, e^{-p(v+\tau)} dv\right) d\tau = \int_0^\infty f(v) e^{-pv} dv \int_0^\infty \varphi(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau = F(p)\Phi(p)$$



Пример. Найти оригинал, соответствующий изображению $G(p) = \dfrac{p}{p^4 - 1}$

$$G(p) = \frac{p}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{p}{p^2-1}\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2-1}\frac{p}{p^2+1}$$

$$G(p) \sim cht * \sin t, \quad G(p) \sim sht * \cos t.$$

Интеграл Дюамеля.

$$pF(p)\Phi(p) \sim \varphi(t) * f'(t) + f(+0)\varphi(t), \quad pF(p)\Phi(p) \sim f'(t) * \varphi(t) + f(+0)\varphi(t)$$
$$pF(p)\Phi(p) \sim \varphi'(t) * f(t) + \varphi(+0)f(t), \quad pF(p)\Phi(p) \sim f(t) * \varphi'(t) + \varphi(+0)f(t)$$

Эти соотношения называются **интегралом Дюамеля**.

Доказательство. Выражения, стоящие в одной строке равны по коммутативности свертки. Докажем первые соотношения в строках.

$$L(\varphi(t) * f'(t)) = L(\varphi(t))L(f'(t)) = \Phi(p)(pF(p) - f'(+0)) = pF(p)\Phi(p) - f'(+0)\Phi(p)$$

Но $f'(+0)\Phi(p) \sim f'(+0)\varphi(t)$. Отсюда следует справедливость первого соотношения в первой строке.

$$L(\varphi'(t) * f(t)) = L(\varphi'(t))L(f(t)) = F(p)(p\Phi(p) - \varphi'(+0)) = pF(p)\Phi(p) - \varphi'(+0)F(p)$$

Но $\varphi'(+0)F(p) \sim \varphi'(+0)f(t)$. Отсюда следует справедливость второго соотношения во второй строке.

Лекция 3.

Теоремы разложения.

Сформулируем **достаточные условия изображения** – требования, предъявляемые к функции комплексной переменной, чтобы она была изображением некоторого оригинала.

1. Функция $F(p)$ - аналитическая при $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (константа s_0 определяет третье требование к оригиналу).
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(s+i\omega)| d\omega$ сходится ($\operatorname{Re} p = s > s_0$, $\forall s > s_0$).
3. $F(p) \to 0$ *при* $p \to \infty$ $(\forall s > s_0)$.

При выполнении этих требований функция $F(p)$ является изображением некоторого оригинала.

Теорема обращения. Пусть функция $F(p)$ удовлетворяет достаточным условиям изображения. Тогда справедлива формула обращения

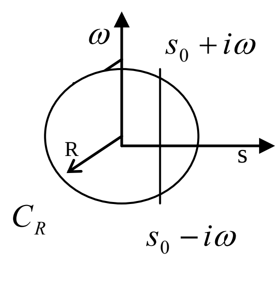
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} F(p) e^{pt} dp = L^{-1}(F(p))$$

Интеграл, стоящий в правой части этой формулы, называется **интегралом Римана – Меллина**, он осуществляет **обратное преобразование Лапласа** (переход от изображения к оригиналу).

Доказательство см.т.X1 учебника, стр.160 – 166.

Приведем без доказательства **лемму Жордана** (здесь она используется в доказательстве теоремы обращения и в доказательстве общей теоремы разложения, несколько иная ее форма применена в лекции 9 по ТФКП для вычисления несобственных интегралов).

Построим контур C_R - часть окружности радиусом R с центром в начале координат, лежащую в области $s < s_0$, отметим на ней точки с абсциссой s_0 ($s_0 - i\omega$, $s_0 + i\omega$).



Лемма Жордана. *Пусть* $F(p)$ *- аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Re} p = s > s_0$. *Пусть* $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$, $p \in C_R$ равномерно по аргументу p (т.е. при $p \to \infty$, $p \in C_R$ выполнено условие $\max |F(p)| \to 0$)

Тогда $\lim_{R \to \infty} \int\limits_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0$

Общая (третья) теорема разложения.

Пусть $F(p)$ *- аналитическая за исключением конечного числа особых точек* $p_1, \dots p_n$ $(\operatorname{Re} p_k < s_0, k = 1,2 \dots n)$. *Пусть* $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$, $p \in C_R$ равномерно по аргументу p. *Тогда* $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{p_k} (F(p) e^{pt})$.

Доказательство. Пусть в область, ограниченную C_R и отрезком, соединяющим точки $s_0 - i\omega, s_0 + i\omega$, попало m из n особых точек. По общей теореме о вычетах

$\int\limits_{C_R} F(p)e^{pt}dp + \int\limits_{s_0-i\omega}^{s_0+i\omega} F(p)e^{pt}dp = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\, s_{p_k}(F(p)e^{p})$. Устремим $R \to \infty$. Внутрь рассматриваемой области войдут тогда все n особых точек. К первому слагаемому может быть применена лемма Жордана, его предел при $R \to \infty$.будет равен нулю. Ко второму слагаемому может быть применена теорема обращения. Его предел при $R \to \infty$.будет равен $2\pi i f(t)$. Следовательно, в результате предельного перехода получим, сокращая обе части на $2\pi i$, $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, s_{p_k}(F(p)e^{pt})$.

Следствие. Первая теорема разложения.

Пусть $F(p) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{p^{m+1}}$. *Тогда* $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ **.**

Доказательство. Отыщем оригинал $\varphi_m(t)$ от изображения $\frac{c_m}{p^{m+1}}$. По общей теореме разложения $\varphi_m(t) = \mathrm{Re}\, s_{p=o} \frac{c_m}{p^{m+1}} e^{pt} = \frac{1}{m!} \lim_{p\to 0} \frac{d^m}{dp^m}\left(\frac{c_m e^{pt}}{p^{m+1}} p^{m+1}\right) = \frac{c_m t^m}{m!}$.

По равномерной сходимости ряда Лорана допустимо его почленное интегрирование (при вычислении вычета) и почленный переход к пределу. По общей теореме разложения

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\, s_{p_k}(F(p)e^{pt}) = \mathrm{Re}\, s_{p=0}\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{p^{m+1}} e^{pt}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, s_{p=0}\left(\frac{c_m}{p^{m+1}} e^{pt}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m t^m}{m!}.$$

Следствие. Вторая теорема разложения.

Пусть $F(p) = \frac{\Psi(p)}{\Phi(p)}$ *имеет в качестве особых точек только полюсы* $p_k, k = 1,...n$ *кратности* r_k. *Тогда* $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{p\to p_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left[\left(\frac{\Psi(p)}{\Phi(p)}(p-p_k)^{r_k}\right)e^{pt}\right]$

Доказательство теоремы сводится к применению общей теоремы разложения и формулы вычисления вычета в полюсе r_k порядка.

Лекция 4.

Решение дифференциальных уравнений и систем
Методом операционного исчисления.

При решении дифференциальных уравнений и систем используется теорема о дифференцировании оригинала и ее следствие – теорема об изображении n-ой производной.

Метод решения основан на том, что преобразование Лапласа сводит дифференцирование в пространстве оригиналов к умножению на p в пространстве изображений. Поэтому дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами с пространстве оригиналов переходит в алгебраическое уравнение в пространстве изображений. При этом учитываются и начальные условия, что удобно при решении задачи Коши.

Получив решение алгебраического уравнения в пространстве изображений, мы получаем решение в виде некоторого изображения – функции от p. Остается найти соответствующий ему оригинал по свойствам преобразования Лапласа (теоремам подобия, смещения, запаздывания, дифференцирования и интегрирования) или теоремам разложения.

Пусть задано дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $a_0, a_1, ... a_n$ относительно неизвестной функции $x(t)$ и ее производных с правой частью – функцией $f(t)$, являющейся оригиналом

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x' + a_n x = f(t).$$

Требуется решить задачу Коши для этого уравнения при начальных условиях $x(0) = x_0, x'(0) = x_{10}, x''(0) = x_{20}, ... x^{(n-1)}(o) = x_{n-10}$.

Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства.

$$a_0\left(p^n x(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_{10} - ... - x_{n-10}\right) + a_1\left(p^{n-1}x(p) - p^{n-2}x_0 - p^{n-3}x_{10} - ... - x_{n-20}\right) + ...$$

$$+ a_{n-1}(px(p) - x_0) + a_n x(p) = F(p).$$

Приведем коэффициенты при $x(p)$ в левой части и перенесем члены, зависящие от начальных условий, в правую часть.

$$M(p)x(p) = F(p) + M_0(p),$$

где $M(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n$ - характеристический многочлен,

$$M_0(p) = \left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + ... + a_{n-1}\right)x_0 + \left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + ... + a_{n-2}\right)x_{10} + ... + \left(a_0 p + a_1\right)x_{n-20} + a_n x_{n-10}$$

Найдем изображение решения

$$x(p) = \frac{F(p) + M_0(p)}{M(p)} = \frac{F(p)}{M(p)} + \frac{M_0(p)}{M(p)}.$$

Здесь первое слагаемое дает вклад правой части в решение, второе слагаемое – вклад начальных условий. Если начальные условия нулевые, то $M_0(p) = 0$ и второе слагаемое пропадает.

Примеры.

1. $x'' - x = 1, x(0) = c_0, x'(0) = c_1$

$$p^2x(p)-c_0p-c_1-x(p)=\frac{1}{p},\quad x(p)=\frac{c_0p+c_1+\dfrac{1}{p}}{p^2-1}=c_0\frac{p}{p^2-1}+c_1\frac{1}{p^2-1}+\frac{1}{p(p^2-1)}$$

Первые два слагаемых соответствуют c_0cht+c_1sht, оригинал для третьего слагаемого находим по теореме об интегрировании оригинала: $\int_0^t shtdt = cht-1$.

$x(t)=cht-1+\ c_0cht+c_1sht$.

2. $x'-x=e^t,\ x(0)=0$

$(p-1)x(p)=\dfrac{1}{p-1},\ x(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2},\quad x(t)=te^t$ по теореме о дифференцировании изображения.

3. $x''+x=0,\ x(0)=2,\ x'(0)=1$

$$p^2x(p)-2p-1+x(p)=0,\quad x(p)=\frac{2p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1},\quad x(t)=2\cos t+\sin t$$

4. $x''=4x+3e^t,\quad x(0)=2,\ x'(0)=1$

$$p^2x(p)-2p-1=4x(p)+\frac{3}{p-1},\quad x(p)=\frac{2p}{p^2-4}+\frac{1}{p^2-4}+\frac{3}{(p-1)(p^2-4)}$$

$$x(t)=2ch2t+\frac{1}{2}sh2t+\frac{3}{2}e^t*sh2t.$$

Если свертку вычислить трудно, то можно найти оригинал $\varphi(t)$ для последнего слагаемого по теореме разложения.

$$\varphi(t)=\sum\operatorname{Res}\frac{3e^{pt}}{(p-1)(p-2)(p+2)}=-e^t+\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}.$$

Решение дифференциальных уравнений с помощью интеграла Дюамеля.

Задано дифференциальное уравнение

$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+...+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$ с нулевыми начальными условиями.

Известно решение уравнения $x_1(t)$ при $f(t)\equiv 1$. Надо, используя это решение, найти решение для произвольной правой части.

$$M(p)x(p)=F(p),\quad M(p)x_1(p)=\frac{1}{p},\quad M(p)=\frac{1}{px_1(p)},\quad \frac{x(p)}{px_1(p)}=F(p),$$

Следовательно, $x(p)=px_1(p)F(p)$. Отсюда по формуле интеграла Дюамеля

$x(t)=f(+0)x_1(t)+f'(t)*x_1(t)=x_1(0)f(t)+x_1'(t)*f(t)$. Для вычисления выбирается одна из этих формул.

Решение систем дифференциальных уравнений методом операционного исчисления.

Задана система дифференциальных уравнений. Надо решить задачу Коши.

$\dot{\vec{x}}=A\vec{x}+\vec{f}(t),\quad \vec{x}(0)=\vec{x}_0,\ A(n\times n)$.

Матричный способ решения.

Применим к обеим частям преобразование Лапласа

$p\vec{x}(p)-\vec{x}_0 = A\vec{x}(p)+\vec{F}(p), \quad (pE-A)\vec{x}(p)=\vec{F}(p)+\vec{x}_0$

$\vec{x}(p)=\left(pE-A\right)^{-1}\left(\vec{F}(p)+\vec{x}_0\right)$

Теперь надо найти оригинал $\vec{x}(t)$ для вектора $\vec{x}(p)$.

Координатный способ решения.

Если обратную матрицу считать сложно, то можно применить преобразование Лапласа к каждому из уравнений системы, получить систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений координат вектора $\vec{x}(t)$, решить ее. Затем надо найти оригиналы координат вектора.

Примеры.

1. $\begin{cases}\dot{x}=y+2e^t\\ \dot{y}=x+t^2\end{cases} \quad \begin{cases}x(0)=c_1\\ y(0)=c_2\end{cases}$

Матричный способ

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2e^t\\ t^2\end{pmatrix}$$

$$pE-A=\begin{pmatrix}p & -1\\ -1 & p\end{pmatrix}, \left(pE-A\right)^{-1}=\frac{1}{p^2-1}\begin{pmatrix}p & 1\\ 1 & p\end{pmatrix}, \vec{F}(p)=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{p-1}\\ \dfrac{2}{p^3}\end{pmatrix}, \vec{x}_0=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x(p)\\ y(p)\end{pmatrix}=\frac{1}{p^2-1}\begin{pmatrix}p & 1\\ 1 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{2}{p-1}+c_1\\ \dfrac{2}{p^3}+c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{c_1p}{p^2-1}+\dfrac{c_2}{p^2-1}\\ \dfrac{c_1}{p^2-1}+\dfrac{c_2p}{p^2-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{2}{\left(p^2-1\right)p^3}+\dfrac{2p}{(p-1)^2(p+1)}\\ \dfrac{2}{(p-1)^2(p+1)}+\dfrac{2p}{p^2(p^2-1)}\end{pmatrix}$$

$$x(p)=\frac{c_1p}{p^2-1}+\frac{c_2}{p^2-1}+\frac{2}{(p^2-1)p^3}+\frac{2p}{(p^2-1)(p+1)}$$

$\left(\dfrac{1}{p^3(p^2-1)}\sim cht-1-\dfrac{1}{2}t^2\right)$ - три раза применена теорема об интегрировании оригинала,

$$\left(\frac{p}{(p-1)(p+1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2}\sim\frac{1}{4}\left(e^t-e^{-t}+2te^{-t}\right)\right)$$

$$x(t)=c_1cht+c_2sht+2cht-2-t^2+te^{-t}$$

$$y(p)=\frac{c_1}{p^2-1}+\frac{c_2p}{p^2-1}+\frac{2}{(p+1)^2(p-1)}+\frac{2}{p(p^2-1)}$$

$$\left(\frac{2}{(p-1)(p+1)^2}\sim\frac{1}{4}\left(e^t+e^{-t}-2te^{-t}+2-2e^{-t}\right)\right)$$

$\left(\dfrac{1}{p(p^2-1)} \sim cht - 1\right)$

$y(t) = c_1 sht + c_2 cht + 3cht - te^{-t} - 1 - e^{-t}$

2. $\begin{cases} \dot{x} + y = e^t \\ \dot{y} - y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Координатный способ.

$px(p) - 1 + y(p) = \dfrac{1}{p-1}, \quad (p-1)y(p) = 1, \quad y(p) = \dfrac{1}{p-1}, \quad x(p) = \dfrac{1}{p}$

$x(t) = 1(t), \quad y(t) = e^t$

Примеры решения типовых домашних задач.

1. Найти изображение для оригинала $f(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$.

По теореме об интегрировании изображения $F(p) = \int\limits_p^\infty \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\right) dp = \ln \dfrac{p+1}{p}$.

2. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

По теореме об интегрировании оригинала $f(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^t \sin t dt dt = t - \sin t$.

3. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p-c}{p(p-a)(p-b)}$.

Особые точки функции $F(p)$ - полюсы первого порядка $p = 0, p = a, p = b$. По общей третьей теореме разложения (или второй теореме разложения)

$f(t) = -\dfrac{c}{ab} + \dfrac{(a-c)e^{at}}{a(a-b)} + \dfrac{(b-c)e^{bt}}{b(b-a)}$.

4. Найти изображение периодического импульса с периодом 2τ

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{h}{\tau} t & 0 \le t \le \tau \\ -\dfrac{h}{\tau}(t-\tau) & \tau < t < 2\tau \end{cases}$$

$f_0(t) = \dfrac{h}{\tau}\left(t1(t) - 2(t-\tau)1(t-\tau)\right) + (t-2)1(t-2))$. $F_0(p) = \dfrac{h}{\tau p^2}\left(1 - 2e^{-p\tau} + e^{-2p\tau}\right)$

$F(p) = \dfrac{h(1-e^{-p})^2}{\tau p^2(1-e^{-2p\tau})}$

5. $\ddot{x} + 4x = e^t, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1$

$p^2 x(p) - px_0 - x_1 + 4x(p) = \dfrac{1}{p-1}, \quad x(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p^2+4)} + \dfrac{p}{p^2+4} x_0 + \dfrac{1}{p^2+4} x_1$

По третьей (или второй) теореме разложения

$$\frac{1}{(p-1)(p^2+4)} \sim \frac{1}{5}\left(e^t - \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

$$x(t) = x_0 \cos 2t + \frac{1}{2}x_1 \sin 2t + \frac{1}{5}\left(e^t - \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

6. $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{y} = t & x(0) = -1 & \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y} + \dot{x} = 0 & y(0) = 1 & \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$

$$p^2 x(p) + p - py(p) + 1 = \frac{1}{p^2}, \quad p^2 y(p) - p + px(p) + 1 = 0$$

$$y(p) = \frac{1}{p} - \frac{x(p)}{p} - \frac{1}{p^2}, \qquad p^2 x(p) + p + \frac{1}{p} + x(p) + 1 = \frac{1}{p^2}$$

$$x(p) = -\frac{1}{p(p^2+1)} + \frac{1}{p^2(p^2+1)} - \frac{p}{p^2+1}$$

$$y(p) = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2(p+1)} + \frac{1}{p^3(p^2+1)}$$

$$x(t) = -\cos t + \cos t - 1 - \sin t + t = -1 - \sin t + t$$

$$y(t) = -t + 1 + \sin t - \sin t + t - \cos t + 1 - \frac{t^2}{2} = 2 - \cos t - \frac{t^2}{2}.$$

7. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = e^{t-2}1(t-2)$

$$p^2 x(p) - 1 - 4px(p) + 4x(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}, \qquad x(p) = \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{e^{-2p}}{(p-2)^2(p-1)}$$

$$\frac{1}{(p-2)^2} \sim te^{2t}, \quad \frac{1}{(p-2)^2(p-1)} = -\frac{1}{p-2} + \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{p-1} \sim -e^{2t} + te^{2t} + e^t$$

$$x(t) = te^{2t} + (-e^{2(t-2)} + (t-2)e^{2(t-2)} + e^{t-2})1(t-2)$$

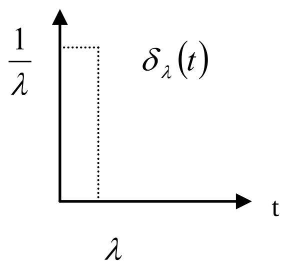
Дополнение

δ-функция, преобразование Лапласа δ-функции и ее разложение в ряд Фурье.

Определим δ - образную последовательность функций $\delta_\lambda(t)$.

Заметим, что $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\lambda(t)dt = 1$. δ - **функцией** называется

$\delta(t) = \lim_{\lambda \to 0} \delta_\lambda(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$.



δ-функция не является обычной функцией, это – обобщенная функция, $\delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$.

Если функцию Хевисайда 1(t)=$\begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ можно интерпретировать как *единичный скачок*, то δ-функцию можно считать *единичным импульсом* (единичным в смысле площади под графиком функции). Эти понятия используются в теории автоматического управления, в кибернетике. Можно считать, что $\delta(t) = \frac{d}{dt}(1(t))$.

Справедливо **«фильтрующее свойство δ - функции»** $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau)$**.**

Интеграл представляет собой «фильтр», который пропускает то значение функции, при котором аргумент δ- функции обращается в нуль. На этом свойстве, которое доказывается в теории обобщенных функций, базируются, фактически, все применения δ-функции.

Преобразование Лапласа δ-функции.

$$L(\delta(t-\tau)) = \int_0^{\infty} \delta(t-\tau)e^{-pt}dt = e^{-p\tau}, \quad L(\delta(t)) = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-pt}dt = 1.$$

Как видно, обычными изображениями эти выражения не являются, так как не выполнено необходимое условие изображения.

Разложение δ-функции в ряд Фурье.

Разложим δ-функцию в ряд Фурье как функцию, заданную на отрезке $[-\pi, \pi\ ]$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)dt = \frac{1}{\pi}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)\sin ntdt = 0.$$

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos t + oos2t + \cos 3t + ...\right).$$

Лекция 5.

Преобразование Фурье.

Ряд Фурье в комплексной форме.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,\quad \cos nx=\frac{1}{2}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right),\quad \sin nx=\frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx})$$

$$f(x)=\frac{a_=}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-ib_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}(a_n-ib_n)+e^{-inx}(a_n+ib_n)}{2}=$$

$$\left(c_0=\frac{a_0}{2},\ c_n=\frac{a_n+ib_n}{2},\ c_{-n}=\frac{a_n-ib_n}{2}\right)\quad=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{-inx}$$

$$c_n=\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx+i\sin nx)dx\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx$$

$$c_{-n}=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(\cos nx-i\sin nx\right)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos(-nx)+i\sin(-nx))dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-nx}dx$$

Следовательно, $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}dx$.

Интеграл Фурье.

Теорема. Пусть 1) $f(x)$ ограничена на R, 2) $f(x)$ абсолютно интегрируема на R, 3)на любом конечном интервале $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & \text{в точках непрерывности} \\ \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)) & \text{в точках разрыва}\end{cases},\qquad S(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt)d\omega\right).$$

Вывод (нестрогий). Рассмотрим разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье на $[-l,l]$.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{\pi nx}{l}\cos\frac{\pi nt}{l}+\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi nt}{l}\right)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n(x-t)}{l}dt\right)=\left(\omega_n=\frac{\pi n}{l},\quad \Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{\pi n}{l}-\frac{\pi(n-1)}{l}=\frac{\pi}{l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\omega_n(x-t)dt\right)\Delta\omega_n.$$ Перейдем к пределу при $l\to\infty,\ (\Delta\omega_n\to 0)$. Так как $\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\right|\le\frac{K}{2l}\xrightarrow[l\to\infty]{}0$, то $\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}f(t)dt=0$.

Второе слагаемое при $l \to \infty, \left(\Delta\omega_n \to 0\right)$ переходит в $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt\right)d\omega$ (предел интегральной суммы). Следовательно, в точках непрерывности

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt\right)d\omega .$$

Косинус и синус – преобразования Фурье.

Заметим, что подынтегральная функция в интеграле Фурье четна по ω. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt\right)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega\, xos\,\omega\, tdtd + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega\, x\sin\omega\, tdtd\omega$$

1) Пусть $f(t)$ - четная функция, тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega\, tdt = 0$

В точках непрерывности

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega\, tdt\right)\cos\omega\, xd\omega = \left(\textit{по четности}\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega\, tdt\right)\cos\omega\, xd\omega =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} F_c(\omega)d\omega .$$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} F_c(\omega)d\omega$ - **обратное косинус – преобразование Фурье**

$F_c(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\omega tdt$ - **косинус – преобразование Фурье.**

2) Пусть $f(t)$ - нечетная функция, тогда $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega\, tdt = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega\, tdt\right)\sin\omega\, xd\omega = \left(\textit{по четности}\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\omega\, tdt\right)\sin\omega\, xd\omega =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} F_s(\omega)d\omega .$$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} F_s(\omega)d\omega$ - **обратное синус – преобразование Фурье**

$F_s(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\omega\, t\, dt$ - **синус – преобразование Фурье.**

Преобразование Фурье.

Из формулы интеграла Фурье по четности подынтегральной функции по ω имеем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt\right)d\omega=$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}dt\right)d\omega+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega(x-t)}dt\right)d\omega.$$

Рассмотрим второй интеграл и сделаем в нем замену $\alpha=-\omega,\ d\alpha=-d\omega$.

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega(x-t)}dt\right)d\omega=-\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}^{-\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha(x-t)}dt\right)d\alpha=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\alpha(x-t)}dt\right)d\alpha$$

Получили первый интеграл, следовательно, второй интеграл равен первому. Поэтому

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}dt\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega.$$

$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt,\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ называются **прямым и обратным преобразованием Фурье.**

Часто множитель относят ко второму интегралу:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt,\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Связь преобразований Лапласа и Фурье.

Запишем преобразование Лапласа $L(f(t))=F(\omega)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}f(t)e^{-(s_0+i\omega)t}dt=$

$\int_0^{\infty}(f(t)e^{-s_0t})e^{-i\omega t}dt=\Phi\left(f(t)e^{-s_0t}\right)$. Таким образом, преобразование Лапласа функции $f(t)$ есть преобразование Фурье функции $f(t)e^{-s_0t}$. Заметим, что ограниченность функции $f(t)e^{-s_0t}$ следует из выполнения требования к оригиналу по Лапласу $f(t)$: $|f(t)|<Me^{s_0t}$. Тогда $|f(t)e^{-s_0t}|<|f(t)|e^{-s_0t}<Me^{s_0t}e^{-s_0t}=M$.