

*В. П. Попов*

---

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Допущено Министерством высшего  
и среднего специального образования СССР  
в качестве учебника для студентов вузов,  
обучающихся по специальности  
«Радиотехника»



МОСКВА  
'ВЫСШАЯ ШКОЛА' 1985

ББК 31.27—01  
П58  
УДК 621.3.01

**Рецензенты:**

кафедра теории линейных электрических цепей Московского электротехнического института связи (зав. кафедрой д-р техн. наук проф. К. К. Товара); кафедра теоретической радиотехники и радиоизмерений Львовского политехнического института им. Ленинского комсомола (зав. кафедрой канд. техн. наук, доц. Б. А. Мандзий)

**Попов В. П.**

**П58** Основы теории цепей: Учебник для вузов спец. «Радиотехника». — М.: Высш. шк., 1985. — 496 с., ил.  
В пер.: 1 р. 50 к.

Книга соответствует новой программе курса «Основы теории цепей». В ней изложена теория линейных электрических цепей с сосредоточенными и распределенными параметрами в установившемся и переходном режимах; значительное внимание уделено основам анализа нелинейных резистивных цепей, матрично-топологическим представлениям, теории графов, машинным методам формирования уравнений электрического равновесия, анализу цепей с управляемыми источниками.

**П**  $\frac{2302010000-235}{001(01)-85}$  125—85

**ББК 31.27—01**  
**6П2.1**

**Вадим Петрович Попов**

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ**

Зав. редакцией Л. А. Романова. Редактор С. В. Никитина. Художественный редактор Т. М. Скворцова. Оформление художника В. В. Гарбузова. Младшие редакторы И. А. Исаева, Т. В. Шеганова. Технический редактор Р. С. Родичева. Корректор Р. К. Косынова

ИБ № 4861

---

Изд. № ЭР-362. Сдано в набор 31.10.84. Подп. в печать 01.04.85.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная  
Объем 31 усл. печ. л.+0,25 усл. п. л. форз. 31,5 усл. кр.-отт 31,77 уч.-изд. л. + 0,38  
уч.-изд. л. форзац. Тираж 20 000 экз. Зак. № 565. Цена 1 р 50 к

---

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.  
129041, Москва, Б. Переславская, 46

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный учебник в отличие от известных по теории цепей рассчитан на студентов одной специальности «Радиотехника» и максимально учитывает особенности учебного плана этой специальности.

Как известно, в вузах, работающих по типовому учебному плану, курс «Основы теории цепей» (ОТЦ) изучается одновременно с курсами физики, высшей математики и вычислительной техники в инженерных расчетах. Это обстоятельство, значительно затрудняющее изучение курса ОТЦ, оказало существенное влияние на выбор структуры учебника и методику изложения отдельных разделов. В частности, рассмотрение материала начато с анализа цепей, находящихся в установившемся режиме под гармоническим внешним воздействием, хотя такой режим не является характерным для радиотехнических цепей. Более того, весь курс ОТЦ можно построить значительно компактнее и непротиворечивее, если изложение материала начать с анализа цепей во временной области. Однако студенты вузов, обучающиеся по типовым учебным планам, не готовы к такому изложению ОТЦ, так как к началу изучения курса они еще не имеют необходимых знаний в области дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного. При выбранной структуре учебника для изучения первых пяти глав достаточно знаний физики и математики в объеме школьных курсов, в частности общее знакомство с методами расчета цепей постоянного тока, с понятиями интеграла, производной и комплексного числа. Для изучения остальных глав необходимо знать методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и основы операционного исчисления (гл. 6), численные методы и основы программирования (гл. 7), начала теории функций комплексного переменного (гл. 9).

Для студентов специальности «Радиотехника» изучение теории цепей продолжается в курсах «Радиотехнические цепи и сигналы», «Усилительные устройства», и «Электротехнические устройства». Для устранения излишнего параллелизма и дублирования в учебник не включены вопросы анализа цепей, находящихся под периодическим негармоническим воздействием, и методы анализа трехфазных цепей. О спектральном методе в учебнике даны лишь самые общие представления, поскольку детально этот метод традиционно изучается в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы».

С учетом специфики радиотехнических цепей значительное внимание в учебнике уделяется матрично-топологическим представлениям, вопросам анализа цепей с управляемыми источниками и многополюсными элементами, методам формализации процесса составления уравнений электрического равновесия сложных цепей. В частности, в учебник включен раздел «Методы анализа цепей, ориентированные на применение ЭВМ», который совместно с разделом «Нелинейные резистивные цепи» служит необходимой базой для изучения методов автоматизированного анализа цепей в курсе «Вычислительная техника в инженерных расчетах и основы САПР».

Терминология и условные буквенные обозначения в учебнике соответствуют ГОСТ 19880—74 и ГОСТ 1494—77. Единицы физических величин приведены по СТ СЭВ 1052—78. Однако действующие стандарты не учитывают всех понятий и

величин, используемых в современной теории цепей. Так, в стандартах Единой системы конструкторской документации (ЕСКД) приведены условные графические обозначения, а в ГОСТ 1494—77 — условные буквенные обозначения, применяемые при построении принципиальных схем электрических цепей, но не даны соответствующие графические и буквенные обозначения для эквивалентных схем электрических цепей, с которыми в основном приходится иметь дело в теории цепей. В связи с этим в учебнике наряду со стандартизированными графическими и буквенными обозначениями использованы установленные, но еще не стандартизированные или введены новые обозначения. В соответствии с ГОСТ 1494—77 комплексные величины, не являющиеся изображениями функций времени, обозначены подчеркиванием, например  $\underline{A}$ ,  $\underline{Z}$ ; комплексные величины, являющиеся комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями гармонических функций времени, обозначены точкой ( $\dot{U}_m$ ,  $\dot{I}$ ). Не выделялись каким-либо способом буквенные обозначения мнимой единицы  $j$ , комплексной частоты  $p$  и величин, комплексный характер которых непосредственно виден из их формы записи, например  $Z_{11}(j\omega)$ ,  $Y_{12}(p)$ .

Для эффективного усвоения курса ОЦ требуется решение большого количества задач и примеров. С этой целью необходимо использовать «Сборник задач по теории цепей» авторов В. Н. Бирюкова, В. П. Попова и В. И. Семенцова.

Большую помощь в работе над книгой оказало обсуждение ее содержания с членами научно-методической комиссии МВ и ССО СССР по радиотехнике и радиоуправлению — профессорами А. Л. Зиновьевым, И. С. Гоноровским, Г. В. Глебовичем, Б. А. Калабековым, доцентами С. И. Баскаковым, В. А. Клязником и коллегам — преподавателями кафедры теоретических основ радиотехники Таганрогского радиотехнического института. Ценные замечания и предложения по улучшению содержания книги были высказаны в рецензиях кафедры теории линейных электрических цепей Московского ордена Трудового Красного Знамени электротехнического института связи (зав. кафедрой проф. К. К. Токвар, доц. И. Н. Добротворский) и кафедры теоретической радиотехники и радиоизмерений Львовского ордена Ленина политехнического института им. Ленинского комсомола (зав. кафедрой доц. Б. А. Мандзий, доц. Т. И. Бардила и Р. Д. Грицькив). Большая работа по оформлению книги была проделана А. Д. Стенковской и В. Н. Зыковой. Всем этим товарищам автор выражает свою искреннюю признательность.

Автор будет благодарен всем читателям за критические замечания и предложения по улучшению книги, которые следует направить по адресу: Москва, 101430, ГСП-4, ул. Неглинная, д. 29/14, издательство «Высшая школа».

*Автор*

## ВВЕДЕНИЕ

Теория цепей является важнейшим инструментом, широко используемым в двух смежных направлениях науки и техники — э л е к т р о т е х н и к е и р а д и о э л е к т р о н и к е. Эти два направления имеют между собой много общего, построены на общей физической основе, но решают различные технические задачи. *Основная задача электротехники — это производство и передача электрической энергии, преобразование ее в другие виды энергии, например в механическую, тепловую или световую. В радиоэлектронике решается широкий круг задач, связанных с использованием электрических явлений для передачи и обработки информации.* Сюда в первую очередь относятся задачи связи, радиолокации и радионавигации, телеуправления, телеизмерения, автоматизации различных производственных процессов и многие другие. Не боясь преувеличений, можно сказать, что радиоэлектроника и электротехника являются ведущими отраслями науки и техники, имеющими исключительно важное значение для дальнейшего повышения производительности труда, материального благосостояния трудящихся, улучшения качества продукции и создания материально-технической базы коммунизма, т. е. для решения основных задач, поставленных перед партией и советским народом XXVI съездом КПСС.

Во всех электротехнических и радиоэлектронных устройствах независимо от их назначения и принципа действия имеют место одни и те же электромагнитные процессы, подчиняющиеся одним и тем же физическим законам.

Электромагнитные явления и устройства на их основе можно достаточно строго описать методами т е о р и и э л е к т р о м а г н и т н о г о п о л я. В теории электромагнитного поля оперируют с векторными величинами, такими, как плотности токов, напряженности электрического и магнитного полей. Эта теория позволяет описать процессы в каждой точке электромагнитного поля с помощью дифференциальных уравнений в частных производных (уравнений Максвелла). Методы теории поля дают возможность рассмотреть в общем виде самые разнообразные явления в любых электротехнических и радио-технических устройствах, в том числе в таких сложных, как антенны, волноводы, электровакуумные и полупроводниковые приборы. В то

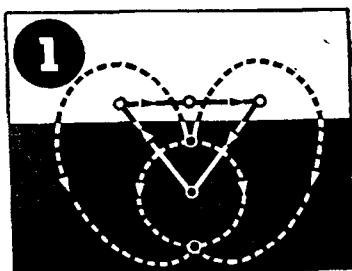
же время эти методы весьма сложны, трудоемки и на практике позволяют решить ограниченное число задач.

Для исследования широкого круга устройств можно применять упрощенные методы, так называемые методы теории цепей, основанные на замене реального устройства некоторой упрощенной моделью, процессы в которой описываются скалярными величинами — токами и напряжениями. Отдельные составные части (элементы) устройства при этом заменяют моделями, приближенно отражающими основные (в рамках решаемой задачи) свойства соответствующих элементов.

Разработка инженерных методов исследования процессов в электротехнических и радиоэлектронных устройствах, основанных на замене этих устройств упрощенными моделями, составляет предмет теории цепей.

Однако методы теории электрических цепей вследствие принятых допущений и упрощений менее универсальны, чем методы теории поля, в частности их нельзя применять на достаточно высоких частотах, когда длина волны электромагнитных колебаний становится соизмеримой с размерами исследуемого устройства, а также при исследовании процессов излучения, распространения и приема радиоволн; ограничено применение методов теории электрических цепей в технике высоких напряжений, при определении параметров и построении упрощенных моделей различных элементов цепей. В этих случаях для исследования процессов, а также для оценки пределов применимости результатов, полученных с помощью теории цепей, необходимо использовать методы теории электромагнитного поля.

# Основные понятия теории цепей



## § 1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### Электрическая цепь

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий электродвижущей силы, тока и напряжения. Составные части (элементы) электрической цепи можно разделить на две группы: источники электрической энергии и приемники (нагрузка).

К источникам электрической энергии (первичным источникам) относятся различные устройства, в которых происходит преобразование химической, тепловой, механической и других видов энергии в электрическую. Источниками электрической энергии являются; например, гальванические элементы, аккумуляторы, солнечные батареи, гидрогенераторы и т. п.

Приемники электрической энергии — это элементы электрической цепи, в которых происходит преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а также запасание электрической энергии. Приемниками электрической энергии являются электрические двигатели, лампы накаливания, транзисторы, конденсаторы, индуктивные катушки, резисторы, передающие антенны, громкоговорители и др.

Особый класс электрических устройств представляют собой вторичные источники энергии, к которым относятся различные блоки питания, выпрямители, стабилизаторы, приемные антенны. В устройствах этого типа осуществляются различные преобразования электрических токов и напряжений, такие, как преобразование постоянного тока в переменный, выпрямление переменного тока, изменение напряжения и т. п. Вторичные источники получают электрическую энергию от первичных источников и по отношению к ним должны рассматриваться как приемники электрической энергии. В то же время по отношению к остальной части цепи, которая получает электрическую энергию от вторичных источников, они могут рассматриваться как источники.

Основные элементы электрической цепи — источники и приемники электрической энергии — соединяют между собой с помощью

**Вспомогательных элементов:** соединительных проводников, ключей, разъемов, кнопок и т. п. Для подключения к остальной части цепи каждый элемент цепи имеет внешние выводы, называемые также *з а ж и м а м и* или *п о л ю с а м и*. В зависимости от числа внешних выводов различают двухполюсные (резистор, конденсатор, катушка индуктивности) и многополюсные (транзистор, трансформатор, электронная лампа) элементы.

*В теории цепей предполагается, что каждый элемент цепи полностью характеризуется зависимостью между токами и напряжениями на его зажимах, при этом процессы, имеющие место внутри элементов, не рассматриваются.*

В соответствии с основным методом теории цепей реальные элементы цепи заменяются их упрощенными моделями, построенными из идеализированных элементов. Используют пять основных типов идеализированных двухполюсных элементов: сопротивление, емкость, индуктивность, идеальный источник напряжения и идеальный источник тока. В простейшем случае модель реального элемента может состоять из одного идеализированного элемента. В более сложных случаях она представляет собой соединение нескольких идеализированных элементов. В ряде случаев используют многополюсные идеализированные элементы — управляемые источники тока и напряжения, идеальные трансформаторы и др.

Электрическая цепь, которую получают из исходной *р е а л ь н о й* электрической цепи при замене каждого реального элемента его упрощенной моделью, составленной из идеализированных элементов, называют *м о д е л и р у ю щ е й*, или *и д е а л и з и р о в а н н о й*, *ц е п ь ю*. В теории цепей исследуют процессы, имеющие место именно в таких цепях.

## Электрический ток

Электрический ток проводимости есть упорядоченное движение свободных носителей электрического заряда (в дальнейшем, для краткости, будем использовать термины *э л е к т р и ч е с к и й* *т о к* или *т о к*). Такими носителями в металлах, как известно, являются отрицательно заряженные частицы — электроны, в жидкостях и газах — как положительно, так и отрицательно заряженные ионы.

В любом проводнике упорядоченное перемещение носителей заряда происходит в одном из двух возможных направлений, в соответствии с этим ток также имеет одно из двух направлений. *За направление тока независимо от природы носителей электрического заряда и их типа принимают направление, в котором перемещаются (или могли бы перемещаться) носители положительного заряда.* Таким образом, направление электрического тока в наиболее распространенных проводниковых материалах — металлах противоположно фактическому направлению перемещения носителей заряда — электронов. О направлении тока судят по его знаку, который зависит от того, совпадает или нет направление тока с направлением, условно принятым за



положительное. Условно-положительное направление тока при расчетах электрических цепей может быть выбрано совершенно произвольно. Если в результате расчетов, выполненных с учетом выбранного направления, ток получится со знаком плюс, значит его направление, т. е. направление перемещения положительных зарядов, совпадает с направлением, выбранным за положительное; если ток получится со знаком минус, значит его направление противоположно условно-положительному.

Количественно ток оценивают зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени. Пусть  $q = q(t)$  — это заряд, прошедший через произвольное поперечное сечение проводника к моменту времени  $t$  (рис. 1.1, а). Рассмотрим два момента времени  $t_1$  и  $t_1 + \Delta t$ , которым соответствуют заряды  $q(t_1)$  и  $q(t_1 + \Delta t)$ . По определению, ток в момент времени  $t_1$  равен пределу отношения количества электричества, переносимого свободными носителями электрического заряда через сечение проводника за промежуток времени  $\Delta t$ , к длительности этого промежутка времени при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

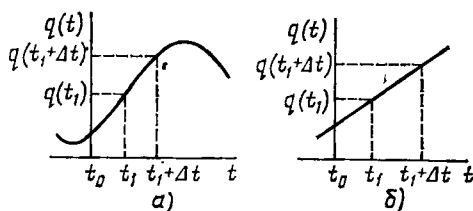


Рис. 1.1. Зависимость заряда, протекающего через поперечное сечение проводника, от времени:

а — нелинейная; б — линейная

$$i(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t_1 + \Delta t) - q(t_1)}{\Delta t} = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=t_1} \quad (1.1)$$

Таким образом, ток в произвольный момент времени  $t$  представляет собой скалярную величину, равную производной по времени от электрического заряда, переносимого через рассматриваемое сечение проводника. Иными словами, ток численно равен скорости изменения электрического заряда во времени.

В общем случае значение тока  $i$  в произвольный момент времени  $t$  (мгновенное значение тока) является функцией времени  $i = i(t)$ . В частном случае, если заряд  $q$  является линейной функцией  $t$  (рис. 1.1, б), то скорость изменения заряда во времени  $I$  — величина постоянная, равная отношению заряда  $q(t)$ , перенесенного за промежуток времени  $t$ , к длительности этого промежутка:

$$i(t) = dq/dt = q/t = I = \text{const.}$$

Таким образом, ток может быть постоянным (неизменным во времени) или переменным.

В Международной системе единиц (СИ) заряд выражают в кулонах (Кл), время в секундах (с), ток в амперах (А). При постоянном токе в 1 А через поперечное сечение проводника за промежуток времени, равный 1 с, переносится заряд в 1 Кл.

## Напряжение

Как известно, на всякий заряд, помещенный в электрическое поле, действует сила, значение и направление которой определяются напряженностью электрического поля, а также зарядом и его знаком. Если носитель заряда является свободным, т. е. не закрепленным в какой-то фиксированной точке, то под действием приложенной силы он перемещается. Перемещение заряда происходит за счет энергии электрического поля. При перемещении единичного положительного заряда между двумя любыми точками А и Б электрического поля силами электрического поля совершается работа, равная разности потенциалов этих точек. Напомним, что потенциал  $\varphi_A$  произвольной точки А электрического поля определяется как работа, которая совершается силами электрического поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность. Разность потенциалов точек А и Б называется напряжением между этими точками:

$$u = \varphi_A - \varphi_B.$$

Напряжение между точками А и Б электрической цепи может быть определено как предел отношения энергии электрического поля  $w$ , затрачиваемой на перенос положительного заряда  $q$  из точки А в точку Б, к этому заряду при  $q \rightarrow 0$ :

$$u = dw/dq. \quad (1.2)$$

В Международной системе единиц напряжение выражают в в о л ь т а х (В), а работу в д ж о у л я х (Дж). При перемещении электрического заряда в 1 Кл между точками электрической цепи, разность потенциалов которых равна 1 В, совершается работа в 1 Дж.

Напряжение представляет собой скалярную величину, которой приписывается определенное направление. Обычно под направлением напряжения понимают направление, в котором перемещаются (или могли бы перемещаться) под действием электрического поля свободные носители положительного заряда, т. е. направление от точки цепи с большим потенциалом к точке цепи с меньшим потенциалом. Очевидно, что на участках цепи, в которых не содержатся источники энергии и перемещение носителей заряда осуществляется за счет энергии электрического поля, направления напряжения и тока совпадают.

Внутри источников энергии носители электрического заряда перемещаются за счет энергии с т о р о н н и х сил, т. е. сил, которые обусловлены неэлектромагнитными при макроскопическом рассмотрении процессами, такими, как химические реакции, тепловые процессы, воздействие механических сил. Носители заряда через источники перемещаются в направлении, противоположном направлению действия сил электрического поля, в частности носители положительного заряда — от зажима источника с более низким потенциалом к зажиму с более высоким потенциалом. Таким образом, направление тока через источник противоположно направлению напряжения.

При расчетах электрических цепей направление напряжения сравнивается с направлением, условно выбранным за положительное.

Если в результате расчетов напряжение на рассматриваемом участке цепи получится со знаком плюс, значит направление напряжения совпадает с направлением, условно принятым за положительное, если напряжение получится со знаком минус — его направление противоположно условно-положительному.

### Электродвижущая сила

При перемещении сторонними силами носителя электрического заряда внутри источника энергия процессов, вызывающих эти силы, преобразуется в электрическую энергию. Источники электрической энергии характеризуются электродвижущей силой (э. д. с.), которая может быть определена как работа сторонних сил, затрачиваемая на перемещение единичного положительного заряда внутри источника от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом. Независимо от природы сторонних сил э. д. с. источника численно равна напряжению между зажимами источника энергии при отсутствии в нем тока. Электродвижущая сила — скалярная величина, направление которой совпадает с направлением перемещения положительных зарядов внутри источника, т. е. с направлением тока. Напряжение на участке цепи и э. д. с. являются функциями времени, либо сохраняют постоянные значения. Постоянные напряжения и э. д. с. обозначают соответственно  $U_-$  и  $E_-$ . Переменные напряжения и э. д. с. характеризуют мгновенными значениями и обозначают соответственно  $u = u(t)$  и  $e = e(t)$ .

### Мощность и энергия

Пусть разность потенциалов точек А и Б электрической цепи равна  $u$ . При перемещении элементарного электрического заряда  $dq$  через участок цепи, лежащий между этими точками, силы электрического поля совершают элементарную работу, которая в соответствии с (1.2) и (1.1) равна

$$dw = udq = uidt. \quad (1.3)$$

Элементарная работа характеризует изменение энергии электрического поля и количественно равна энергии, поступившей в рассматриваемый участок цепи за промежуток времени  $dt$ . Эту энергию к моменту времени  $t = t_1$  определяют интегрированием (1.3):

$$w = w(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} ui dt. \quad (1.4)$$

Нижний предел интегрирования  $t = -\infty$  выбирают для того, чтобы учесть все поступления энергии в цепь. Если для любого момента времени  $t$  энергии  $w(t) \geq 0$ , то рассматриваемый участок цепи является потребителем энергии и называется п а с с и в н ы м. Если хотя бы для какого-то момента времени энергия  $w(t) < 0$ , то участок цепи содержит источники энергии и называется а к т и в н ы м.

Производная энергии по времени, т. е. скорость поступления энергии в текущий момент времени  $t$ , представляет собой мгновенную мощность участка цепи

$$p = dw/dt = ui. \quad (1.5)$$

Как видно из выражения (1.5), *мгновенная мощность равна произведению мгновенных значений напряжения и тока*. Если в рассматриваемый момент времени направления тока и напряжения совпадают, то мгновенная мощность исследуемого участка цепи положительна. Это означает, что в данный момент времени участок цепи получает электрическую энергию от остальной части цепи. Если направления напряжения и тока не совпадают, значение мгновенной мощности  $p$  отрицательно, в данный момент времени участок цепи отдает электрическую энергию остальной части цепи.

Подставляя выражение (1.5) в (1.4), выразим энергию, поступившую в участок цепи к моменту времени  $t = t_1$ , через мгновенную мощность

$$w(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} p dt. \quad (1.6)$$

Очевидно, что энергия  $W$ , поступившая в цепь за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , также может быть выражена через мгновенную мощность  $p$ :

$$W = w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p dt.$$

В системе единиц СИ работу и энергию выражают в джоулях (Дж), а мощность — в ваттах (Вт).

### Схема электрической цепи

Электрическая схема — это условное графическое изображение электрической цепи. В электротехнике и радиоэлектронике встречаются различные типы электрических схем: структурные, принципиальные и эквивалентные (расчетные) схемы.

Структурная электрическая схема это условное графическое изображение реальной цепи, на котором отражены только важнейшие функциональные части цепи и основные связи между ними.

Принципиальная электрическая схема представляет собой графическое изображение реальной цепи, на котором с помощью условных графических обозначений показаны все элементы цепи и все соединения между ними. Каждому реальному элементу электрической цепи (транзистору, резистору, конденсатору, трансформатору и т. п.) соответствуют условные графическое и буквенное обозначения, определяемые действующими стандартами ЕСКД.

Эквивалентной, или расчетной, электрической схемой цепи называется условное графическое изображе-

ние моделирующей цепи, т. е. цепи, составленной из идеализированных элементов, замещающей исследуемую реальную цепь в рамках решаемой задачи. Каждому идеализированному элементу цепи присваиваются определенные условные графическое и буквенное обозначения (эти обозначения не стандартизированы). Эквивалентная схема цепи может быть получена из принципиальной электрической схемы, если каждый изображенный на ней реальный элемент заменить его эквивалентной схемой или схемой замещения.

**С х е м а з а м е щ е н и я** реального элемента представляет собой условное графическое изображение идеализированной электрической цепи, моделирующей данный элемент в рамках поставленной задачи.

Следует иметь в виду, что в зависимости от обстоятельств (требуемая точность расчета, диапазон исследуемых частот, используемый метод расчета и т. п.) *каждому элементу электрической цепи и всей цепи в целом могут быть поставлены в соответствие различные моделирующие цепи и различные эквивалентные электрические схемы*, в частности: эквивалентные схемы цепи по постоянному и по переменному токам, для высоких и низких частот, для мгновенных значений токов и напряжений и для преобразованных токов и напряжений.

Отметим, что в целях компактности изложения в литературе часто не делается различий между моделирующей цепью (которая строится только мысленно) и эквивалентной схемой цепи (схемой замещения), при этом схема замещения непосредственно рассматривается как расчетная модель цепи.

## § 1.2. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

### Сопротивление

Используемые в теории цепей идеализированные двухполюсные элементы — сопротивление, емкость и индуктивность — являются пассивными, так как энергия, потребляемая ими от остальной части цепи в любой момент времени, положительна или равна нулю.

**С о п р о т и в л е н и е** — идеализированный пассивный элемент, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в какой-либо другой вид энергии, например в тепловую, механическую или световую. Запасания энергии электрического или магнитного полей в сопротивлении не происходит. Термин «сопротивление» используют не только для обозначения идеализированного элемента, но и как количественную характеристику способности этого элемента преобразовывать электрическую энергию в другие виды энергии.

По свойствам к идеализированному пассивному элементу — сопротивлению наиболее близки высококачественные резисторы — реальные элементы электрической цепи, в которых электрическая энергия в основном преобразуется в тепловую. Важнейшей характеристикой резистора, которая определяет меру преобразования электрической энергии в тепловую, является его сопротивление. Помимо основного процесса — преобразования электрической энергии в теп-

ловую — в резисторе имеют место также другие процессы, например запасание энергии электрического и магнитного полей. Идеализированный элемент электрической цепи — сопротивление — можно рассматривать как упрощенную модель резистора, в которой абстрагируется только его основная характеристика — сопротивление.

Итак, термин «сопротивление» можно использовать тройным образом — как основную характеристику реального элемента электрической цепи — резистора, как название идеализированного элемента электрической цепи и как единственную характеристику этого элемента.\*)

Условное графическое обозначение сопротивления приведено на рис. 1.2. Условно-положительные направления напряжения и тока показаны стрелками. Рядом с условным графическим обозначением сопротивления ставят его условное буквенное обозначение  $R$ .

Вольт-амперная характеристика резистора, т. е. зависимость между значениями тока и напряжения на его зажимах  $u = u(i)$  или  $i = i(u)$ , в общем случае имеет нелинейный характер.

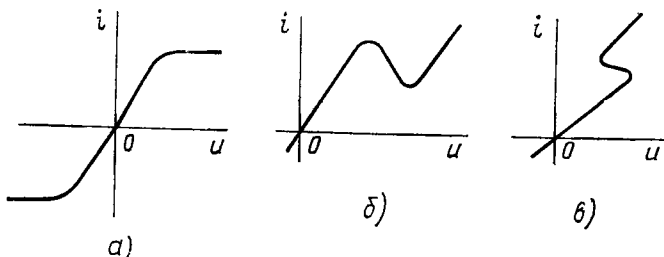
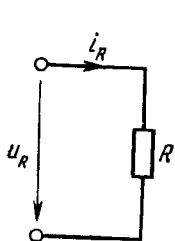


Рис. 1.2. Условное графическое обозначение сопротивления

Рис. 1.3. Статические вольт-амперные характеристики различных резистивных элементов

Соответствующие зависимости, полученные для постоянных токов и напряжений, или, точнее, для случая бесконечно медленно изменяющихся токов и напряжений, получили название статических вольт-амперных характеристик (рис. 1.3, а—в). Зависимости между мгновенными значениями тока и напряжения на зажимах резистора называются динамическими вольт-амперными характеристиками.

Используя зависимость между мгновенными значениями токов и напряжений на зажимах резистора, можно определить его статисти-

\*) Использование термина «сопротивление», а также вводимых далее терминов «емкость» и «индуктивность», не только в качестве характеристик реального и идеализированного элементов, но и в качестве названий идеализированных элементов является не вполне удачным и оправдывается только компактностью изложения. Более точными, но в то же время более громоздкими были бы следующие названия соответствующих идеализированных элементов: «идеальный резистор», «идеальный конденсатор», «идеальная индуктивная катушка» или «идеальный резистивный элемент», «идеальный емкостной элемент» и «идеальный индуктивный элемент».

ческое и динамическое сопротивление. Статическое сопротивление — это отношение мгновенных значений напряжения и тока на зажимах резистора:

$$R_{ст} = u_R / i_R. \quad (1.7)$$

Динамическое сопротивление резистора определяется производной мгновенного значения напряжения на его зажимах по току:

$$R_{дин} = du_R / di_R. \quad (1.8)$$

Величина, равная динамическому сопротивлению при бесконечно медленном изменении тока и напряжения, получила название дифференциального сопротивления  $R_{диф}$ . В общем случае динамическое сопротивление резистора не равно статическому, причем значения обеих величин зависят от положения рабочей точки, т. е. от выбора пары значений  $u_1$  и  $i_1$  на характеристике  $u = u(i)$  или  $i = i(u)$ , при которых производится определение  $R_{ст}$  и  $R_{дин}$ . Пусть, например, определение  $R_{ст}$  и  $R_{дин}$  производится в рабочей точке  $i = i_1$ ,  $u = u_1$  (рис. 1.4, а). Значение  $R_{ст}$  пропорционально  $\operatorname{tg} \alpha$ , т. е. тангенсу угла наклона прямой, проведенной из начала координат в рабочую точку; значение  $R_{дин}$  пропорционально  $\operatorname{tg} \beta$ , т. е. тангенсу угла наклона касательной к кривой  $u = u(i)$ , в точке  $i = i_1$ ,  $u = u_1 = u(i_1)$ . Очевидно, что для рассматриваемого случая  $R_{ст} > R_{дин}$ . Анализируя рис. 1.3, нетрудно убедиться, что в зависимости от выбора рабочей точки значение  $R_{дин}$  может быть как больше, так и меньше нуля, а в частном случае может равняться нулю, в то время как значение  $R_{ст}$  всегда больше нуля.

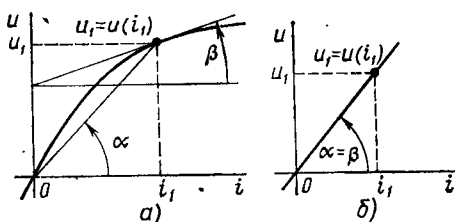


Рис. 1.4. Вольт-амперные характеристики резисторов с нелинейным (а) и линейным (б) сопротивлениями

Когда зависимость между напряжением и током на зажимах резистора имеет линейный характер (рис. 1.4, б), значения  $R_{ст}$  и  $R_{дин}$  не зависят от выбора рабочей точки и равны между собой:  $R_{ст} = R_{дин} = R$ , где  $R$  — сопротивление резистора.

Резистор, для которого зависимость напряжения от тока имеет линейный характер и, следовательно, значения статического и динамического сопротивлений равны между собой и не зависят от выбора рабочей точки, называется резистором с линейным сопротивлением. Резистор, для которого зависимость  $u = u(i)$  или  $i = i(u)$  имеет нелинейный характер, называется резистором с нелинейным сопротивлением. Следует отметить, что для большинства резисторов зависимости  $u = u(i)$  или  $i = i(u)$  несколько отличаются от линейной, однако в ограниченном диапазоне изменений напряжения этой нелинейностью можно пре-

небрежь и рассматривать сопротивление такого резистора как линейное.

Идеализированный элемент электрической цепи — сопротивление — также характеризуется зависимостью между током и напряжением на его зажимах и определяемыми по этой зависимости значениями статического и динамического сопротивлений. Для линейного сопротивления зависимость между током и напряжением имеет линейный характер, для нелинейного сопротивления эта зависимость отличается от линейной. В дальнейшем, если не будет оговорено особо, ограничимся рассмотрением цепей с линейным сопротивлением.

Зависимость между током и напряжением на зажимах линейного сопротивления подчиняется закону Ома, который можно записать в виде

$$u_R = R i_R \quad (1.9)$$

или

$$i_R = G u_R, \quad (1.10)$$

где  $G = 1/R$  — проводимость.

В ряде случаев при исследовании электрических цепей проводимость удобно рассматривать в качестве отдельного идеализированного двухполюсного элемента, имеющего такие же свойства и такое же условное графическое обозначение, как сопротивление, и буквенное обозначение  $G$ . Идеализированные элементы электрической цепи сопротивление и проводимость относятся к так называемым резистивным или диссипативным (от латинского *dissipare* — рассеивать); наличие их в цепи приводит к потерям электрической энергии, или, точнее, к необратимому преобразованию ее в другие виды энергии.

Значения сопротивления  $R$  и проводимости  $G$  не зависят от выбора рабочей точки, причем  $R > 0$  и  $G > 0$ . В Международной системе единиц сопротивление выражают в омах (Ом), а проводимость в сименсах (См).

Мгновенная мощность сопротивления может быть найдена через значения сопротивления  $R$  или проводимости  $G$ :

$$p_R = u_R i_R = R i_R^2 = G u_R^2. \quad (1.11)$$

Мгновенная мощность сопротивления при выбранных положительных направлениях тока и напряжения (см. рис. 1.2) — положительная величина. Электрическая энергия, поступающая в сопротивление и преобразуемая в нем в другие формы энергии, также всегда положительная (кроме случая  $u_R = i_R = 0$ ):

$$w_R(t) = \int_{-\infty}^t p_R dt = R \int_{-\infty}^t i_R^2 dt = G \int_{-\infty}^t u_R^2 dt > 0. \quad (1.12)$$

Отметим, что  $w(t)$  является неубывающей функцией времени (поскольку она вычисляется как площадь, заключенная под кривой  $p = p(t) > 0$ ). Таким образом, в любой момент времени сопротивле-



ние может только потреблять энергию от источников и ни в какие моменты времени сопротивление не может отдавать электрическую энергию другим элементам цепи.

## Емкость

Емкостью называется идеализированный элемент электрической цепи, обладающий свойством запасать энергию электрического поля, причем запасаения энергии магнитного поля или преобразования электрической энергии в другие виды энергии в ней не происходит. По свойствам к идеализированному элементу — емкости — наиболее близки реальные элементы электрической цепи — конденсаторы. Основной особенностью конденсатора является его способность запасать энергию электрического поля, однако в отличие от идеализированного элемента — емкости — в конденсаторе имеют место потери энергии в диэлектрике и обкладках, т. е. преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а также происходит запасаение энергии магнитного поля.

Таким образом, термин «емкость» можно использовать как название идеализированного элемента электрической цепи, как характеристику этого элемента, а также как основную характеристику конденсатора, определяющую его способность запасать энергию электрического поля.

Условное графическое обозначение емкости приведено на рис. 1.5.

Зависимость заряда  $q$ , накопленного в емкости, от напряжения  $u_c$ , называемая кулон-вольтной характеристикой, имеет в общем случае нелинейный характер (рис. 1.6, кривая 1).

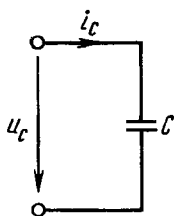


Рис. 1.5. Условное графическое обозначение емкости

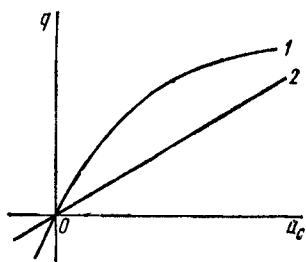


Рис. 1.6. Кулон-вольтные характеристики емкости: 1 — нелинейная; 2 — линейная

Количественно зависимость заряда, накопленного в емкости, от напряжения оценивают значениями статической и динамической емкостей:  $C_{ст} = q/u$  и  $C_{дин} = dq/du$ .

В общем случае динамическая емкость не равна статической, причем обе величины зависят от выбора рабочей точки на характеристике  $q = q(u)$ . Если зависимость заряда, накопленного в емкости, от напряжения имеет линейный характер (рис. 1.6, кривая 2), то значения динамической и статической емкостей равны и не зависят от напряжения:  $C_{дин} = C_{ст} = C$

В системе единиц СИ емкости  $C$ ,  $C_{ст}$  и  $C_{дин}$  выражают в фарадах (Ф).

Емкость, значение которой не зависит от напряжения, называется *линейной*; емкость, значение которой зависит от напряжения, — *нелинейной*. В дальнейшем, если не будет сделано особых оговорок, ограничимся рассмотрением только цепей с линейной емкостью.

Найдем зависимость между мгновенными значениями тока и напряжения на зажимах линейной емкости. Очевидно, что всякое изменение напряжения  $u_C$  на зажимах емкости должно, в соответствии с видом зависимости  $q = q(u)$ , привести к изменению заряда  $q$ . Производная заряда по времени определяет ток емкости

$$i_C = dq/dt = (dq/du_C) (du_C/dt).$$

Учитывая, что для линейной емкости производная заряда по напряжению равна  $C$  и не зависит от напряжения  $u_C$ :  $C = dq/du_C = dq/u_C$ , получаем

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.13)$$

Как видно из выражения (1.13), *ток емкости пропорционален скорости изменения ее напряжения. Если напряжение на зажимах емкости не изменяется во времени, то ток емкости равен нулю.* Таким образом, сопротивление емкости постоянному току бесконечно велико.

Используя выражение (1.13), находим зависимость напряжения на емкости от тока:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt. \quad (1.14)$$

Интегрирование ведется начиная с момента времени  $t = -\infty$  для того, чтобы учесть все возможные изменения заряда емкости и, следовательно, напряжения  $u_C$ , причем предполагается, что в момент времени  $t = -\infty$  напряжение на зажимах емкости равно нулю.

Пусть наблюдение процессов в емкости началось в момент времени  $t = t_0$ . Напряжение емкости в начальный момент

$$u_C(t_0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C dt. \quad (1.15)$$

Разбивая интеграл (1.14) на два:  $u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i_C dt + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt$  и используя выражение (1.15), находим напряжение на емкости в произвольный момент времени  $t$ :

$$u_C = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt. \quad (1.16)$$

## Мгновенная мощность емкости

$$p_C = u_C i_C = C u_C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.17)$$

Если напряжение на емкости (см. рис. 1.5) положительно (т. е. его направление совпадает с условно-положительным направлением, указанным стрелкой) и продолжает возрастать, то мгновенная мощность емкости в соответствии с (1.17) будет положительной. В этом случае энергия поступает в емкость, т. е. она заряжается.

Если  $u_C > 0$  и убывает, т. е.  $du_C/dt < 0$ , то мгновенная мощность емкости отрицательна. Емкость при этом разряжается, т. е. отдает накопленную энергию во внешнюю цепь.

*Энергия электрического поля, запасенная емкостью в произвольный момент времени  $t$ , определяется напряжением емкости или ее зарядом:*

$$w_C = w_C(t) = \int_{-\infty}^t p_C dt = C \int_0^{u_C} u du = C \frac{u_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.18)$$

Очевидно, что в любой момент времени  $t$  энергия, запасенная в емкости, будет неотрицательной величиной.

Таким образом, емкость является пассивным идеализированным элементом электрической цепи, который в зависимости от режима работы может либо запасать энергию электрического поля, получаемую из внешней по отношению к емкости цепи, либо отдавать накопленную энергию во внешнюю цепь.

## Индуктивность

Индуктивностью называется идеализированный элемент электрической цепи, в котором происходит запасание энергии магнитного поля. Запасание энергии электрического поля или преобразования электрической энергии в другие виды энергии в ней не происходит. Наиболее близким к идеализированному элементу — индуктивности — является реальный элемент электрической цепи — индуктивная катушка. В отличие от индуктивности в индуктивной катушке имеют место также запасание энергии электрического поля и преобразование электрической энергии в другие виды энергии, в частности в тепловую. Количественно способность реального и идеализированного элементов электрической цепи запасать энергию магнитного поля характеризуется параметром, называемым индуктивностью.

Таким образом термин «индуктивность» применяется как название идеализированного элемента электрической цепи, как название параметра, количественно характеризующего свойства этого элемента, и как название основного параметра индуктивной катушки.

Условное графическое обозначение индуктивности приведено на рис. 1.7.

Связь между напряжением и током в индуктивной катушке определяется законом элек-

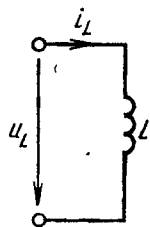


Рис. 1.7. Условное графическое обозначение индуктивности

индукции, из которого следует, что при изменении магнитного потока, пронизывающего индуктивную катушку, в ней наводится электродвижущая сила  $e$ , пропорциональная скорости изменения потокосцепления катушки  $\Psi$  и направленная таким образом, чтобы вызываемый ею ток стремился воспрепятствовать изменению магнитного потока:

$$e = -d\Psi/dt. \quad (1.19)$$

Потокосцепление катушки равно алгебраической сумме магнитных потоков  $\Phi_i$ , пронизывающих ее отдельные витки:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \Phi_i, \quad (1.20)$$

где  $N$  — число витков катушки.

Если магнитный поток, пронизывающий все витки катушки, одинаков ( $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_N = \Phi$ ), выражение (1.20) приводится к виду

$$\Psi = N\Phi.$$

В системе единиц СИ магнитный поток и потокосцепление выражают в веберах (Вб).

Магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий каждый из витков катушки, в общем случае может содержать две составляющие: магнитный поток самоиндукции  $\Phi_{\text{СИ}}$  и магнитный поток внешних полей  $\Phi_{\text{ВН}}$ :

$$\Phi = \Phi_{\text{СИ}} + \Phi_{\text{ВН}}.$$

Первая составляющая представляет собой магнитный поток, вызванный протекающим по катушке током; вторая — определяется магнитными полями, существование которых не связано с током катушки — магнитным полем Земли, магнитными полями других катушек и постоянных магнитов. Если вторая составляющая магнитного потока вызвана магнитным полем другой катушки, то ее называют магнитным потоком взаимной индукции.

Потокосцепление катушки  $\Psi$ , так же как и магнитный поток  $\Phi$ , может быть представлено в виде суммы двух составляющих: потокосцепления самоиндукции  $\Psi_{\text{СИ}}$  и потокосцепления внешних полей  $\Psi_{\text{ВН}}$ :

$$\Psi = \Psi_{\text{СИ}} + \Psi_{\text{ВН}}.$$

Наведенная в индуктивной катушке э. д. с.  $e$ , в свою очередь, может быть представлена в виде суммы э. д. с. самоиндукции, которая вызвана изменением магнитного потока самоиндукции, и э. д. с., вызванной изменением магнитного потока внешних по отношению к катушке полей:

$$e = e_{\text{СИ}} + e_{\text{ВН}}.$$

Здесь  $e_{\text{СИ}}$  — э. д. с. самоиндукции;  $e_{\text{ВН}}$  — э. д. с. внешних полей.

Если магнитные потоки внешних по отношению к индуктивной катушке полей равны нулю и катушку пронизывает только поток самоиндукции, то в катушке наводится только э. д. с. самоиндукции

$$e = e_{\text{си}} = - d\Psi_{\text{си}}/dt. \quad (1.21)$$

Потокосцепление самоиндукции  $\Psi_{\text{си}}$  зависит от протекающего по катушке тока  $i_L$ . Эта зависимость, называемая в вольт-амперной характеристикой индуктивной катушки, в общем случае имеет нелинейный характер (рис. 1.8, кривая 1). В частном случае, например для катушки без магнитного сердечника, эта зависимость может быть линейной (рис. 1.8, кривая 2). Количественно зависимость потокосцепления самоиндукции от тока определяется статической  $L_{\text{ст}}$  и динамической  $L_{\text{дин}}$  индуктивностями катушки:

$$L_{\text{ст}} = \Psi_{\text{си}}/i_L, \quad L_{\text{дин}} = d\Psi_{\text{си}}/di_L.$$

Значения  $L_{\text{ст}}$  и  $L_{\text{дин}}$  в общем случае не равны между собой и зависят от выбора рабочей точки (значения тока  $i_L$ ). При линейной зависимости потокосцепления самоиндукции от тока статическая и динамическая индуктивности катушек равны и не зависят от выбора рабочей точки:  $L_{\text{ст}} = L_{\text{дин}} = L$ .

В системе единиц СИ индуктивности  $L_{\text{ст}}$ ,  $L_{\text{дин}}$  и  $L$  выражают в генри (Гн). В дальнейшем, если не будет сделано особых оговорок, ограничимся рассмотрением только цепей с линейной индуктивностью.

Для катушки с линейной индуктивностью выражение (1.21) может быть преобразовано к виду

$$e = - \frac{d\Psi_{\text{си}}}{dt} = - \frac{d\Psi_{\text{си}}}{di_L} \frac{di_L}{dt} = - \frac{\Psi_{\text{си}}}{i_L} \frac{di_L}{dt} = - L \frac{di_L}{dt}.$$

При анализе цепей обычно рассматривают не значение э. д. с., наведенной в катушке, а напряжение  $u_L$  на ее зажимах, положительное направление которого выбирают совпадающим с положительным направлением тока (см. рис. 1.7):

$$u_L = -e = L \frac{di_L}{dt}. \quad (1.22)$$

Идеализированный элемент электрической цепи — индуктивность, можно рассматривать как упрощенную модель индуктивной катушки, отражающую способность катушки запасать энергию магнитного поля. Для линейной индуктивности напряжение  $u_L$  на ее зажимах пропорционально скорости изменения тока  $i_L$  и определяется выражением (1.22). При протекании через индуктивность постоянного тока напряжение на ее зажимах равно нулю, следовательно, сопротивление индуктивности постоянному току равно нулю.

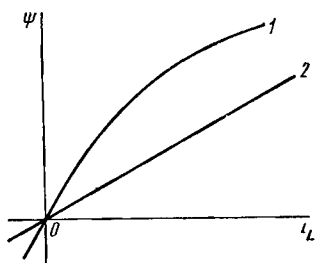


Рис. 1.8 Вольт-амперные характеристики индуктивной катушки:

1 — нелинейная; 2 — линейная

Зависимость тока индуктивности  $i_L$  от напряжения  $u_L$  может быть найдена путем интегрирования выражения (1.22):

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

Чтобы учесть все изменения напряжения на индуктивности, имевшие место до рассматриваемого момента времени  $t$ , интегрирование ведется начиная с  $t = -\infty$ , причем принимается, что при  $t = -\infty$  ток индуктивности равен нулю. В момент времени  $t = t_0$

$$i_L(t_0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L dt.$$

При известном значении  $i_L(t_0)$  интегрирование (1.22) в пределах от  $-\infty$  до  $t$  может быть заменено интегрированием в пределах от  $t_0$  до  $t$ :

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u_L dt + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt. \quad (1.23)$$

Мгновенная мощность индуктивности  $p_L$  определяется произведением мгновенных значений тока  $i_L$  и напряжения  $u_L$ :

$$p_L = u_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt} \quad (1.24)$$

и будет положительной в моменты времени, когда индуктивность потребляет энергию от остальной части цепи ( $i_L$  и  $u_L$  имеют одинаковый знак). В моменты времени, когда  $i_L$  и  $u_L$  имеют различные знаки, индуктивность отдает запасенную ранее энергию остальной части цепи, т. е.  $p_L < 0$ .

Энергия, запасенная в индуктивности в произвольный момент времени  $t$ :

$$\omega_L(t) = \int_{-\infty}^t p_L dt = L \int_0^{i_L} i di = \frac{L i_L^2}{2} = \frac{\Psi_{сн}^2}{2L}. \quad (1.25)$$

Таким образом, энергия, запасенная в индуктивности, является неотрицательной величиной и определяется только током индуктивности или потокоцеплением самоиндукции.

Идеализированные элементы электрической цепи (емкость и индуктивность), способные запастись энергией электрического или магнитного полей, называются энергоемкими или реактивными м.и.

## Дуальные элементы и цепи

Рассматривая полученные ранее соотношения (табл. 1.1), приходим к заключению, что выражения, соответствующие попарно сопротивлению и проводимости, емкости и индуктивности, имеют подобную структуру. Если в выражениях, описывающих основные соотношения для сопротивления, заменить  $i_R$  на  $i_G$ ,  $u_R$  на  $i_G$ ,  $R$  на  $G$ , то получатся основные соотношения для проводимости. Аналогично, выражения, описывающие основные соотношения для емкости и индуктивности, могут быть получены одно из другого путем замены  $u_L$  на  $i_C$ ,  $i_L$  на  $u_C$ ,  $L$  на  $C$ .

Таблица 1.1. Ток, напряжение, мощность и энергия идеализированных пассивных элементов

Тип идеализированного элемента	Основные уравнения для			
	тока	напряжения	мгновенной мощности	энергии
Сопротивление	$i_R = u_R / R$	$u_R = R i_R$	$p_R = R i_R^2$	$w_R = \int_{-\infty}^t R i_R^2 dt$
Проводимость	$i_G = G u_G$	$u_G = i_G / G$	$p_G = G u_G^2$	$w_G = \int_{-\infty}^t G u_G^2 dt$
Емкость	$i_C = C \frac{du_C}{dt}$	$u_C = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt$	$p_C = C u_C \frac{du_C}{dt}$	$w_C = C u_C^2 / 2$
Индуктивность	$i_L = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L dt$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$p_L = L i_L \frac{di_L}{dt}$	$w_L = L i_L^2 / 2$

Элементы, для которых основные соотношения имеют одинаковую структуру и могут быть получены одно из другого путем таких замен, называются дуальными. Таким образом, емкость и индуктивность, сопротивление и проводимость (попарно) являются дуальными элементами.

Свойством дуальности обладают не только рассмотренные идеализированные пассивные элементы. Из последующих разделов будет видно, что дуальными также могут быть идеализированные активные элементы и электрические цепи, составленные из идеализированных активных и пассивных элементов.

В ряде случаев использование принципа дуальности позволяет облегчить исследование процессов в цепи. Так, если известны основ-

ные соотношения, описывающие процессы в некоторой цепи, то соответствующие соотношения для дуальной цепи могут быть получены без вывода, на основании использования свойства дуальности.

### Схемы замещения реальных элементов электрических цепей

При описании идеализированных пассивных элементов электрических цепей подчеркивалось, что каждый из этих элементов отражает только одну существенную особенность электромагнитных процессов, имеющих место в реальных элементах электрических цепей. Каждый из рассмотренных идеализированных элементов имеет в качестве «прототипа» реальный пассивный элемент: резистор, индуктивную катушку или конденсатор. В то же время отмечалось, что процессы в реальных элементах существенно сложнее, чем в идеализированных, в частности в каждом реальном элементе наряду с основным имеют место также другие, так называемые паразитные процессы.

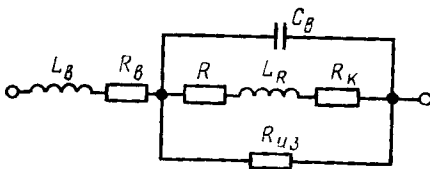


Рис 1.9. Схема замещения резистора

Вследствие этого схемы замещения реальных элементов в общем случае состоят из идеализированных элементов различных типов.

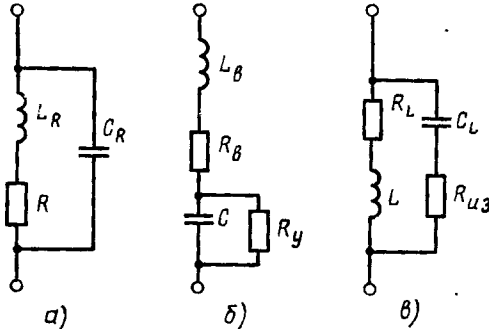


Рис 1.10. Упрощенные схемы замещения резистора (а), конденсатора (б) и индуктивной катушки (в)

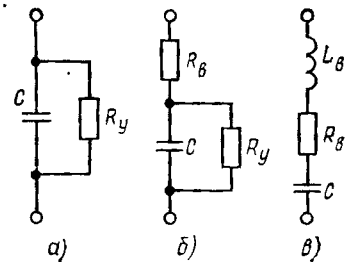


Рис. 1.11. Эквивалентные схемы конденсатора для низких (а), средних (б) и высоких (в) частот

На рис. 1.9 в качестве примера приведена схема замещения резистора, в которой наряду с основным элементом — сопротивлением токонесущего слоя  $R$  — содержатся паразитные элементы: сопротивление изоляции  $R_{из}$ , индуктивность токонесущего слоя  $L_R$ , сопротивление контактов  $R_K$ , индуктивность выводов  $L_B$ , сопротивление выводов  $R_B$  и емкость между выводами  $C_B$ .

Вид эквивалентной схемы и параметры входящих в нее идеализированных элементов существенным образом зависят от конструкции



реального элемента, технологии его изготовления и особенностей применяемых материалов. Чем выше требуемая точность расчетов, тем большее количество факторов должно быть принято во внимание и тем более сложный вид будет иметь эквивалентная схема каждого элемента. Вместе с тем излишнее усложнение эквивалентных схем существенно увеличивает трудоемкость расчетов, вследствие чего при исследовании цепей стремятся использовать упрощенные эквивалентные схемы, содержащие минимально допустимое число элементов (рис. 1.10).

Следует отметить, что схемы замещения одного и того же элемента могут иметь различный вид в зависимости от рассматриваемого диапазона частот (рис. 1.11). Так, на довольно низких частотах при невысоких требованиях к точности расчетов эквивалентная схема индуктивной катушки может состоять только из индуктивности, характеризующей способность катушки запасать энергию магнитного поля, и сопротивления, отражающего все виды потерь в ней. При этих же условиях эквивалентная схема резистора может состоять из одного элемента — сопротивления.

### § 1.3. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ АКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

#### Идеальный источник напряжения

Идеальные источники тока и напряжения представляют собой идеализированные источники энергии. Они обладают способностью отдавать энергию подключенным к ним участкам электрической цепи, другими словами, потребляемая ими энергия может быть отрицательной. Таким образом, идеальные источники тока и напряжения относятся к идеализированным активным элементам.

Идеальный источник напряжения (источник напряжения, источник э. д. с.) представляет собой идеализированный активный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от протекающего через него тока. Напряжение  $u$  на зажимах источника напряжения равно электродвижущей силе  $e(t)$  и может быть произвольной функцией времени. В частном случае  $e(t) = E_0$  может не зависеть от времени. Источник такого типа называется источником постоянного напряжения (источником постоянной э. д. с.).

Условное графическое обозначение источника напряжения приведено на рис. 1.12, а. Стрелка внутри кружка на рисунке указывает направление э. д. с. Для источников постоянного напряжения она направлена от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с более высоким потенциалом, в то время как напряжение на внешних зажимах источника направлено от зажима с более высоким потенциалом к зажиму с меньшим потенциалом.

Внешней характеристикой любого источника электрической энергии называется зависимость напряжения на его зажимах от тока источника. Внешняя характеристика источника постоянного напряжения является прямой линией, параллельной оси токов (рис. 1.12, б).

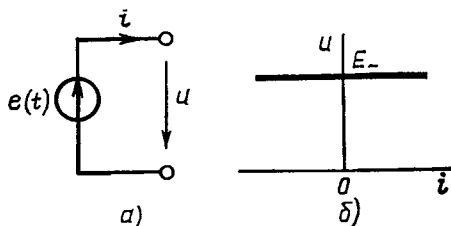


Рис. 1.12. Идеальный источник напряжения:  
 а — условное графическое обозначение; б — внешняя характеристика источника постоянного напряжения

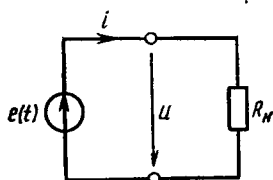


Рис. 1.13. Идеальный источник напряжения с нагрузкой

Если подключить к зажимам источника э. д. с. сопротивление нагрузки  $R_N$  (рис. 1.13), то согласно (1.10), (1.11) ток, протекающий через  $R_N$ , и выделяемая в нагрузке мощность окажутся соответственно равными:

$$i = u/R_N = (1/R_N) e(t); p = (1/R_N) u^2 = (1/R_N) e^2(t). \quad (1.26)$$

С уменьшением  $R_N$  ток нагрузки и выделяемая в ней мощность неограниченно возрастают. Вследствие этого источник напряжения иногда называют источником бесконечной мощности\*).

### Идеальный источник тока

Идеальный источник тока (источник тока а) — это идеализированный активный элемент, ток которого не зависит от напряжения на его зажимах. Ток источника  $i = j(t)$  может быть произвольной функцией времени, в частном случае он может не зависеть от времени  $i(t) = J_0$  (источник постоянного тока). Внешняя характеристика источника постоянного тока показана на рис. 1.14, б.

Условное графическое обозначение источника тока приведено на рис. 1.14, а. Двойная стрелка на рисунке показывает направление тока внутри источника. У источников постоянного тока это направление совпадает с направлением перемещения положительных зарядов внутри источника, т. е. с направлением от зажима с меньшим потенциалом к зажиму с большим потенциалом.

Ток источника тока и напряжение источника являются параметрами идеализированных активных элементов подобно тому, как сопротивление, емкость и индуктивность являются параметрами одноименных идеализированных пассивных элементов.

\* ) Предельный случай, когда  $R_N = 0$  (режим короткого замыкания источника), исключается из рассмотрения, так как в этом режиме возникает противоречие. С одной стороны, при  $R_N = 0$  выводы источника замкнуты и, следовательно, напряжение источника должно равняться нулю. С другой стороны, в соответствии с определенным напряжением источника э. д. с. не зависит от тока источника, и, следовательно, при  $R_N = 0$ , когда  $i = \infty$ , напряжение источника должно равняться  $e(t)$ .

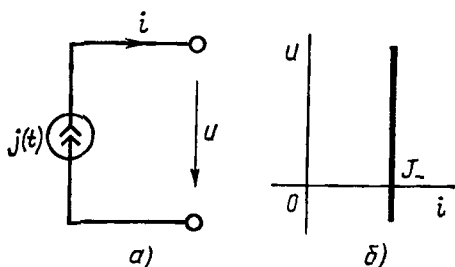


Рис. 1.14. Идеальный источник тока: а — условное графическое обозначение; б — внешняя характеристика источника постоянного тока

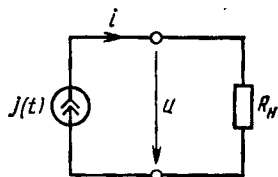


Рис. 1.15. Идеальный источник тока с нагрузкой

Если подключить к внешним выводам источника тока сопротивленные нагрузки  $R_n$  (рис. 1.15), то согласно (1.9), (1.11) напряжение на сопротивлении нагрузки и выделяемая в нагрузке мощность будут равны соответственно:

$$u = R_n i = R_n j(t); \quad p = R_n i^2 = R_n j^2(t). \quad (1.27)$$

С увеличением  $R_n$  напряжение на нагрузке и выделяемая в ней мощность неограниченно увеличиваются, поэтому источник тока, так же как и источник напряжения, является источником бесконечной мощности\*).

Зависимость тока источника тока от напряжения имеет такой же вид, как и зависимость напряжения источника напряжения от тока, поэтому эти источники являются дуальными элементами.

### Схемы замещения реальных источников

Идеализированные источники тока и напряжения можно рассматривать как упрощенные модели реальных источников энергии. При определенных условиях, в достаточно узком диапазоне токов и напряжений, внешние характеристики ряда реальных источников энергии могут приближаться к характеристикам идеализированных активных элементов. Так, внешняя характеристика гальванического элемента в области малых токов имеет вид, близкий к внешней характеристике источника напряжения (см. рис. 1.12, б), а внешняя характеристика выходного каскада на транзисторе в определенном диапазоне напряжений приближается к внешней характеристике источника тока (см. рис. 1.14, б).

\*) Предельный случай, когда  $R_n = \infty$  (режим холостого хода источника), исключается из рассмотрения, так как в этом режиме возникает противоречие. С одной стороны, при  $R_n = \infty$ , напряжение на выходе источника бесконечно велико, цепь нагрузки фактически разорвана и ток источника должен равняться нулю. С другой стороны, в соответствии с определением источника тока ток источника не зависит от напряжения на его зажимах и при  $u = \infty$  также должен равняться  $j(t)$ .

В то же время свойства реальных источников энергии значительно отличаются от свойств идеализированных активных элементов. Реальные источники энергии обладают конечной мощностью; их внешняя характеристика, как правило, не параллельна оси токов или оси напряжений, а пересекает эти оси в двух характерных точках, соответствующих режимам холостого хода и короткого замыкания (иногда в источниках энергии применяют специальные виды защиты, исключающие работу в предельных режимах или в одном из них).

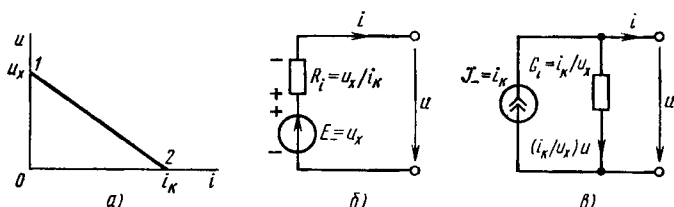


Рис. 1.16. Внешняя характеристика (а), последовательная (б) и параллельная (в) схемы замещения линеаризованного источника

С достаточной для практики точностью внешние характеристики большинства реальных источников энергии могут быть приближенно представлены прямой линией, пересекающей оси токов и напряжений в точках 1 и 2 (рис. 1.16, а):

$$u_1 = u_x, \quad i_1 = 0; \quad (1.28)$$

$$u_2 = 0, \quad i_2 = i_k, \quad (1.29)$$

соответствующих режимам холостого хода и короткого замыкания источника. Источники, имеющие линейную внешнюю характеристику, в дальнейшем будем называть **линеаризованными источниками энергии\***.

Покажем, что линеаризованный источник энергии может быть представлен моделирующей цепью, состоящей из идеализированного источника напряжения  $E$  и внутреннего сопротивления  $R_i$  или идеализированного источника тока  $J$  и внутренней проводимости  $G_i$ . Действительно, уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами  $i_1, u_1$  и  $i_2, u_2$ , имеет вид

$$(u - u_1)/(u_2 - u_1) = (i - i_1)/(i_2 - i_1). \quad (1.30)$$

Подставляя (1.28), (1.29) в (1.30) и представляя напряжение  $u$  как функцию тока  $i$ , находим аналитическое выражение для внешней характеристики линеаризованного источника

$$u = u_x - (u_x/i_k) i. \quad (1.31)$$

В соответствии с (1.31) напряжение линеаризованного источника состоит из двух составляющих. Первая  $u_x$  имеет размерность напряжения и не зависит от тока, протекающего через источник. Ее можно

\* В литературе такие источники обычно называют реальными.

интерпретировать как напряжение некоторого идеального источника напряжения с э. д. с.  $E_- = u_x$ . Вторая составляющая напряжения источника  $(u_x/i_K)$   $i$  прямо пропорциональна току. Ее можно рассматривать как падение напряжения на некотором сопротивлении  $R_i = u_x/i_K$ , через которое протекает ток источника  $i$  (это сопротивление в дальнейшем будем называть внутренним сопротивлением источника). Итак, уравнению (1.31) может быть поставлена в соответствие схема замещения линеаризованного источника, изображенная на рис. 1.16, б. Такая схема замещения получила название

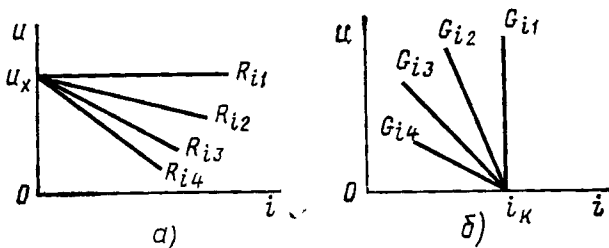


Рис. 1.17. Внешние характеристики источников с  $R_{i4} > R_{i3} > R_{i2} > R_{i1} = 0$  (а) и  $G_{i4} > G_{i3} > G_{i2} > G_{i1} = 0$  (б)

последовательной. Можно убедиться, что зависимость напряжения на зажимах этой цепи от тока определяется уравнением

$$u = E_- - R_i i, \quad (1.32)$$

равносильным уравнению (1.31) и, следовательно, внешняя характеристика цепи имеет вид, показанный на рис. 1.16, а.

Из анализа выражения (1.32) видно, что с уменьшением внутреннего сопротивления источника  $R_i$  внешняя характеристика линеаризованного источника приближается к внешней характеристике идеального источника напряжения (рис. 1.17, а). При  $R_i = 0$  источник с линейной внешней характеристикой вырождается в идеальный источник напряжения. Таким образом, идеальный источник напряжения можно рассматривать как источник энергии, внутреннее сопротивление которого равно нулю.

Рассмотрим другую схему замещения линеаризованного источника, в которой содержится идеальный источник тока. Для этого, используя (1.31), выразим ток  $i$  как функцию напряжения на зажимах источника:

$$i = i_K - (i_K/u_x) u. \quad (1.33)$$

Как видно из выражения (1.33), ток линеаризованного источника состоит из двух составляющих. Первая  $i_K$  не зависит от напряжения на зажимах источника. Ее можно рассматривать как ток некоторого идеального источника тока  $J = i_K$ . Вторая составляющая тока  $(i_K/u_x) u$  прямо пропорциональна напряжению на зажимах источника, поэтому ее можно интерпретировать как ток, текущий через некоторую (внутреннюю) проводимость  $G_i = R_i^{-1} = i_K/u_x$ , к которой

приложено напряжение  $u$ . Итак, выражению (1.33) можно поставить в соответствие схему замещения, изображенную на рис. 1.16, в. Такая схема замещения называется **п а р а л л е л ь н о й**.

Зависимость между током и напряжением на зажимах соответствующей моделирующей цепи определяется уравнением, равносильным уравнению (1.33):

$$i = J_- - G_i u. \quad (1.34)$$

Из уравнения (1.34) видно, что с уменьшением внутренней проводимости источника  $G_i$  внешняя характеристика линеаризованного источника приближается к внешней характеристике идеального источника тока (рис. 1.17, б). В пределе, при  $G_i = 0$ , линеаризованный источник энергии вырождается в идеальный источник тока. Таким образом, *идеальный источник тока можно рассматривать как источник энергии с бесконечно малой внутренней проводимостью (бесконечно большим внутренним сопротивлением)*.

Обе рассмотренные схемы замещения линеаризованного источника были получены из одного уравнения (1.30), имеют одну и ту же внешнюю характеристику и, следовательно, их поведение относительно внешних зажимов совершенно одинаково. Выбор той или иной схемы замещения может быть сделан совершенно произвольно, однако в процессе исследования цепи может возникнуть необходимость перехода от одной схемы к другой. Используя выражения (1.31)–(1.34), можно найти формулы перехода от последовательной схемы замещения к параллельной

$$J_- = E / R_i; \quad G_i = 1/R_i \quad (1.35)$$

и от параллельной схемы к последовательной

$$E_- = J_- / G_i, \quad R_i = 1/G_i. \quad (1.36)$$

Необходимо обратить внимание на то, что *переход от одной схемы замещения к другой возможен только для источников, внутреннее сопротивление которых имеет конечное значение ( $R_i \neq 0$  и  $R_i \neq \infty$ )*.

Соотношения для взаимного преобразования схем замещения источников энергии (1.35) и (1.36) применимы для источников постоянного тока и напряжения. Аналогичные соотношения могут быть получены и для источников, в которых напряжение  $u$  и ток  $i$  являются произвольными функциями времени

Анализируя выражения (1.32), (1.34), можно установить, что цепь, составленная из источника напряжения с последовательно включенным сопротивлением  $R_i$ , и цепь, представляющая собой параллельное соединение источника тока и проводимости  $G_i$ , являются дуальными.

### Управляемые источники тока и напряжения

Идеальные источники тока и напряжения могут быть либо **неуправляемыми** (независимыми) либо **управляемыми** (зависимыми). **Неуправляемый** источник представляет собой идеализированный элемент с одной парой выводов, параметр которого (ток или напряжение) не зависит ни от каких других токов или напряжений, дей-

ствующих в цепи. Управляемый источник тока или напряжения — это идеализированный активный элемент, параметр которого является определенной функцией тока или напряжения некоторого участка цепи. В общем случае управляемый источник — это идеализированный элемент с двумя парами выводов. К одной паре выводов (выводы источника) присоединяют идеализированный источник, параметр которого является заданной функцией напряжения или тока другой пары выводов (управляющие выводы). Как и для неуправляемых

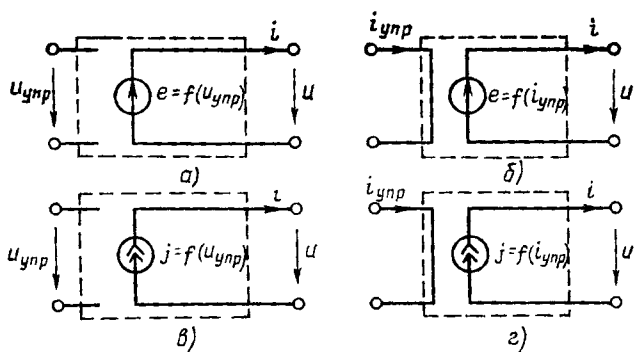


Рис. 1.18. Управляемые источники

источников, внутреннее сопротивление управляемого источника напряжения равно нулю, а внутреннее сопротивление управляемого источника тока равно бесконечности.

Различают четыре типа управляемых источников:

а) источник напряжения, управляемый напряжением (рис. 1.18, а). Напряжение  $u$  этого источника является определенной функцией управляющего напряжения  $u_{ynp}$ ;

б) источник напряжения, управляемый током (рис. 1.18, б). Напряжение этого источника  $u$  — функция управляющего тока  $i_{ynp}$  (в частном случае управляющим током может быть ток источника  $i$ , тогда управляемый источник напряжения представляет собой двухполюсный элемент);

в) источник тока, управляемый напряжением (рис. 1.18, в). Ток  $i$  этого источника есть заданная функция управляющего напряжения  $u_{ynp}$  (в частном случае управляющим напряжением может быть напряжение источника  $u$ );

г) источник тока, управляемый током (рис. 1.18, г). Ток такого источника является определенной функцией управляющего тока  $i_{ynp}$ .

В теории цепей к управляемым источникам относят только те, параметр которых зависит от действующих в цепи токов и напряжений. Источники, параметр которых зависит от какой-либо неэлектрической величины, не связанной с токами или напряжениями рассматриваемой цепи, относят к неуправляемым.

Вид функциональной зависимости между током или напряжением управляемого источника и управляющим воздействием в принципе

может быть произвольным, однако в теории цепей и во всех ее приложениях наибольшее распространение получили линейно управляемые источники, параметр которых  $y$  прямо пропорционален управляющему воздействию  $x$ :

$$y = K_{упр}x.$$

Коэффициент пропорциональности между параметром источника  $e$  или  $j$  и внешним воздействием называется коэффициентом управления  $K_{упр}$ . В зависимости от типа источника этот коэффициент может иметь размерность сопротивления (источник напряжения, управляемый током), проводимости (источник тока, управляемый напряжением) или быть безразмерной величиной (источник на-

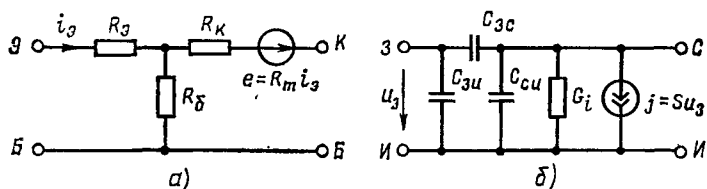


Рис. 1.19. Низкочастотные эквивалентные схемы биполярного (а) и полевого (б) транзисторов

пряжения, управляемый напряжением, и источник тока, управляемый током). Если управляющее воздействие линейно управляемого источника равно нулю, то параметр источника также будет равен нулю. Таким образом, *линейно управляемые источники не могут отдавать энергию в отсутствие управляющего воздействия.*

Управляемые источники тока и напряжения широко используют при построении эквивалентных схем различных электровакуумных и полупроводниковых приборов (рис. 1.19).

## § 1.4. ТОПОЛОГИЯ ЦЕПЕЙ

### Электрические схемы. Основные определения

Электрическая схема — это условное графическое изображение электрической цепи. В связи с тем что в теории цепей рассматривают исключительно эквивалентные схемы, *в дальнейшем под термином «электрическая схема» или просто «схема» будем понимать именно эквивалентную схему электрической цепи.* Схема электрической цепи определяет, таким образом, состав идеализированных активных и пассивных элементов моделирующей цепи, замещающей исследуемую цепь в рамках рассматриваемой задачи, параметры этих элементов и способ их соединения между собой.

Помимо идеализированных активных и пассивных элементов на схемах электрических цепей изображаются также идеализированные вспомогательные элементы: выводы цепи или ее частей, соединительные проводники и элементы коммута-



ции. К элементам коммутации относят элементы, позволяющие изменять количество идеализированных пассивных и активных элементов, их параметры или способ соединения (переключатели, ключи и т. д.). При построении моделирующих цепей и изображений их схем предполагается, что *идеализированные вспомогательные элементы не способны запасать электрическую энергию или преобразовывать ее в другие виды энергии*, т. е. они не обладают сопротивлением, емкостью или индуктивностью. Поэтому, если реальные вспомогательные элементы электрической цепи характеризуются паразитными параметрами (сопротивлением, емкостью или индуктивностью), значения которых существенны в рамках решаемой задачи, то эти элементы

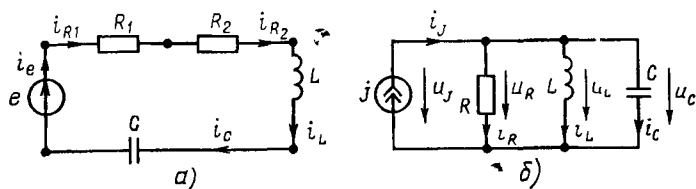


Рис. 1.20. Схемы неразветвленной (а) и разветвленной (б) электрических цепей

следует представить их моделирующими цепями, составленными из идеализированных вспомогательных элементов и соответствующих идеализированных пассивных элементов.

Способ изображения идеализированных активных, пассивных и вспомогательных элементов и их взаимное расположение на схеме не оказывают влияния на характер электрических процессов в исследуемой цепи.

При необходимости на схеме указывают положительные направления токов и напряжений: для токов через внешние выводы цепи или через ее элементы — стрелками непосредственно на соединительных проводниках или выводах (рис. 1.20); для напряжений на отдельных элементах или участках цепи — стрелками между выводами соответствующих элементов или участков цепи (рис. 1.20, б). Положительные направления напряжений на пассивных элементах, а также на идеализированных активных элементах на схемах, как правило, не указывают.

Рядом со стрелками, указывающими положительные направления токов или напряжений, проставляют их условные буквенные обозначения, например  $i_R$ ,  $u_C$ ,  $u_{L2}$ , ... или  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $u_1$ , ..., где индексы представляют собой либо буквенные обозначения соответствующих элементов, либо порядковые номера токов и напряжений.

Внешние выводы отдельных участков моделирующей цепи, по аналогии с внешними выводами реальных элементов электрической цепи, называют полюсами. В зависимости от числа полюсов участки цепей делят на двухполюсники и многополюсники (трехполюсники, четырехполюсники,  $N$ -полюсники). Двухполюсник может состоять из одного или нескольких идеализированных двух-

полюсных элементов (см., например, рис. 1.9—1.11) или может вообще не содержать идеализированных активных и пассивных элементов (например, короткозамыкающий двухполюсник или перемычка). Важное значение в теории цепей имеют многополюсники с четырьмя выводами — ч е т ы р е х п о л ю с н и к и (см. далее гл. 8). Отметим, что цепи, моделирующие реальные двухполюсные элементы, всегда являются двухполюсниками, в то время как цепи, моделирующие  $N$ -полюсные элементы, могут содержать менее чем  $N$  внешних выводов. Например, пятиэлектродным электронным лампам — пентодам, имеющим в зависимости от конструкции 5—7 внешних выводов, соответствуют схемы замещения по переменному току с 3—4 выводами.

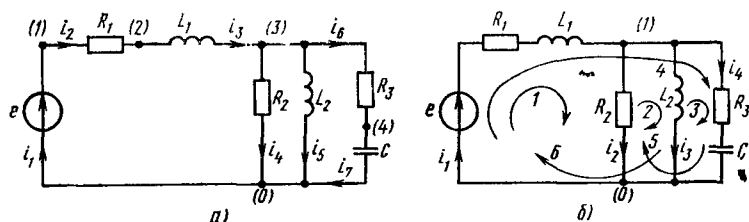


Рис. 1.21. Примеры расширенного (а) и сокращенного (б) топологического описания цепи

В зависимости от характера соединения идеализированных двухполюсных элементов различают неразветвленные и разветвленные цепи. В неразветвленной цепи (рис. 1.20, а) через все элементы протекает один и тот же ток. В разветвленных цепях (рис. 1.20, б и рис. 1.21, а) токи через различные элементы могут быть неодинаковы.

Соединение группы идеализированных двухполюсных элементов, при котором через них протекает один и тот же ток, называется последовательным. Например, в неразветвленной цепи, схема которой представлена на рис. 1.20, а, все элементы включены последовательно ( $i_{R1} = i_{R2} = i_L = i_C = i_e$ ), а в разветвленной цепи (рис. 1.21, а) имеется две группы последовательно включенных элементов [источник напряжения  $e$ , сопротивление  $R_1$  и индуктивность  $L_1$  ( $i_1 = i_2 = i_3$ )], а также сопротивление  $R_3$  и емкость  $C$  ( $i_6 = i_7$ ).

Соединение группы двухполюсных элементов, при котором все элементы находятся под одним и тем же напряжением, называется параллельным. Так, в разветвленной цепи, схема которой приведена на рис. 1.20, б, все элементы включены параллельно ( $u_R = u_L = u_C$ ).

Комбинация последовательного и параллельного соединений элементов называется смешанным соединением (рис. 1.21, а). В ряде случаев соединение между входящими в цепь элементами не может быть отнесено ни к последовательному, ни к параллельному, ни к смешанному. К числу таких соединений относятся соединения треугольником (рис. 1.22, а) и звездой (рис. 1.22, б), которые

являются частными случаями соединения  $N$ -угольником (рис. 1.23, а) и  $N$ -лучевой звездой (рис. 1.23, б).

Характер соединения между идеализированными элементами цепи определяет ее топологические (структурные) свойства, для описания которых используют понятия ветви, узла и контура. Ветвь представляет собой участок

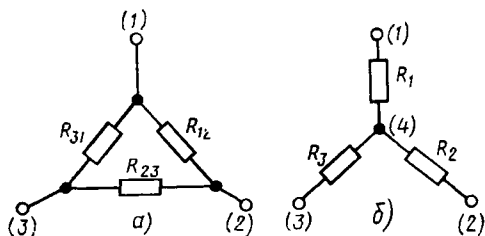


Рис. 1.22. Соединение сопротивлений треугольником (а) и звездой (б)

электрической цепи, вдоль которого протекает один и тот же ток. Она может состоять из одного или нескольких последовательно включенных идеализированных двухполюсных элементов. Например, в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 1.21, б, можно выделить ветви, составленные из одного (ветви, содержащие сопротивление  $R_2$  или индуктивность  $L_2$ ), двух (ветвь, содержащая сопротивление  $R_3$  и емкость  $C$ ) и трех элементов (ветвь с источником напряжения  $e$ , сопротивлением  $R_1$  и индуктивностью  $L_1$ ). Так как каждую ветвь можно рассматривать как двухполюсник, то соединения ветвей можно характеризовать теми же терминами, что и соединения идеализированных двухполюсных элементов (параллельное, последовательное и т. д.). Например, электрическую цепь, схема которой изображена на рис. 1.21, б, можно рассматривать как параллельное соединение четырех ветвей:  $\{e, R_1, L_1\}$ ,  $\{R_2\}$ ,  $\{L_2\}$  и  $\{R_3, C\}$ .

Место соединения ветвей называется узлом, причем место соединения двух ветвей называют устранимым узлом (при соединении двух ветвей текущие через них токи имеют одинаковые значения, поэтому две такие ветви могут быть заменены одной).

Иногда, в частности при автоматизированном составлении уравнений, описывающих процессы в электрических цепях, бывает удобно рассматривать каждый из идеализированных двухполюсных элементов, входящих в моделирующую цепь, в качестве отдельной ветви, при этом необходимо принимать во внимание все узлы, в том числе и устранимые. Будем называть такое топологическое описание цепи расширенным (см. рис. 1.21, а).

При сокращенном топологическом описании цепи (см. рис. 1.21, б) группы последовательно включенных элементов рассматриваются в качестве отдельных ветвей и устранимые узлы во внимание не принимаются; таким образом, количество ветвей

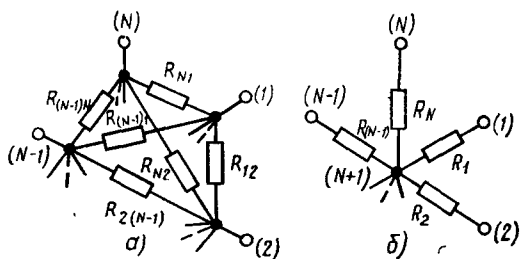


Рис. 1.23. Соединение сопротивлений  $N$ -угольником (а) и  $N$ -лучевой звездой (б)

и, следовательно, количество рассматриваемых токов уменьшается (в нашем случае с 7 до 4).

Ветви электрической цепи нумеруют арабскими цифрами, начиная с единицы. Номера ветвей удобно выбирать совпадающими с номерами соответствующих токов, в этом случае номера ветвей на схеме можно не указывать. Узлы электрической цепи нумеруют, начиная с нуля. Порядок нумерации узлов значения не имеет, однако номер «0» удобно присваивать заземленному узлу или узлу, к которому сходится наибольшее число ветвей. Номера узлов условимся обозначать арабскими цифрами в круглых скобках, проставленными около соответствующего узла.

Любой замкнутый путь, проходящий по нескольким ветвям цепи, называется контуром. Например, в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 1.21, б можно выделить шесть контуров, образованных ветвями {1,2}, {2,3}, {3,4}, {1,4}, {2,4} и {1,3}. Неразветвленная цепь (см. рис. 1.20, а) содержит только один контур.

Контур характеризуют направлением обхода (порядком перечисленных ветвей), причем каждая ветвь и каждый узел, входящие в контур, проходятся только один раз. Направление обхода контура выбирают произвольно и указывают изогнутой стрелкой (см. рис. 1.21, б).

В отличие от электрических элементов моделирующих цепей ветви, узлы и контуры называются топологическими элементами. Степень сложности исследования процессов в электрических цепях во многом определяется числом топологических элементов. В зависимости от их числа различают простейшие и сложные цепи. К простейшим цепям относятся одноконтурная (например, см. рис. 1.20, а) и двухузловая (например, см. рис. 1.20, б) цепи, к сложным — цепи с числом узлов более двух и числом контуров более одного.

### **Понятие о компонентных и топологических уравнениях. Законы Кирхгофа**

Математическое описание процессов в электрических цепях базируется на уравнениях двух типов: компонентных и топологических.

Компонентные уравнения (уравнения ветвей) устанавливают связь между током и напряжением каждой ветви. Количество таких уравнений равно числу ветвей, а вид каждого из них зависит только от состава ветви, т. е. от входящих в ее состав идеализированных двухполюсных элементов. При расширенном топологическом описании число ветвей и, следовательно, количество компонентных уравнений равны числу идеализированных двухполюсных элементов, а компонентные уравнения имеют наиболее простой вид — они вырождаются в рассмотренные ранее уравнения, связывающие между собой ток и напряжение на зажимах идеализированных активных и пассивных элементов. Таким образом, уравнения, составленные на основании закона Ома (1.9), (1.10), представляют собой компонентные уравнения для ветви, содержащей один идеализированный пассив-

ный элемент — сопротивление. При сокращенном топологическом описании количество компонентных уравнений уменьшается в соответствии с уменьшением числа ветвей, но сами уравнения имеют более сложный вид.

Топологические уравнения отражают свойства цепи, которые определяются только ее топологией и не зависят от того, какие электрические элементы входят в состав ветвей. К топологическим уравнениям относятся, в частности, уравнения, составленные на основании первого и второго законов Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами ветвей в каждом из узлов цепи: алгебраическая сумма мгновенных значений токов всех ветвей, подключенных к каждому из узлов моделирующей цепи, в любой момент времени равна нулю.

В соответствии с первым законом Кирхгофа для каждого из узлов идеализированной цепи (как при расширенном, так и при сокращенном топологическом описании) может быть составлено уравнение баланса токов в узле

$$\sum_k i_k = 0, \quad (1.37)$$

где  $k$  — номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу. Суммирование токов производится с учетом выбранных положительных направлений: всем токам, одинаково ориентированным относительно узла, приписывается одинаковый знак. Условимся токи, направленные от узла, брать со знаком плюс, а токи, направленные к узлу, — со знаком минус. Такой выбор не носит принципиального характера, а сделан только для удобства последующего изложения, поскольку изменение знаков, приписанных токам, соответствовало бы умножению правой и левой частей (1.37) на  $-1$ . Токи ветвей, в которых содержатся управляемые или неуправляемые источники тока и напряжения, учитываются в уравнении (1.37) наравне с токами других ветвей.



**Пример 1.1.** Составим уравнения баланса токов для всех узлов цепи, схема которой изображена на рис. 1.24, а:

$$\text{узел (1)}: -i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0;$$

$$\text{узел (2)}: -i_3 - i_4 + i_5 - i_7 = 0;$$

$$\text{узел (3)}: -i_5 + i_6 + i_7 = 0;$$

$$\text{узел (0)}: i_1 + i_2 - i_6 = 0.$$

(1.38)

Если сгруппировать токи, направленные к узлу и перенести их в правую часть уравнения (1.37), а в левой части оставить токи, направленные от узла, то первый закон Кирхгофа можно сформулировать таким образом: *сумма мгновенных значений токов, направленных к любому узлу цепи, в любой момент времени равна сумме токов, вытекающих из этого узла.* Первый закон Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда (уравнения непрерывности) и отражает тот факт, что в узлах идеализированной электрической цепи заряды не накапливаются и не расходуются.

На основании первого закона Кирхгофа можно составить уравнение баланса токов и для так называемого обобщенного узла, который представляет собой часть моделирующей цепи, охваченную произвольной замкнутой поверхностью. В этом случае в уравнении (1.37) алгебраически суммируются токи всех ветвей, входящих в

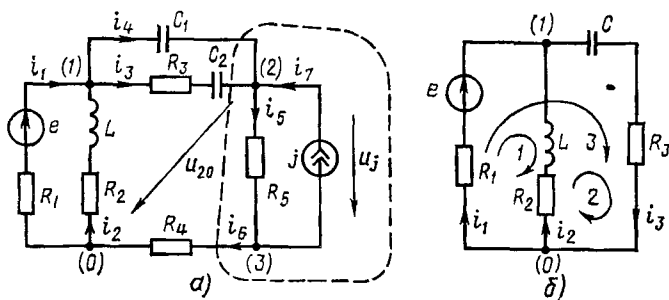


Рис. 1. 24. Примеры схем электрических цепей

обобщенный узел, т. е. токи всех ветвей, пересекаемых указанной замкнутой поверхностью. Так, для обобщенного узла, выделенного пунктирной линией на рис. 1.24, а, уравнение баланса токов

$$-i_3 - i_4 + i_6 = 0. \quad (1.39)$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (1.39) вытекает из уравнений (1.38).

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями ветвей, входящих в произвольный контур: алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи, в каждый момент времени равна нулю.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для каждого контура можно составить уравнения баланса напряжений ветвей

$$\sum_k u_k = 0, \quad (1.40)$$

где  $k$  — номера ветвей, входящих в рассматриваемый контур. Суммирование напряжений производится с учетом их положительных направлений и выбранного направления обхода контура. Если положительное направление напряжения ветви совпадает с направлением обхода контура, то оно входит в (1.40) со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус. Изменение направления обхода контура, очевидно, соответствует умножению левой и правой частей (1.40) на  $-1$ .



**Пример 1.2.** Составим уравнения баланса напряжений ветвей для всех контуров цепи, схема которой приведена на рис. 1.24, б (номера напряжений ветвей совпадают с номерами соответствующих токов):

$$\begin{aligned} \text{контур 1: } u_1 - u_2 &= 0; \\ \text{контур 2: } u_2 + u_3 &= 0; \\ \text{контур 3: } u_1 + u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Уравнения по второму закону Кирхгофа можно составить не только для напряжений ветвей, но и для напряжений элементов, входящих в ветви каждого контура. Представляя напряжение каждой ветви в виде суммы напряжений элементов этой ветви и принимая во внимание, что положительное направление напряжения источника э. д. с. противоположно направлению э. д. с., систему уравнений (1.40) можно преобразовать к следующему виду:

$$\sum_i u_i = \sum_j e_j. \quad (1.42)$$

Здесь  $u_i$  — напряжения каждого из элементов рассматриваемого контура, за исключением напряжений источников э. д. с.;  $e_j$  — э. д. с. источников напряжения, действующих в контуре.

Используя (1.42), можно несколько видоизменить формулировку второго закона Кирхгофа: *алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на элементах любого контура моделирующей цепи в каждый момент времени равна алгебраической сумме мгновенных значений э. д. с. источников напряжения, действующих в этом контуре*. Напряжения на элементах контура и э. д. с. источников напряжения входят в (1.42) со знаком плюс, если положительные направления напряжений на элементах и направления э. д. с. источников напряжения совпадают с направлением обхода контура. В противном случае соответствующие слагаемые в (1.42) берутся со знаком минус.



**Пример 1.3.** *Запишем уравнения баланса напряжений на элементах всех контуров цепи (рис. 1.24. б):*

$$\begin{aligned} u_{R1} - u_L - u_{R2} &= e; \\ u_{R2} + u_L + u_C + u_{R3} &= 0; \\ u_{R1} + u_C + u_{R3} &= e. \end{aligned}$$

Второй закон Кирхгофа является следствием закона сохранения энергии и отражает тот факт, что энергия, затраченная сторонними силами на перенос произвольного заряда внутри источников, входящих в контур, равна энергии, затрачиваемой источниками на перенос этого заряда через пассивные элементы контура.

Следует подчеркнуть, что закон сохранения энергии выполняется при переносе заряда по любому замкнутому пути (не обязательно полностью проходящему через ветви цепи). Поэтому уравнения по второму закону Кирхгофа можно составить для любой совокупности элементов, образующих путь для электрического тока от произвольно выбранного узла (а) электрической цепи к узлу (б) с учетом напряжений между конечными точками этого пути  $u_{аб}$ . Например, для ветвей 3 и 2 (рис. 1.24, а), образующих путь для электрического тока между узлами (2) и (0) электрической цепи, уравнение по второму закону Кирхгофа с учетом напряжения  $u_{20}$  между этими узлами запишется в виде

$$u_{R2} + u_L + u_{R3} + u_{C2} + u_{20} = 0.$$

Для контуров, в которых есть источники тока, уравнения баланса напряжений составляют по общему правилу, причем напряжение на источнике тока учитывается в левой части уравнения (1.42). Так, для контура, образованного ветвями с сопротивлениями  $R_1, R_3, R_4$ , емкостью  $C_2$ , источником напряжения  $e$  и источником тока  $j$  (рис. 1.24, а), уравнение баланса напряжений

$$u_{R1} + u_{R3} + u_{R4} + u_{C2} + u_j - e.$$

Так как вид и число уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа, не зависят от того, какие элементы входят в состав цепи, а определяются только ее топологическими особенностями, то уравнения баланса токов и напряжений можно применять для математического описания процессов в моделирующих цепях, составленных из двухполюсных элементов любого типа (как линейных, так и нелинейных) при любой форме токов и напряжений независимых источников.

Очевидно, что количество уравнений баланса токов и напряжений равно сумме числа узлов и числа контуров исследуемой цепи. Можно убедиться, что не все из составленных уравнений будут линейно независимыми. Например, любое из четырех уравнений (1.38) может быть получено как линейная комбинация из трех других уравнений: так, уравнение для узла (0) можно получить суммируя уравнения, составленные для узлов (1), (2), (3), и умножая правую и левую части полученного уравнения на  $-1$ . Аналогично уравнения (1.41) не являются линейно независимыми.

В то же время на основании законов Кирхгофа для каждой цепи можно составить несколько различных систем линейно независимых топологических уравнений. Например, любые три уравнения из (1.38) и любые два уравнения из (1.41) образуют систему линейно независимых уравнений.

Будем называть системой независимых узлов и системой независимых контуров любые совокупности узлов и контуров цепи, для которых можно составить системы линейно независимых уравнений по законам Кирхгофа. Определение числа независимых узлов и контуров, а также выделение систем соответствующих узлов и контуров являются основными задачами топологии цепей.

## Топологические графы электрических цепей

В общем случае граф есть совокупность отрезков произвольной длины и формы, называемых ветвями (ребрами), и точек их соединения, называемых узлами (вершинами). В теории электрических цепей в основном находят применение направленные, или ориентированные, графы, у которых каждому ребру приписывается определенное направление, указываемое стрелкой. Различают направленные топологические графы и направленные графы прохождения сигналов. Направленный топологический граф является упрощенной моделью электрической цепи, отражающей только ее топологические (структурные)



свойства. Направленный граф прохождения сигнала представляет собой наглядное графическое изображение системы уравнений, описывающей процессы в электрической цепи. В дальнейшем будем называть направленный граф прохождения сигнала с и г н а л ь н ы м г р а ф о м, а направленный топологический граф просто г р а ф о м цепи.

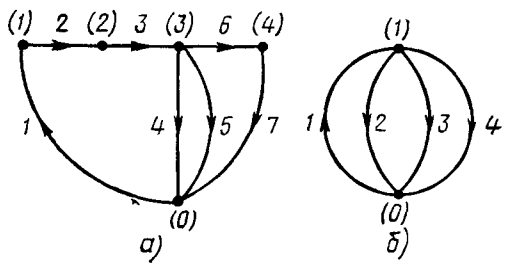


Рис. 1.25. Расширенный (а) и сокращенный (б) графы цепи, схема которой приведена на рис. 1.21

Граф электрической цепи строят по ее эквивалентной схеме. Каждую ветвь цепи заменяют при этом отрезком произвольной длины и формы — ветвью графа, а каждый узел цепи преобразуют в узел графа. На ветвях графа стрелками указывают их направления, которые совпадают с положительным направлением токов, протекающих по соответствующим ветвям цепи. Нумерация ветвей и узлов графа та же, что и нумерация ветвей и узлов схемы. Расширенному топологическому описанию цепи (см. рис. 1.21, а) соответствует расширенный граф цепи (рис. 1.25, а), сокращенному топологическому описанию (см. рис. 1.21, б) — сокращенный (рис. 1.25, б).

Свойства графа не зависят от формы и длины ветвей, а также от взаимного расположения узлов графа на плоскости и определяются только числом ветвей  $p$ , числом узлов  $q$  и способом соединения ветвей между собой. Графы, имеющие одинаковые количества узлов и ветвей, соединенных между собой одинаковым образом, называются и з о м о р ф н ы м и (рис. 1.26). Изменяя длину и форму ветвей, а также взаимное расположение узлов графа на плоскости, можно получить бесчисленное множество графов, изоморфных исходному. Такие преобразования графа называются и з о м о р ф н ы м и п р е о б р а з о в а н и я м и. Каждый из вариантов изображения графа, полученный путем таких преобразований, называется его г е о м е т р и ч е с к о й р е а л и з а ц и е й.

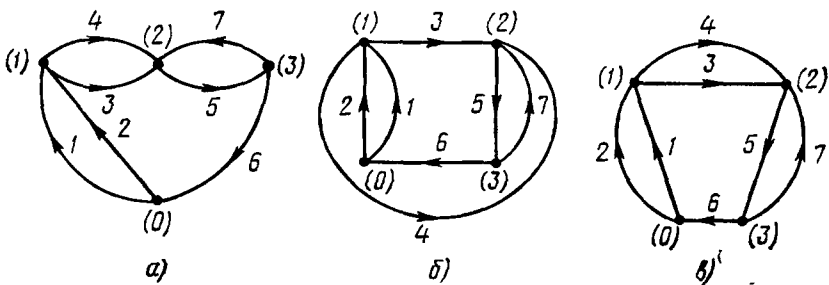


Рис. 1.26. Изоморфные графы

Если узел  $i$  является концом ветви  $j$ , то говорят, что они и инцидентны (от англ. *incidence* — сфера действия, охват). Каждая ветвь графа инцидентна двум узлам. Часть графа, которая наряду с некоторым подмножеством ветвей графа содержит и все инцидентные им узлы, называется подграфом.

Степенью узла называется число ветвей графа, инцидентных данному узлу. На рис. 1.25,  $a$  узлы (1) и (4) имеют вторую степень, узлы (0) и (3) — четвертую.

Графы, изоморфные с точностью до узлов второй степени, называются гомеоморфными. После удаления из гомеоморфных графов узлов второй степени и объединения инцидентных этим вершинам ветвей гомеоморфные графы становятся изоморфными. Таким образом,

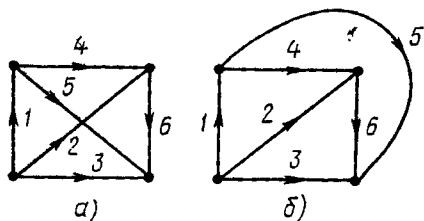


Рис. 1.27. Устранение пересечений ветвей графа с помощью изоморфных преобразований

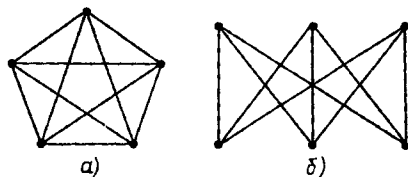


Рис. 1.28 Графы Понтрягина — Куратовского:  
 $a$  — полный пятиугольник;  $b$  — двудольный

графы соответствующие расширенному и сокращенному топологическому описанию цепи, являются гомеоморфными. Примером гомеоморфных графов являются графы, изображенные на рис. 1.25.

Пл а н а р н ы м (плоским) называется такой граф, который в результате изоморфных преобразований может быть изображен на плоскости без пересечения ветвей. Так, граф, изображенный на рис. 1.27,  $a$ , содержит две пересекающиеся ветви, однако он является планарным, так как существует изоморфный ему граф, не имеющий пересечения ветвей (рис. 1.27,  $b$ ). Можно убедиться, что все графы, содержащие не более четырех узлов, являются планарными.

Н е п л а н а р н ы й (объемный) граф не может быть изображен на плоскости без пересечения ветвей (рис. 1.28). При удалении из представленных на рисунке графов любой ветви они становятся планарными. Полный пятиугольник и двудольный граф (рис. 1.28) называют также графами Понтрягина — Куратовского. Доказано, что произвольный граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных одному из графов Понтрягина—Куратовского. Электрическая схема, которой соответствует планарный граф, также называется планарной. Непланарной схеме соответствует непланарный граф. Таким же образом вводятся понятия планарной и непланарной идеализированных электрических цепей.

Планарный граф делит плоскость, на которой он изображен, на внешнюю и внутренние области. Внутренние области, ограниченные ветвями графа, называются ячейками или окнами графа. Внешняя по отношению к графу часть плоскости называется базисной ячейкой.

Путь — это подграф, являющийся последовательностью соединенных между собой ветвей, выбранных таким образом, что каждому узлу (за исключением двух узлов, называемых граничными) инцидентны две ветви, а граничным узлам инцидентно по одной ветви (рис. 1.29). Каждая ветвь и каждый узел встречаются в пути только один раз.

Замкнутый путь, т. е. путь, у которого начальные и конечные узлы совпадают, называется контуром (рис. 1.30). Каждому из узлов контура инцидентны две ветви. Очевидно, что между контурами графа и контурами исходной цепи существует взаимно однозначное соответствие.

Связный граф — это граф, между любыми двумя узлами которого существует, по крайней мере, один путь (см. рис. 1.25—1.28).

Деревом связного графа называется связный подграф, включающий все узлы графа, но не содержащий ни одного контура. Ветви графа, вошедшие в дерево, называются ветвями дерева; ветви, не вошедшие в дерево, называются связями (главными ветвями, хордами). Каждому графу может быть поставлено в соответствие несколько деревьев, отличающихся друг от друга составом ветвей дерева (рис. 1.31). Каждое из деревьев графа, содержащего  $p$  ветвей и  $q$  узлов, имеет  $m = q - 1$  ветвей дерева и  $n = p - q + 1$

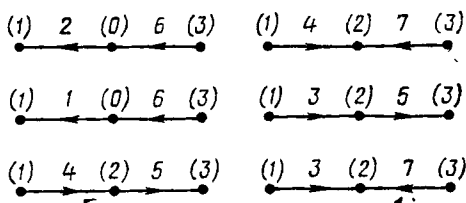


Рис. 1.29. Различные пути между вершинами (1) и (3) графа, изображенного на рис. 1.26

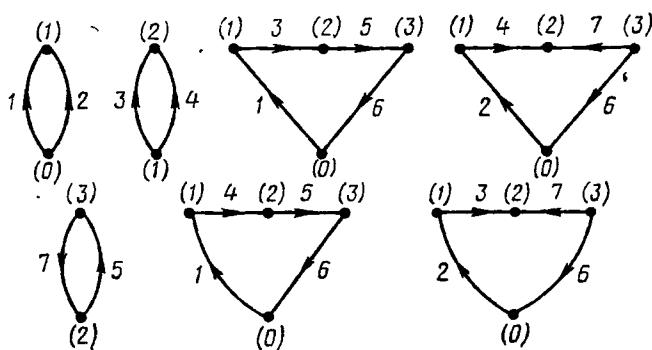


Рис. 1.30. Некоторые из контуров графа, изображенного на рис. 1.26

главных ветвей. При построении деревьев графов электрических цепей в число ветвей дерева обязательно вносят ветви, соответствующие идеализированным источникам напряжения. Ветви графа, соответствующие ветвям цепи, содержащим идеализированные источники тока, в число ветвей дерева не включают.

Добавление к дереву графа любой главной ветви образует контур. Контур, образованные поочередным добавлением к дереву графа его главных ветвей, называются главными контурами (рис. 1.32). Таким образом, главный контур состоит из ветвей дерева и од-

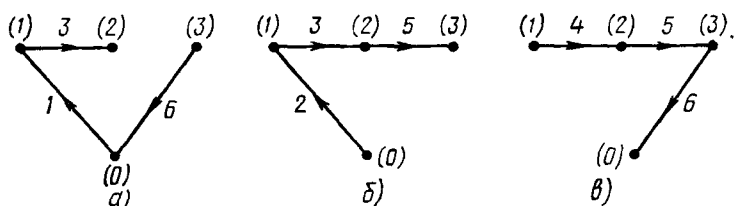


Рис. 1.31. Некоторые из деревьев графа, изображенного на рис. 1.26

ной главной ветви\*). Каждому дереву соответствует своя система из  $n = p - q + 1$  главных контуров, причем главные контуры, соответствующие определенному дереву, отличаются один от другого, по крайней мере, одной ветвью, а именно главной ветвью, входящей в каж-

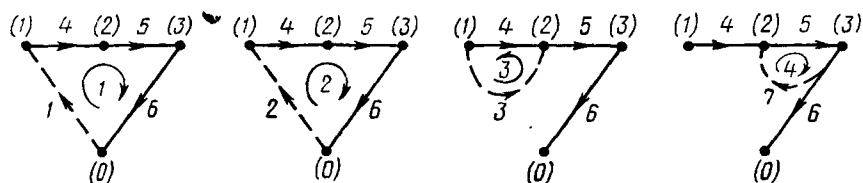


Рис. 1.32. Главные контуры графа (рис. 1.26), соответствующие дереву (рис. 1.31, в)

дый из главных контуров. Каждому главному контуру обычно присваивают номер и приписывают ориентацию (направление обхода), совпадающие с номером и ориентацией соответствующей главной ветви\*\*).

Сечением графа называется совокупность ветвей связного графа, пересекаемых замкнутой линией (линией сечения) или замкнутой поверхностью (поверхностью сечения), разделяющей граф на две части, причем ни одна из ветвей графа не пересекается дважды. Если удалить из связного графа ветви, образующие сечения, он распадается на две части, одна из которых может быть изолированным узлом.

\* На рис. 1.32 и последующих ветви дерева — сплошные линии, главные ветви — пунктирные.

\*\* Для большинства задач, рассматриваемых в рамках настоящего курса, нумерация главных контуров может быть выбрана произвольно, независимо от номеров соответствующих главных ветвей.

Каждую из частей графа, лежащую по одну из сторон линии (поверхности) сечения можно рассматривать как обобщенный узел. Так, совокупности ветвей  $\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\{1, 2, 5, 7\}$ ,  $\{3, 4, 6\}$ , пересекаемых линиями  $a, б, в$  соответственно (рис. 1.33), образуют сечения, потому что при удалении каждой из этих совокупностей ветвей граф распадается на две части. Ветви, пересекаемые линией  $г$ , не образуют сечения, так как при удалении этих ветвей граф распадается более чем на две части.

Главным сечением графа называется такое сечение, в которое входит только одна ветвь выбранного дерева. Остальные ветви, входящие в главное сечение, являются связями (рис. 1.34). Количество главных сечений равно количеству ветвей дерева, т. е.  $t = q - 1$ . Каждому дереву может быть поставлена в соответствие своя система главных сечений, причем главные сечения, соответствующие выбранному дереву, отличаются друг от друга, по крайней мере, одной ветвью — ветвью дерева, входящей в каждое из сечений.

Главным сечениям графа присваивают номера и приписывают ориентацию, совпадающие с номером соответствующей ветви дерева и ее ориентацией относительно линии сечения.

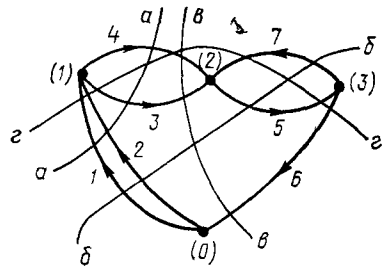


Рис. 1.33. К определению понятия сечения графа

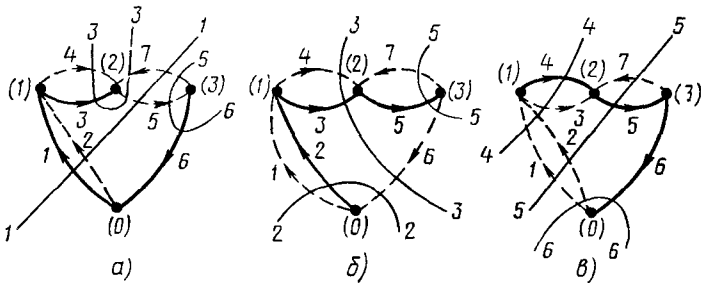


Рис. 1.34. Главные сечения графа, приведенного на рис. 1.26, соответствующие деревьям, представленным:

$a$  — на рис. 1.31,  $б$  — на рис. 1.31,  $в$  — на рис. 1.31,  $в$

Если одна из частей, на которые граф делится линией сечения, представляет собой изолированный узел, то соответствующее сечение называется каноническим (сечения  $3$  и  $б$  на первом из графов, изображенных на рис. 1.34).

### Топологические матрицы

Топологические матрицы служат для аналитического описания графов. Такое описание можно представить в виде списка (перечня) ветвей графа с указанием, каким узлам они инцидентны и с какой ориентацией, или с помощью полной матрицы узлов  $A_c$ .

Полная матрица узлов (полная матрица инцидентий, матрица соединений, структурная матрица) — это таблица, в которой число столбцов равно числу ветвей графа  $p$ , а число строк равно числу узлов  $q$ . Номера строк совпадают с номерами узлов (строка с нулевым номером обычно располагается последней), номера столбцов совпадают с номерами ветвей. Элемент матрицы  $a_{ij}$ , расположенный на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, может принимать значения  $+1$ ,  $-1$  и  $0$ :  $a_{ij} = +1$ , если ветвь  $j$  инцидентна узлу  $i$  и направлена от этого узла;  $a_{ij} = -1$ , если ветвь  $j$  инцидентна узлу  $i$  и направлена к этому узлу;  $a_{ij} = 0$ , если ветвь  $j$  не инцидентна узлу  $i$ . Так, графу, изображенному на рис. 1.26,  $a$  соответствует полная матрица инцидентий

$$A_c = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5^* & 6 & 7 \end{matrix} & \leftarrow \text{номера ветвей} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (0) \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] & (1.43) \end{matrix}$$

↑  
номера узлов

Нетрудно убедиться, что эта же полная матрица узлов (1.43) соответствует и всем графам, изоморфным графу, изображенному на рис. 1.26,  $a$ , в частности графам, приведенным на рис. 1.26,  $b$ ,  $v$ . Таким образом, *все изоморфные графы описываются одной и той же полной матрицей узлов*. Имея полную матрицу узлов, всегда можно восстановить исходный граф с точностью до изоморфизма.

Число ненулевых элементов в каждой строке матрицы  $A_c$  равно числу ветвей, инцидентных соответствующему узлу, т. е. степени узла. В каждом столбце имеется только два ненулевых элемента:  $+1$  и  $-1$ , так как каждая ветвь инцидентна двум узлам и направлена от одного из них к другому. Сумма всех элементов каждого столбца, а следовательно, и сумма всех строк полной матрицы узлов  $A_c$  равна нулю, т. е. строки полной матрицы узлов являются линейно зависимыми.

На практике обычно используют сокращенную (редуцированную) матрицу узлов  $A$ , которая получается из полной матрицы узлов путем отбрасывания любой из ее строк\*). Обычно отбрасывают строку, соответствующую узлу с номером 0, который будем называть базисным узлом. Так, отбрасывая строку с номером 0 у полной матрицы узлов (1.43), получаем сокращенную матрицу узлов  $A$  цепи, граф которой изображен на рис. 1.26:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

\*) В дальнейшем будем использовать только сокращенную матрицу узлов  $A$ , которую для краткости будем называть матрицей узлов.

В теории графов доказывается, что *все строки сокращенной матрицы узлов линейно независимы*. Зная сокращенную матрицу узлов, соответствующую некоторому графу, всегда можно найти его полную матрицу узлов, для чего необходимо дополнить  $A$  одной строкой так, чтобы сумма всех строк матрицы  $A_e$  равнялась нулю.

В связи с тем что каждая строка матриц  $A_e$  и  $A$  несет информацию о том, какие ветви и с какой ориентацией подключены к определенному узлу цепи, эти матрицы можно использовать для записи уравнений по первому закону Кирхгофа. Действительно, умножая полную матрицу узлов  $A_e$  на матрицу-столбец токов ветвей  $i$ , получаем

$$A_e \times i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} i_1 + a_{12} i_2 + \dots + a_{1p} i_p \\ a_{21} i_1 + a_{22} i_2 + \dots + a_{2p} i_p \\ \dots \\ a_{q1} i_1 + a_{q2} i_2 + \dots + a_{qp} i_p \end{bmatrix}.$$

Каждая строка этого выражения есть алгебраическая сумма токов ветвей, подключенных к соответствующему узлу цепи, причем если ветвь направлена от узла, то соответствующий ток имеет знак плюс ( $a_{ij} = +1$ ), если ветвь направлена к узлу, то знак минус ( $a_{ij} = -1$ ). Если же ветвь не инцидентна рассматриваемому узлу, то соответствующее слагаемое равно нулю ( $a_{ij} = 0$ ). Тогда в соответствии с первым законом Кирхгофа окончательно имеем

$$A_e \times i = 0. \quad (1.45)$$

В связи с тем что строки полной матрицы узлов являются линейно зависимыми, система уравнений (1.45) также будет линейно зависимой.

Для получения системы линейно независимых уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, можно воспользоваться сокращенной матрицей инцидентий, строки которой являются линейно независимыми:

$$A \times i = 0. \quad (1.46)$$

Таким образом, для любой цепи можно составить  $t = q - 1$  линейно независимых уравнений баланса токов, и, следовательно, любые  $t$  узлов графа представляют собой систему независимых узлов.



**Пример 1.4.** Составим систему линейно независимых уравнений баланса токов для цепи, граф которой изображен на рис. 1.26. Подставляя в (1.46) сокращенную матрицу узлов этой цепи (1.44), находим

$$A \times i = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 - i_2 + i_3 + i_4 \\ -i_3 - i_4 + i_5 - i_7 \\ -i_5 + i_6 + i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.47)$$

Как и следовало ожидать, система уравнений (1.47) совпадает с системой уравнений (1.38), составленной на основании первого закона Кирхгофа для 1, 2 и 3-го узлов рассматриваемой цепи.

Для матричной записи уравнений баланса токов в обобщенных узлах цепи и уравнений баланса напряжений используют матрицу главных сечений и матрицу главных контуров.

Матрица главных сечений  $Q$  (матрица сечений) представляет собой таблицу, число столбцов которой равно числу ветвей графа  $p$ , а число строк — числу главных сечений

$$m = q - 1$$

(номера столбцов совпадают с номерами ветвей, а номера строк с номерами главных сечений, т. е. с номерами соответствующих ветвей дерева).

Каждая строка матрицы главных сечений характеризует состав ветвей графа, входящих в данное сечение. Элементы  $i$ -й строки  $q_{ij}$  принимают значение  $+1$ , если  $j$ -я ветвь графа входит в состав  $i$ -го сечения, причем ее ориентация совпадает с ориентацией сечения, т. е. с ориентацией соответствующей ветви дерева относительно линии сечения;  $q_{ij} = -1$ , если  $j$ -я ветвь входит в  $i$ -е сечение, а ее ориентация противоположна ориентации сечения;  $q_{ij} = 0$ , если  $j$ -я ветвь не входит в  $i$ -е сечение.

Матрица главных сечений, соответствующая графу, приведенному на рис. 1.34, а, имеет следующий вид:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \leftarrow \text{номера ветвей} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} \left[ \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{matrix} \right] \\ \begin{matrix} \uparrow \\ \text{номера главных сечений} \end{matrix} \end{matrix} \quad (1.48).$$

Используя матрицу главных сечений, можно в компактной форме записать систему из  $m = q - 1$  уравнений, составленных на основании первого закона Кирхгофа для главных сечений графа, соответствующих выбранному дереву:

$$Q \times i = 0, \quad (1.49)$$

где  $i$  — вектор токов ветвей.

Уравнения (1.49) являются линейно независимыми, так как каждое из них отличается от остальных, по крайней мере, одним током — током ветви дерева, входящей в данное главное сечение.



Подставляя (1.48) в (1.49), получим систему линейно независимых уравнений баланса токов для главных сечений графа (рис. 1.34, а).

$$Q \times i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 + i_2 - i_5 + i_7 \\ i_3 + i_4 - i_5 + i_7 \\ -i_5 + i_6 + i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Если какое-либо из главных сечений графа является каноническим, то уравнение баланса токов для этого сечения с точностью до знака совпадает с уравнением баланса токов для соответствующего изолированного узла. Так, в системе уравнений (1.50) второе и третье уравнения, составленные для канонических сечений 3 и 6, совпадают со вторым и третьим уравнениями в системе уравнений (1.47), составленными соответственно для узлов 2 и 3 той же цепи. Если все главные сечения графа являются каноническими, то матрицы узлов  $A$  и сечений  $Q$  совпадают с точностью до знака элемента строки.

Матрица главных контуров  $B$  представляет собой таблицу, в которой число столбцов равно числу ветвей графа  $p$ , а число строк — числу главных контуров, т. е. числу главных ветвей графа  $n = p - q + 1$  (номера столбцов совпадают с номерами ветвей, а номера строк — с номерами главных контуров). Элементы  $i$ -й строки  $b_{ij}$  могут принимать значения  $+1$ ,  $-1$  и  $0$ ;  $b_{ij} = +1$ , если  $j$ -я ветвь входит в состав  $i$ -го контура, причем ее ориентация совпадает с ориентацией контура;  $b_{ij} = -1$ , если ориентация  $j$ -й ветви, входящей в  $i$ -й контур, не совпадает с ориентацией контура;  $b_{ij} = 0$ , если  $j$ -я ветвь не входит в  $i$ -й контур. Например, матрица главных контуров  $B$  графа (см. рис. 1.26), соответствующая дереву графа, приведенному на рис. 1.31, в, имеет следующий вид:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \leftarrow \text{номера ветвей} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (1.51)$$

↑  
номера главных контуров

Матрицу главных контуров можно использовать для записи уравнений, составленных на основании второго закона Кирхгофа. Пусть исследуемая цепь содержит  $p$  ветвей,  $q$  узлов и  $n = p - q + 1$  главных контуров. Умножая матрицу главных контуров  $B$  на матрицу-

столбец напряжений ветвей  $u$ , получаем

$$B \times u = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} u_1 + b_{12} u_2 + \dots + b_{1p} u_p \\ b_{21} u_1 + b_{22} u_2 + \dots + b_{2p} u_p \\ \dots \\ b_{n1} u_1 + b_{n2} u_2 + \dots + b_{np} u_p \end{bmatrix}$$

Каждая строка этого выражения представляет собой алгебраическую сумму напряжений ветвей, входящих в  $i$ -й главный контур, причем правило суммирования напряжений ветвей совпадает с соответствующим правилом, установленным для записи уравнений баланса напряжений в контуре (1.40). Так как в соответствии со вторым законом Кирхгофа сумма напряжений ветвей, входящих в каждый контур, в любой момент времени равна нулю, то окончательно имеем

$$B \times u = 0. \quad (1.52)$$

Выражение (1.52) является матричной формой записи уравнений баланса напряжений для главных контуров цепи. Уравнения, входящие в (1.52), являются линейно независимыми, так как каждое из них отличается от остальных, по крайней мере, одним напряжением — напряжением главной ветви, замыкающей данный контур.

Таким образом, система из  $n = p - q + 1$  главных контуров, соответствующих выбранному дереву, является системой независимых контуров. Следовательно, для каждой цепи можно составить  $n$  независимых уравнений по второму закону Кирхгофа.



**Пример 1.5.** Рассмотрим применение матрицы контуров для формирования системы линейно независимых уравнений баланса напряжений для цепи, граф которой приведен на рис. 1.26. Умножив матрицу главных контуров этой цепи (1.51) на матрицу-столбец напряжений ветвей  $u$ , получаем

$$B \times u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_4 + u_5 + u_6 \\ u_2 + u_4 + u_5 + u_6 \\ u_3 - u_4 \\ u_6 + u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Следует отметить, что при выборе системы независимых контуров было использовано достаточное условие независимости уравнений, заключающееся в том, что для линейной независимости системы уравнений достаточно, чтобы каждое из уравнений содержало, по крайней мере, одну независимую переменную величину, отсутствующую в других уравнениях. Так как это условие не является необходимым, то для каждой цепи можно найти и другие системы независимых контуров, которые в ряде случаев могут не совпадать ни с одной из систем главных контуров. В частности, ячейки плоского графа, число которых оказывается равным  $n = p - q + 1$ , представляют собой систе-

му независимых контуров. Их состав может быть описан матрицей основных контуров  $\mathbf{B}^o$ , которая строится аналогично матрице главных контуров (контур, соответствующие каждой из ячеек, нумеруют от 1 до  $n$ , каждому из них приписывают произвольную ориентацию). Например, для графа электрической цепи, изображенного на рис. 1.35:

$$\mathbf{B}^o = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \leftarrow \text{номера ветвей} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (1.54)$$

↑  
номера контуров

В этом случае матрица основных контуров не совпадает ни с одной из возможных для данного графа матриц главных контуров.

Матрицу  $\mathbf{B}^o$  можно, как и матрицу  $\mathbf{B}$ , использовать для записи системы линейно независимых уравнений баланса напряжений:

$$\mathbf{B}^o \times \mathbf{u} = 0. \quad (1.55)$$

Так, используя (1.54), можно составить систему уравнений баланса напряжений для ячеек графа, изображенного на рис. 1.35:

$$\mathbf{B}^o \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -u_6 + u_7 \\ -u_2 - u_4 + u_6 \\ u_1 + u_2 - u_3 \\ u_3 + u_4 - u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следует подчеркнуть, что понятие ячейки (окна) было введено ранее только для плоских графов и что только для них возможен выбор ячеек в качестве независимых контуров.

### Дуальные графы и дуальные цепи

Два плоских графа называются дуальными, если матрица узлов одного из них  $\mathbf{A}$  равна матрице основных контуров  $\mathbf{B}^o$  другого и наоборот:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_2^o; \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_1^o. \quad (1.56)$$

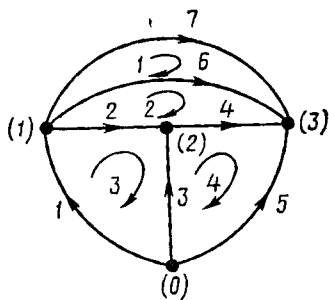


Рис. 1.35. К составлению основной матрицы контуров

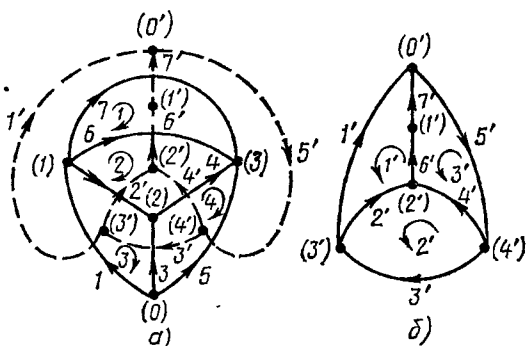


Рис. 1.36. Построение двойного графа (заданный граф — сплошные линии)

Очевидно, что двойные графы должны иметь одинаковое число ветвей ( $p_1 = p_2$ ), причем число ветвей дерева одного из них  $m$  должно быть равно числу главных ветвей  $n$  другого:

$$m_1 = n_2; m_2 = n_1.$$

Для построения графа, двойного заданному (рис. 1.36, а), необходимо внутри каждой ячейки исходного графа разместить узел двойного графа [(1'), (2') и т. д.], кроме того, один узел двойного графа располагается во внешней по отношению к исходному графу части плоскости, т. е. в базисной ячейке. Узлы двойного графа соединяются между собой ветвями так, чтобы каждая ветвь исходного графа пересекала одну ветвь двойного графа (пунктир на рис. 1.36, а). Номера узлов двойного графа совпадают с номерами контуров исходного графа, внутри которых они размещены. Узлу двойного графа, расположенному в базисной ячейке, присваивается номер 0'. Пересекающимся между собой ветвями исходного и двойного графов присваиваются одинаковые номера. Ориентация ветвей и контуров двойного графа (рис. 1.36, б) выбирается таким образом, чтобы обеспечить выполнение равенств (1.56).

Нетрудно убедиться, что матрицы узлов  $A_2$  и основных контуров  $B_2^o$  двойного графа (рис. 1.36, б) равны соответственно матрицам основных контуров  $B_1^o$  и узлов  $A_1$  исходного графа:

$$A_2 = B_1^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_2^o = A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Как видно из рис. 1.36, ячейки дуального графа соответствуют узлам исходного графа, а узлы дуального графа — ячейкам исходного. Последовательному соединению ветвей исходного графа соответствует параллельное соединение ветвей дуального графа и наоборот. Если сформулированное правило нахождения дуального графа применить для построения графа, дуального изображенному на рис. 1.36, б, то получится граф, изоморфный исходному графу (рис. 1.36, а сплошные линии).

Используя понятие дуального графа, легко обобщить введенное ранее понятие дуальных цепей. Две цепи называются дуальными, если они имеют дуальные графы и каждому элементу одной цепи соот-

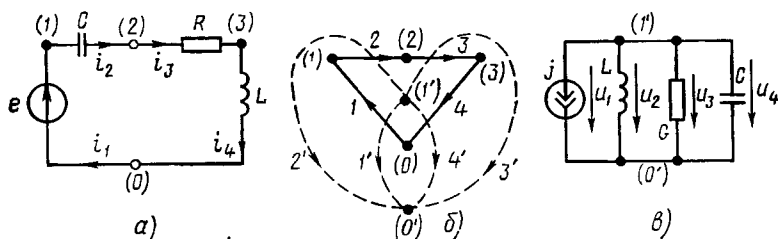


Рис. 1.37. К примеру 1.6

ветствует дуальный элемент другой. Для построения дуальной цепи сначала находят граф, дуальный расширенному топологическому графу исходной цепи, а затем каждую ветвь дуального графа заменяют элементом, дуальным элементу, расположенному в соответствующей ветви исходной цепи.



**Пример 1.6.** Построим цепь, дуальную приведенной на рис. 1.37, а. На рис. 1.37, б сплошными линиями показан граф исходной цепи, а пунктирными — дуальный ему граф (направление ветвей исходного графа соответствует направлению токов ветвей исходной цепи, а направление ветвей дуального графа — направлению напряжения ветвей дуальной цепи). Цепь, дуальная исходной, изображена на рис. 1.37, в.

Из определения дуальной цепи и равенств (1.56) следует, что уравнения баланса токов для одной из дуальных цепей будут совпадать с уравнениями баланса напряжений для другой при условии, что в соответствующих уравнениях токи ветвей одной цепи будут заменены на напряжения ветвей другой цепи и наоборот. Это свойство дуальных цепей иногда используют в качестве определения дуальных цепей.

В заключение заметим, что непланарные графы не имеют дуальных графов, в связи с чем идеализированной электрической цепи, схема которой не является планарной, не может быть поставлена в соответствие дуальная цепь.

Основные задачи теории цепей

Любую электрическую цепь можно рассматривать как систему с одним или несколькими входами и одним или несколькими выходами (рис. 1.38). Если к входам цепи приложить внешнее воздействие  $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$ , то на выходах можно обнаружить реакцию или отклик  $y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_M(t)\}$ , где  $N$  и  $M$  — число входов и выходов соответственно. В зависимости от исходных данных и конечной цели исследования в теории цепей различают две группы задач: задачи анализа и задачи синтеза.

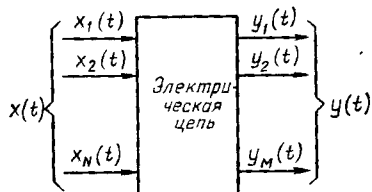


Рис. 1.38. Представление электрической цепи в виде системы с  $N$  входами и  $M$  выходами

Задача анализа электрической цепи состоит в определении реакции цепи  $y(t)$  на заданное внешнее воздействие  $x(t)$ .

Задача синтеза цепи заключается в нахождении цепи по заданной реакции цепи  $y(t)$  на некоторое внешнее воздействие  $x(t)$ .

Исходными данными в задаче анализа являются эквивалентная схема цепи с параметрами всех входящих в нее элементов и описание внешнего воздействия  $x(t)$ , задаваемого в виде совокупности токов и напряжений идеализированных неуправляемых источников. В результате анализа определяется отклик  $y(t)$  в виде совокупности токов и напряжений всех или некоторых ветвей цепи. В частном случае задача анализа может сводиться к определению соотношений между реакциями цепи на отдельных выходах  $y_j(t)$  и воздействиями  $x_i(t)$ , приложенными к определенным входам. Такие соотношения называются характеристиками (системными функциями, функциями) цепи. В зависимости от того, какая величина — частота или время — является аргументом в выражениях, описывающих соотношения между откликом и внешним воздействием, различают частотные и временные характеристики цепи. Определение и исследование частотных характеристик представляют собой задачу анализа цепи в частотной области; нахождение временных характеристик — задачу анализа цепи во временной области.

Исходными данными в задаче синтеза являются описания внешнего воздействия  $x(t)$  и ее отклика  $y(t)$ . В результате синтеза необходимо найти эквивалентную схему цепи и параметры всех входящих в нее элементов. В частном случае задача синтеза может сводиться к нахождению цепи, обеспечивающей заданные соотношения между внешним воздействием на цепь  $x_i(t)$  и ее реакцией  $y_j(t)$ , т. е. к нахождению цепи по ее характеристикам.

Анализ и синтез электрических цепей в определенной степени взаимосвязаны, в частности методы синтеза базируются на использовании

общих свойств характеристик различных классов цепей, которые изучаются в процессе анализа. Поэтому изложению методов синтеза цепей будет предшествовать рассмотрение общих методов анализа цепей и знакомство с характеристиками некоторых классов цепей при различных внешних воздействиях.

### Понятие об уравнениях электрического равновесия.

Математически задача анализа электрической цепи сводится к составлению и решению системы линейно независимых уравнений, в которых в качестве неизвестных фигурируют токи и напряжения ветвей исследуемой цепи. Уравнения, решение которых позволяет определить токи и напряжения ветвей электрической цепи, называются уравнениями электрического равновесия цепи. Очевидно, что число уравнений электрического равновесия должно быть равно количеству неизвестных токов и напряжений.

В общем случае в цепи, содержащей  $p$  ветвей и  $q$  узлов, имеется  $2p$  неизвестных токов и напряжений ветвей. Используя законы Кирхгофа, для такой цепи можно составить  $m = q - 1$  независимых уравнений баланса токов и  $n = p - q + 1$  независимых уравнений баланса напряжений. В сочетании с компонентными уравнениями (уравнениями ветвей) получаем  $2p$  линейно независимых уравнений, что достаточно для определения неизвестных токов и напряжений ветвей.

Если в рассматриваемой цепи имеется  $p_{ит}$  ветвей, в которых содержится идеализированные источники тока (токи этих ветвей заданы, а напряжения неизвестны), и  $p_{ин}$  ветвей, составленных только из идеализированных источников напряжения (напряжения этих ветвей известны), то общее число неизвестных токов и напряжений уменьшается до  $2p - p_{ит} - p_{ин}$ . Для определения этих неизвестных нужно составить лишь  $2p - p_{ит} - p_{ин}$  линейно независимых уравнений ( $m + n = p$  уравнений на основании законов Кирхгофа и  $p - p_{ит} - p_{ин}$  компонентных уравнений для ветвей, не содержащих указанных источников).

Таким образом, используя компонентные уравнения и топологические уравнения, составленные на основании законов Кирхгофа, всегда можно сформировать систему уравнений электрического равновесия, число уравнений в которой достаточно для определения всех неизвестных токов и напряжений. Будем называть такую систему уравнений основной системой уравнений электрического равновесия цепи.

На практике для анализа цепей используют различные методы составления уравнения электрического равновесия, в частности методы токов ветвей, напряжений ветвей, контурных токов, узловых напряжений, переменных состояния. Все они базируются на использовании различных приемов, позволяющих преобразовать основную систему уравнений электрического равновесия и уменьшить по сравнению с  $2p$  или  $2p - p_{ит} - p_{ин}$  число одновременно решаемых уравнений.

Как было показано ранее, уравнения (1.37) и (1.40) являются алгебраическими, а компонентные уравнения идеализированных пассив-

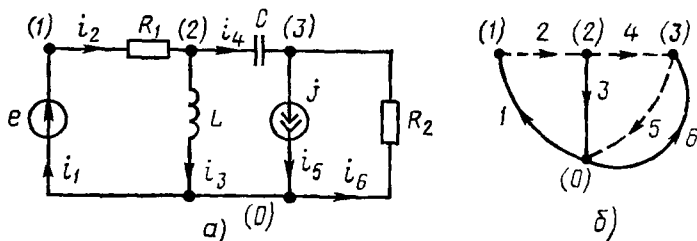


Рис. 1.39. К примеру 1.7

ных элементов могут быть как алгебраическими (1.9), (1.10), так и дифференциальными (1.13), (1.22) или интегральными (1.16), (1.23). Вследствие этого уравнения электрического равновесия цепи, составленные любым методом, представляют собой в общем случае систему интегродифференциальных уравнений.



**Пример 1.7.** Составим основную систему уравнений электрического равновесия цепи, схема и топологический граф которой изображены на рис. 1.39, а и б соответственно. Для этой цепи  $p = 6$ ,  $q = 4$ ,  $r_{ит} = 1$  и  $r_{ин} = 1$ . Общее число неизвестных токов и напряжений ветвей  $2p - r_{ит} - r_{ин} = 10$ . Используя законы Кирхгофа, можно составить  $m = q - 1 = 3$  уравнения баланса токов:

$$-i_1 + i_2 = 0; \quad -i_2 + i_3 + i_4 = 0; \quad -i_4 + j - i_6 = 0$$

и  $n = p - q + 1 = 3$  уравнения баланса напряжений:

$$u_2 + u_3 = e(t); \quad -u_3 + u_4 - u_6 = 0; \quad -u_5 + u_6 = 0.$$

Кроме того, имеем  $p - r_{ит} - r_{ин} = 4$  уравнений ветвей, не содержащих идеализированных источников:

$$u_2 = R_1 i_2; \quad u_3 = L \frac{di_3}{dt}; \quad u_6 = R_2 i_6;$$

$$u_4 = u_4(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_4 dt.$$

В результате получаем систему из 10 линейно независимых уравнений для определения 10 неизвестных токов и напряжений:  $i_1, i_2, u_2, i_3, u_3, i_4, u_4, u_6, i_6, u_6$ .

Система уравнений электрического равновесия цепи, составленная любым методом, может быть путем дифференцирования и последовательного исключения неизвестных сведена к одному дифференциальному уравнению для любого из неизвестных токов и напряжений, называемому дифференциальным уравнением цепи. В частном случае это может быть алгебраическое уравнение, которое можно рассматривать как дифференциальное уравнение нулевого порядка. Дифференциальное уравнение цепи содержит фундаментальную информацию о характере имеющих место в цепи электрических процессов и является основой для классификации электрических цепей. Тип дифференциального уравнения цепи полностью определяется ее топологией и характером входящих в нее идеализированных элементов.



●●●●●

**Пример 1.8.** Применяя указанные преобразования к основной системе уравнений электрического равновесия цепи (рис. 1.39, а), получим дифференциальное уравнение этой цепи, составленное относительно напряжения  $u_3$ :

$$a_2 \frac{d^2 u_3}{dt^2} + a_1 \frac{du_3}{dt} + a_0 u_3 = f(t).$$

Здесь  $a_0 = 1/(LC)$ ;  $a_1 = (L + R_1 R_2 C)/(R_1 CL)$ ;  $a_2 = (R_1 + R_2)/R_1$  — постоянные коэффициенты, определяемые параметрами пассивных элементов цепи;  $f(t) = -R_2 \frac{d^2 j(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_1 C} \frac{de(t)}{dt}$  — функция времени, определяемая параметрами независимых источников напряжения и тока.

Таким образом, уравнение цепи, изображенной на рис. 1.39, является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами

## Классификация электрических цепей

Электрические цепи, составленные из идеализированных элементов, могут быть классифицированы по ряду признаков:

по топологическим особенностям: планарные (плоские) и непланарные (объемные), разветвленные и неразветвленные, простейшие (одноконтурные, двухузловые) и сложные (многоконтурные, многоузловые);

по энергетическим свойствам: активные (содержащие идеализированные активные элементы) и пассивные (не содержащие идеализированных активных элементов);

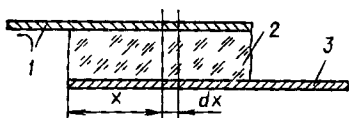
по числу внешних выводов: двухполюсники и многополюсники; и др.

Классификация цепей по этим признакам не носит принципиального характера и используется, в основном, с целью упорядочения терминологии.

*Фундаментальный характер имеет классификация цепей в зависимости от вида дифференциального уравнения цепи.* Идеализированные электрические цепи, процессы в которых описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, называются цепями и сосредоточенными параметрами. Цепи такого типа используют в качестве упрощенных моделей реальных электрических цепей и их элементов на сравнительно низких частотах, когда длина волны электромагнитных колебаний существенно больше размеров исследуемого устройства. При этих условиях в исследуемых устройствах и их элементах удается выделить конечное число участков, в которых преобладает какой-то один из основных эффектов — запасание энергии электрического или магнитного полей, преобразование электрической энергии в другие виды энергии или преобразование энергии сторонних сил в электрическую. Токи рассматриваемой реальной цепи, являясь функциями времени, имеют одинаковые мгновенные значения в пределах каждого из выделенных участков. Заменяя эти участки идеализированными активными или пассивными элементами, получают идеализированную цепь, содержащую конечное число элементов, значения параметров которых конечны.

Таким образом, цепи с сосредоточенными параметрами представляют собой идеализированные цепи, моделирующие реальные устройства или их элементы при условиях, когда можно предположить, что каждый из основных электрических эффектов сосредоточен в конечном числе пространственно локализуемых областей.

Когда длина волны электромагнитных колебаний соизмерима с размерами исследуемого устройства или его элементов, пространственно локализовать области, в которых сосредоточены только эффекты одного типа, не удастся. Это связано с тем, что даже при бесконечно малой длине выделяемых участков, в пределах каждого из них имеют место одновременно несколько из перечисленных основных эффектов, причем значения токов в пределах выделенных участков изменяются



от одного сечения к другому. При этих условиях цепи, моделирующие реальные устройства или их элементы, содержат бесконечно большое число идеализированных элементов, параметры которых имеют бесконечно малые значения. Процессы в таких цепях описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Идеализированные электрические цепи, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, называются цепями с распределенными параметрами.

Следует подчеркнуть, что термины «цепь с распределенными параметрами» и «цепь с сосредоточенными параметрами» применимы только к идеализированным (моделирующим) цепям и не должны использоваться для характеристики реальных цепей.

В зависимости от условий и требуемой точности исследования каждый элемент реальной цепи и, следовательно, каждая реальная цепь в целом могут быть заменены моделирующей цепью с сосредоточенными или распределенными параметрами. Например, конденсатор любого типа конструктивно представляет собой две проводящие обкладки 1 и 3, разделенные слоем диэлектрика 2 (рис. 1.40). В области частот, когда длина волны электромагнитных колебаний значительно превышает геометрические размеры обкладок, он может быть представлен одной из моделирующих цепей с сосредоточенными параметрами, схемы которых приведены на рис. 1.11. На более высоких частотах, когда длина волны электромагнитных колебаний сравнима с геометрическими размерами обкладок, но существенно больше расстояния между ними, необходимо учитывать, что процессы запасания энергии электрического и магнитного полей, а также необратимое преобразование электрической энергии в другие виды энергии имеют место вдоль всей длины обкладок конденсатора. В этом случае эквивалентная схема элементарного участка конденсатора длиной  $dx$  состоит из индуктивности  $L_0$  и емкости  $C_0$ , характеризующих процессы запасания энергии магнитного и электрического полей, а также сопротивления  $R_0$  и проводимости утечки  $G_0$ , учитывающих потери энергии в конденсаторе

(рис. 1.41, а). Эквивалентная схема всего конденсатора должна состоять из бесконечно большого числа таких секций. Следовательно, идеализированная цепь, моделирующая конденсатор в рассматриваемом диапазоне частот, представляет собой цепь с распределенными параметрами.

На примере цепи, эквивалентная схема которой изображена на рис. 1.41, а, покажем, что электрические процессы в цепях с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Действительно, ток  $i = i(x, t)$  и на-

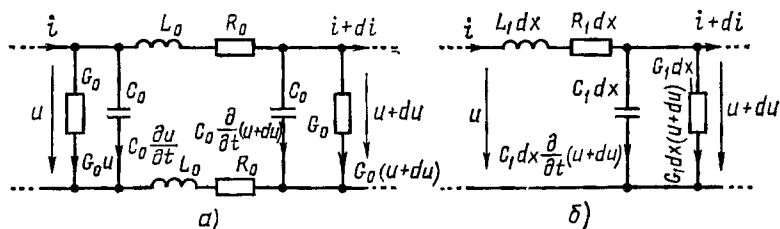


Рис. 1.41. Эквивалентные схемы элементарного участка конденсатора (рис 1.40)

пряжение  $u = u(x, t)$  рассматриваемой цепи являются функциями времени  $t$  и координаты  $x$ . Приращения тока и напряжения на участке цепи длиной  $dx$

$$di = \frac{\partial i}{\partial x} dx; \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Полагая, что параметры элементов моделирующей цепи  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $C_0$  и  $G_0$  не зависят от токов и напряжений и выражая их через погонные (т. е. приходящиеся на единицу длины) параметры  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $C_1$  и  $G_1$ :

$$R_0 = (R_1/2)dx; \quad L_0 = (L_1/2)dx; \quad C_0 = (C_1/2)dx; \quad G_0 = (G_1/2)dx,$$

составим уравнения баланса токов и напряжений элементарного участка цепи:

$$\begin{aligned} -i + \frac{G_1}{2} dx u + \frac{C_1}{2} dx \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{G_1}{2} dx \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + \\ + \frac{C_1}{2} dx \frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx = 0; \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} -u + 2 \frac{R_1}{2} dx \left( i - \frac{G_1}{2} dx u - \frac{C_1}{2} dx \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \\ + 2 \frac{L_1}{2} dx \frac{\partial}{\partial t} \left( i - \frac{G_1}{2} dx u - \frac{C_1}{2} dx \frac{\partial u}{\partial t} \right) + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости, уравнения (1.57), (1.58) можно преобразовать к виду

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (1.59)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (1.60)$$

Решая уравнения (1.59), (1.60) при соответствующих начальных и граничных условиях, можно определить токи и напряжения цепи моделирующей конденсатор в рассматриваемом режиме.

Отметим, что уравнениям (1.59), (1.60) может быть поставлена в соответствие более простая эквивалентная схема элементарного участка цепи (рис. 1.41, б). Аналогичный вид имеют высокочастотные схемы замещения и ряда других элементов, входящих в состав радиоэлектронных устройств, в частности двухпроводных и коаксиальных линий передачи.

В зависимости от числа координат, вдоль которых происходит изменение тока и напряжения и вдоль которых «распределены» параметры цепи, различают одномерные, двухмерные и трехмерные цепи с распределенными параметрами. В теории цепей рассматривают, в основном, одномерные цепи с распределенными параметрами, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями типа (1.59), (1.60).

Параметры рассмотренных ранее идеализированных линейных пассивных элементов не зависят от значений токов и напряжений соответствующих элементов и, следовательно, от интенсивности внешнего воздействия на цепь, определяемой токами действующих в цепи независимых источников тока и напряжениями действующих в цепи независимых источников напряжения. Связь между током и напряжением линейных идеализированных пассивных элементов описывается линейными алгебраическими, дифференциальными или интегральными уравнениями, иными словами, компонентные уравнения этих элементов являются линейными.

Параметры нелинейных пассивных элементов зависят от токов или напряжений соответствующих элементов, а следовательно, и от интенсивности внешнего воздействия. Компонентные уравнения нелинейных идеализированных пассивных элементов — нелинейные.

В зависимости от вида компонентного уравнения идеализированные активные элементы также делятся на линейные и нелинейные. К линейным идеализированным активным элементам относят независимые и линейно управляемые зависимые источники тока и напряжения, к нелинейным — нелинейно управляемые зависимые источники тока и напряжения.

Цепь с сосредоточенными или распределенными параметрами, составленная только из линейных идеализированных элементов, называется *линейной*. Дифференциальное уравнение такой цепи — линейное. Если в состав цепи входит хотя бы один нелинейный пассивный или активный элемент, то она называется *нелинейной*, а

процессы в ней описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Параметры линейных идеализированных пассивных элементов и коэффициенты управления линейно управляемых источников могут либо иметь постоянные значения, либо изменяться во времени под действием некоторых факторов, непосредственно не связанных с токами или напряжениями этих элементов (например, емкость конденсатора может изменяться во времени вследствие изменения расстояния между обкладками; индуктивность катушки можно изменять путем перемещения сердечника). Идеализированные элементы первого типа называют линейными элементами с постоянными параметрами, элементами второго типа — линейными элементами с переменными параметрами или параметрическими элементами. Параметрические элементы, у которых изменение параметров происходит с частотой, близкой к частоте токов или напряжений этих элементов, следует отличать от регулируемых элементов — конденсаторов переменной емкости, вариометров, подстроечных конденсаторов и др., у которых изменение параметров производится весьма медленно и только в процессе настройки или регулировки соответствующего устройства. При составлении уравнений электрического равновесия *параметрам регулируемых элементов приписывают некоторые фиксированные значения, а сами элементы относят к элементам с постоянными параметрами.*

Цепи, составленные только из линейных элементов с постоянными параметрами, называются линейными цепями с постоянными параметрами или линейными инвариантными во времени цепями. *Процессы в линейных инвариантных во времени цепях описываются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами.*

Линейные цепи, содержащие хотя бы один элемент с переменными параметрами, называются линейными параметрическими цепями. *Процессы в линейных параметрических цепях описываются линейными уравнениями с переменными коэффициентами.*

В общем случае дифференциальное уравнение линейной цепи с сосредоточенными параметрами имеет следующий вид:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t), \quad (1.61)$$

где  $y$  — искомая реакция цепи (ток или напряжение какой-либо ветви);  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — коэффициенты, определяемые параметрами пассивных элементов и коэффициентами управления управляемых источников. В дифференциальном уравнении линейной инвариантной во времени цепи эти коэффициенты постоянны, в дифференциальном уравнении линейной параметрической цепи, по крайней мере, один из них является функцией времени.

Правая часть уравнения (1.61) есть линейная комбинация функций, описывающих внешнее воздействие на цепь  $x(t)$ , и их производных. При выключении всех источников она становится равной нулю.

Значение  $v$  характеризует порядок сложности цепи (порядок цепи) и равно числу реактивных элементов (емкостей и индуктивностей), энергетическое состояние которых может быть задано независимо (подробнее этот вопрос будет рассмотрен в гл. 6). Различают цепи нулевого порядка (не содержащие реактивных элементов), первого, второго и более высоких порядков.

Для линейных уравнений вида (1.61) сформулирована теорема наложения (теорема суперпозиции). Если  $f(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(t)$ , где  $\alpha_i = \text{const}$  и  $y_i = y_i(t)$  являются решениями уравнений

$$a_v \frac{d^v y_i}{dt^v} + a_{v-1} \frac{d^{v-1} y_i}{dt^{v-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_i}{dt} + a_0 y_i = f_i(t), \quad (1.62)$$

то  $y(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t)$  является решением уравнения (1.61).

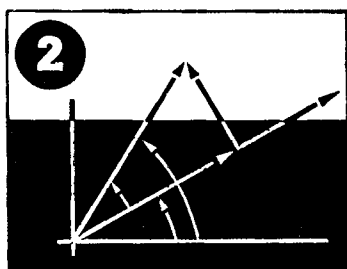
Математически это значит, что решение линейного уравнения (1.61) со сложной правой частью можно выразить через решения уравнений (1.62) с более простой правой частью.

На теореме наложения базируется широко используемый в теории цепей принцип наложения (принцип суперпозиции): реакция  $y(t)$  линейной цепи на сложное воздействие  $x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)$ , представляющее собой линейную комбинацию более

простых воздействий  $x_i(t)$ , равна линейной комбинации реакций  $y_i(t)$ , вызванных каждым из простых воздействий в отдельности:  $y(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t)$ . В частности, если внешним воздействиям  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  соответствуют реакции  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , то внешнему воздействию  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  соответствует реакция  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ , а внешнему воздействию  $x(t) = Ax_1(t)$ , где  $A = \text{const}$ , реакция  $y(t) = Ay_1(t)$ . Применение принципа наложения существенно облегчает исследование процессов в линейных электрических цепях, он лежит в основе многих широко используемых методов анализа.

Состояние теории цепей в значительной степени определяется степенью разработанности теории и методов решения соответствующих дифференциальных уравнений. К настоящему времени разработаны общие методы решения только линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, поэтому наиболее законченный вид имеет теория линейных инвариантных во времени цепей, которые в дальнейшем будем называть просто линейными цепями.

# Простейшие линейные цепи при гармоническом воздействии



## § 2.1. ЗАДАЧА АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С ИСТОЧНИКАМИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКОВ И НАПРЯЖЕНИЙ

### Понятие о гармонических функциях

Знакомство со свойствами электрических цепей и методами их анализа начнем с рассмотрения простейших линейных цепей при гармоническом воздействии. Если значения функции времени  $a(t)$  изменяются по синусоидальному или косинусоидальному закону

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi) - A_m \sin(\omega t + \psi'), \quad (2.1)$$

где  $\psi' = \psi + \pi/2$ , то такую функцию будем называть гармонической.

Традиционно в электротехнической литературе используют синусную форму записи гармонической функции, а в радиотехнической — косинусную, которой и будем пользоваться в дальнейшем. Обе формы записи являются равноценными, отличаются только началом отсчета значений функции и их можно проиллюстрировать одной и той же кривой (рис. 2.1, а).

Наибольшее значение гармонической функции  $A_m$  называется амплитудой. Ее размерность совпадает с размерностью гармонической функции. Наименьшее значение гармонической функции равно  $-A_m$ . Аргумент  $\theta = \omega t + \psi$  функции, записанной в косинусной форме, называется мгновенной фазой (фазой). Если гармоническая функция задана в синусной форме  $a(t) = A_m \sin \theta' = A_m \sin(\omega t + \psi')$ , то ее фаза находится по формуле  $\theta = \theta' - \pi/2$ .

Величина  $\psi$ , равная значению мгновенной фазы  $\theta$  при  $t = 0$ , называется начальной фазой. Фаза и начальная фаза гармонической функции выражаются в радианах (рад) или градусах ( $^\circ$ ).

Фаза гармонической функции линейно увеличивается во времени. Скорость ее изменения  $\omega = d\theta/dt$  называется угловой частотой. Она выражается в радианах в секунду (рад/с).

Гармонические функции времени представляют собой простейший вид периодических функций. В общем случае функция времени называется периодической, если ее значения повторяются через определенные промежутки времени. Наименьший промежуток времени  $T$ ,

через который наблюдается повторение значений функции, называется периодом. Таким образом, если  $a(t)$  — периодическая функция времени с периодом  $T$ , то для нее должно выполняться равенство

$$a(t) = a(t \pm nT), \quad (2.2)$$

где  $n$  — произвольное целое число.

Величина, обратная периоду  $T$ , называется частотой:

$$f = 1/T. \quad (2.3)$$

Частота выражается в герцах (Гц).

Режим работы электрической цепи, при котором напряжения и токи всех ветвей цепи являются периодическими функциями времени или сохраняют неизменные значения, называется установившимся. Строго говоря, электромагнитный процесс является периодическим только в том случае, если условие периодичности (2.2) выполняется на неограниченно большом промежутке времени  $t \in ]-\infty, \infty[$ , т. е. если рассматриваемый процесс существует в цепи неограниченно длительное время. Если процесс возник или прекратился при каком-то конечном значении  $t$ , то в этот момент его периодичность нарушается. Постоянные токи и напряжения в ряде случаев

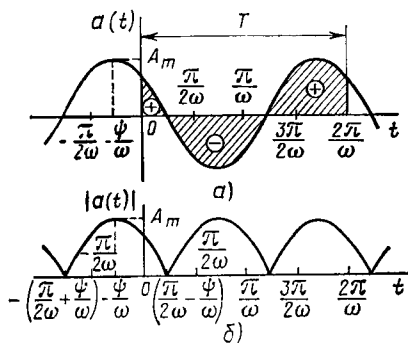


Рис 2.1. Графики гармонической функции (a) и ее модуля (б)

также удобно рассматривать как периодические с периодом  $T = \infty$  и частотой, равной нулю.

Очевидно, что процессы, имеющие место в реальных цепях, не могут быть бесконечно длительными, поэтому они могут считаться периодическими лишь приближенно. Вследствие этого на практике принимают, что установившимся является такой процесс, при котором условие периодичности (2.2) выполняется на достаточно большом интервале времени.

Если токи и напряжения цепи изменяются не по периодическому закону, то режим работы цепи называется не установившимся. Частным случаем процессов, протекающих в таком режиме, являются переходные процессы, которые имеют место при переходе от одного установившегося режима к другому. Теоретически переходные процессы в цепи затухают бесконечно долго и новый установившийся режим наступает только при  $t \rightarrow \infty$ . Как будет показано далее (см. гл. 6), переходные процессы практически прекращаются (или, точнее, затухают до пренебрежимо малого уровня) через конечный промежуток времени, по истечении которого процесс в цепи можно считать установившимся. Таким образом, представление токов и напряжений в виде гармонических или других периодических функций времени (в том числе и в виде постоянных величин) следует рассматри-



вать как приближенное математическое описание (математическую модель) реальных процессов, имеющих место в электрической цепи.

Определим период и частоту гармонической функции времени. Как известно,  $\cos \theta$  является периодической функцией  $\theta$  с периодом, равным  $2\pi$ . Следовательно, изменение времени на период  $T$  соответствует изменению фазы  $\theta$  на  $2\pi$ :

$$\omega T = 2\pi. \quad (2.4)$$

Используя (2.3) и (2.4), находим  $T = 2\pi/\omega$ ;  $f = \omega/2\pi$ .

Выражения (2.3), (2.4) позволяют определить также угловую частоту гармонической функции по заданной частоте  $f$  или периоду  $T$

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f. \quad (2.5)$$

Интервал времени, в котором значения гармонической функции положительны, например  $-\lceil \pi/(2\omega) \rceil - (\psi/\omega) < t < \lceil \pi/(2\omega) \rceil - (\psi/\omega)$ , называется положительным полупериодом; интервал времени, в котором значения функции отрицательны, например  $\lceil \pi/(2\omega) \rceil - (\psi/\omega) < t < \lceil 3\pi/(2\omega) \rceil - (\psi/\omega)$ , — отрицательным. Совокупность значений функции на положительном полупериоде называется положительной, а совокупность значений функции на отрицательном полупериоде — отрицательной полуволной.

При построении временных диаграмм (графиков) гармонических функций обычно бывает удобным откладывать по оси абсцисс не время  $t$ , а пропорциональную ему величину  $\omega t$  (рис. 2.2). В этом случае смещение точки  $\omega t = 0$  относительно ближайшего максимума функции равно начальной фазе  $\psi$ . Если начало координат (точка  $\omega t = 0$ ) смещено вправо относительно ближайшего максимума гармонической функции, то начальная фаза  $\psi$  является положительной, если влево — отрицательной. Если фазы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  двух гармонических функций  $a_1(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$  и  $a_2(t) = A_{m2} \cos(\omega t + \psi_2)$  отличаются на

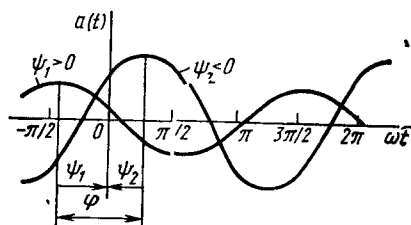


Рис 2.2. Гармонические функции с положительной и отрицательной начальными фазами

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \psi_1 - \psi_2 > 0, \quad (2.6)$$

то говорят, что эти функции сдвинуты по фазе, причем функция  $a_1(t)$  опережает по фазе функцию  $a_2(t)$ . Как видно из (2.6), разность фаз этих функций равна разности их начальных фаз и не зависит от времени. Две гармонических функции одинаковой частоты совпадают по фазе, если разность их начальных фаз равна нулю; находятся в противофазе, если  $\varphi = \pm \pi$ .

## Среднее, средневыпрямленное и действующее значения гармонических токов и напряжений

Токи и напряжения цепи, изменяющиеся по гармоническому или другому периодическому закону, наряду с другими параметрами характеризуются средними за период, средневыпрямленными и действующими значениями.

Среднее значение периодической функции  $a(t)$  за период  $T$  определяется выражением

$$A_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt. \quad (2.7)$$

Интеграл, входящий в выражение (2.7), численно равен площади, заключенной между кривой  $a(t)$ , осью времени и ординатами  $a(t_0)$  и  $a(t_0 + T)$ , причем площади, лежащие выше оси времени, берут со знаком плюс, а площади, лежащие под осью времени, — со знаком минус. Значение  $A_{\text{ср}}$  не зависит от выбора момента времени  $t_0$ , поэтому при его определении можно полагать  $t_0 = 0$ .

*Среднее значение гармонической функции за период равно нулю*, так как площадь, ограниченная положительной полуволной и осью времени, равна площади, ограниченной отрицательной полуволной и осью абсцисс (см. рис. 2.1, а). Таким образом, *среднее значение гармонического тока или напряжения за период равно нулю*.

Средневыпрямленным значением периодического тока или напряжения называется среднее значение модуля соответствующей периодической функции  $a(t)$  за период:

$$A_{\text{ср.в}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)| dt.$$

Значение  $A_{\text{ср.в}}$  пропорционально площади, ограниченной частью кривой  $|a(t)|$  и осью времени за период  $T$ , и не зависит от выбора начального момента времени  $t_0$ .

*Средневыпрямленное значение гармонического тока или напряжения равно среднему значению соответствующей гармонической функции  $a(t)$  на положительном полупериоде* (см. рис. 2.1, б)

$$A_{\text{ср.в}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |A_m \cos(\omega t + \psi)| dt = \frac{2}{T} \int_{\frac{\pi}{2\omega} - \frac{\psi}{\omega}}^{-\left(\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\psi}{\omega}\right)} A_m \cos(\omega t + \psi) dt.$$

Выполняя интегрирование и полагая  $T = 2\pi/\omega$ , находим, что средневыпрямленное значение гармонического тока или напряжения в  $\pi/2$  раз меньше его амплитуды

$$A_{\text{ср.в}} = (2/\pi)A_m = 0,637A_m. \quad (2.8)$$

Действующим значением периодической функции  $a(t)$  называется среднеквадратическое значение этой функции за период  $T$ :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [a(t)]^2 dt} . \quad (2.9)$$

В соответствии с ГОСТ 1494—77 мгновенные значения токов и напряжений ветвей, токов источников тока и э. д. с. источников напряжения, являющихся гармоническими функциями времени, изображают строчными буквами:  $i = i(t)$ ,  $u = u(t)$ ,  $j = j(t)$ ,  $e = e(t)$ ; действующие значения этих величин — соответствующими прописными буквами  $I$ ,  $U$ ,  $J$ ,  $E$  и амплитудные значения — теми же прописными буквами с индексом  $m$ :  $I_m$ ,  $U_m$ ,  $J_m$ ,  $E_m$ . Размерность средних, средневывраженных и действующих значений гармонических токов и напряжений совпадает с размерностью соответствующих функций и, следовательно, с размерностью их амплитуд.

При протекании периодического тока  $i(t)$  через линейное сопротивление  $R$  в нем в соответствии с выражениями (1.12) и (2.9) за период  $T$  выделяется энергия

$$W = \int_{t_0}^{t_0+T} R [i(t)]^2 dt = RI^2 T . \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) совпадает с выражением для энергии, выделяющейся в сопротивлении при протекании через него постоянного тока  $I_- = I$  в течение времени  $T$  (закон Джоуля—Ленца). Таким образом, действующее значение  $I$  периодического тока  $i(t)$  численно равно значению постоянного тока  $I_-$ , при протекании которого за время  $T$  выделяется такое же количество энергии, как и при протекании тока  $i(t)$ . Аналогично можно определить и действующее значение  $U$  периодического напряжения  $u(t)$ .

Действующее значение  $A$  гармонической функции  $a(t)$  в  $\sqrt{2}$  раз меньше ее амплитуды:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [A_m \cos(\omega t + \psi)]^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{A_m^2}{2T} \left[ \int_{t_0}^{t_0+T} dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \cos 2(\omega t + \psi) dt \right]} = \\ &= \frac{A_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 A_m . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Учитывая, что большинство потребителей реагируют на действующие, а не на максимальные (пиковые) значения токов и напряжений, при описании гармонических токов и напряжений принято указывать

их действующие, а не амплитудные значения. Выражая в (2.1) амплитуду  $A_m$  через действующее значение  $A$ , получаем еще одну форму записи гармонической функции

$$a(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \psi). \quad (2.12)$$

## Линейные операции над гармоническими функциями

Важнейшим свойством гармонических функций времени является то, что в результате линейных операций, производимых над ними (умножением на постоянное число, дифференцированием, интегрированием, алгебраическим сложением нескольких гармонических функций одинаковой частоты), получают гармонические функции той же частоты.

Действительно, при умножении гармонической функции  $a_1(t) = A_{m1} \times \cos(\omega_1 t + \psi_1)$  на постоянный множитель  $\alpha$  получаем новую гармоническую функцию

$$a(t) = \alpha A_{m1} \cos(\omega_1 t + \psi_1) = A_m \cos(\omega t + \psi),$$

угловая частота  $\omega$  и начальная фаза  $\psi$  которой совпадают с угловой частотой  $\omega_1$  и начальной фазой  $\psi_1$  исходной функции, а амплитуда  $A_m = \alpha A_{m1}$  отличается от амплитуды исходной функции в  $\alpha$  раз.

При дифференцировании гармонической функции  $a_1(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)] &= -\omega A_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) = \\ &= \omega A_{m1} \cos[\omega t + \psi_1 + (\pi/2)] = A_m \cos(\omega t + \psi), \end{aligned}$$

т. е. гармоническую функцию той же частоты; ее амплитуда и начальная фаза равны соответственно

$$A_m = \omega A_{m1}, \quad \psi = \psi_1 + (\pi/2).$$

Интеграл от гармонической функции  $a(t) = A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1)$ :

$$\begin{aligned} \int A_{m1} \cos(\omega t + \psi_1) dt &= (A_{m1}/\omega) \sin(\omega t + \psi_1) = (A_{m1}/\omega) \times \\ &\times \cos[\omega t + \psi_1 - (\pi/2)] \end{aligned}$$

представляет собой гармоническую функцию той же частоты, ее амплитуда и начальная фаза определяются выражениями (постоянная интегрирования принята равной нулю):

$$A_m = A_{m1}/\omega, \quad \psi = \psi_1 - (\pi/2).$$

При сложении двух гармонических функций  $a_1(t)$  и  $a_2(t)$  одинаковой частоты получают новую гармоническую функцию  $a(t)$  той же частоты [2]:

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t) = A_m \cos(\omega t + \psi), \quad (2.13)$$

$$\text{где } A_m = \sqrt{A_{m1}^2 + A_{m2}^2 + 2A_{m1}A_{m2} \cos(\psi_1 - \psi_2)};$$

$$\psi = \arctg \frac{A_{m1} \sin \psi_1 + A_{m2} \sin \psi_2}{A_{m1} \cos \psi_1 + A_{m2} \cos \psi_2}.$$

Множественно применяя формулу (2.13), можно убедиться, что результат алгебраического суммирования любого числа гармонических функций одинаковой частоты представляет собой гармоническую функцию этой же частоты. Аналогич-

ным образом можно убедиться, что линейная комбинация любого количества гармонических функций времени одной частоты

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i A_{mi} \cos(\omega t + \psi_i) = A_m \cos(\omega t + \psi),$$

где  $\alpha_i = \cos \psi_i$ , является гармонической функцией этой частоты.

Таким образом, линейные операции, выполняемые над гармонической функцией, приводят лишь к изменению ее амплитуды и начальной фазы; в результате линейных операций, выполняемых над совокупностью гармонических функций одной частоты, получается гармоническая функция той же частоты.

### Дифференциальное уравнение цепи при гармоническом воздействии

Рассмотрим линейную электрическую цепь с сосредоточенными параметрами, находящуюся под монохроматическим (одночастотным) гармоническим воздействием. Токи всех неуправляемых источников тока и э. д. с. всех неуправляемых источников напряжения такой цепи есть гармонические функции времени частоты  $\omega$ . Дифференциальное уравнение этой цепи, составленное для любого из неизвестных токов и напряжений  $y = y(t)$ , имеет вид (1.61), причем правая часть этого уравнения представляет собой линейную комбинацию гармонических функций и их производных, т. е. является гармонической функцией времени той же частоты, что и внешнее воздействие:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = A_m \cos(\omega t + \psi). \quad (2.14)$$

Следовательно, задача анализа линейной цепи с сосредоточенными параметрами при гармоническом воздействии сводится к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, правая часть которого является гармонической функцией времени.

Ограничимся пока рассмотрением установившегося режима, т. е. будем считать, что действующие в цепи источник и были подключены при  $t = -\infty$  и к настоящему моменту переходные процессы в цепи полностью прекратились. Из теории дифференциальных уравнений известно, что в таком режиме уравнение (2.14) имеет единственное периодическое решение

$$y(t) = Y_m \cos(\omega t + \psi),$$

которое является гармонической функцией времени.

Итак, в установившемся режиме токи и напряжения всех ветвей линейной цепи, находящейся под гармоническим воздействием, являются гармоническими функциями времени одной частоты и, следовательно, задача анализа цепи сводится к определению начальных фаз и амплитуд (или действующих значений) интересующих токов или напряжений.

## § 2.2. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

### Понятие о символических методах

Установившиеся значения токов и напряжений линейной цепи, находящейся под гармоническим воздействием, могут быть найдены путем непосредственного решения дифференциального уравнения цепи (2.14) при  $t \rightarrow \infty$ , однако даже для относительно простых цепей эта задача оказывается весьма трудоемкой. На практике анализ таких цепей обычно выполняют с помощью метода комплексных амплитуд, разработанного в конце прошлого века американскими инженерами Ч. П. Штейнметцем и А. Е. Кеннели. Большой вклад в развитие и теоретическое обоснование метода комплексных амплитуд внесли профессор Петербургского политехнического института В. Ф. Миткевич и советский ученый академик АН УССР Г. Е. Пухов.

Метод комплексных амплитуд, подобно известному логарифмическому методу, основан на идее функционального преобразования, при котором операции над исходными функциями (оригиналами) заменяются более простыми операциями над некоторыми новыми функциями, так называемыми изображениями или символами исходных функций. Методы такого типа будем называть символическими. Независимо от типа используемых функциональных преобразований решение любой задачи символическими методами содержит, как правило, следующие основные этапы:

- 1) прямое преобразование, в результате которого осуществляется переход от исходных величин (оригиналов) к их символам (изображениям);
- 2) определение изображений искомых величин путем выполнения по специально установленным правилам операций над изображениями;
- 3) обратное преобразование, с помощью которого переходят от изображений к оригиналам.

В частности, при использовании логарифмического метода исходные величины на первом этапе заменяют их логарифмами. На втором этапе, выполняя необходимые действия над логарифмами исходных величин, находят логарифмы искомых величин; операции над логарифмами оказываются проще, чем соответствующие им операции над исходными величинами (например, умножению исходных величин соответствует сложение их логарифмов, возведению исходной величины в степень  $m$  — умножение логарифма этой величины на  $m$  и т. д.). На третьем этапе осуществляют обратный переход от логарифмов непосредственно к искомым величинам.

Очевидно, что эффективность каждого из символических методов определяется трудоемкостью прямого и обратного функциональных преобразований и тем, насколько операции над изображениями проще соответствующих им операций над оригиналами.

## Комплексные числа и основные операции над ними

Символический метод комплексных амплитуд (комплексный метод, иногда, просто — символический метод) основан на представлении гармонических функций времени с помощью комплексных чисел или, точнее, на преобразовании исходных функций из временной области (области вещественного переменного  $t$ ) в частотную область (область мнимого аргумента  $j\omega$ ).

Напомним, что комплексным числом  $\underline{A}$  называется выражение вида

$$\underline{A} = A' + jA'' \quad (2.15)$$

где  $A'$  и  $A''$  — действительные числа, называемые соответственно вещественной и мнимой частями комплексного числа;  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Вещественную и мнимую части комплексного числа иногда обозначают:  $A' = \operatorname{Re} [\underline{A}]$ ,  $A'' = \operatorname{Im} [\underline{A}]$ . Выражение (2.15) — это алгебраическая форма записи комплексного числа.

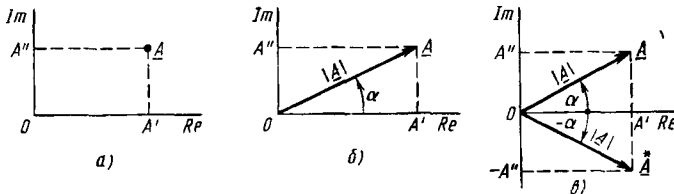


Рис. 2.3. К определению понятия комплексного числа

Комплексное число  $\underline{A}$  изображается на комплексной плоскости в виде точки  $A$ , абсцисса которой равна  $A'$ , а ордината —  $A''$  (рис. 2.3, а). Ось абсцисс, на которой откладывается вещественная часть комплексного числа, называется действительной ( $\operatorname{Re}$ ); ось ординат, на которой откладывается мнимая часть, — мнимой ( $\operatorname{Im}$ ).

Каждой точке  $\underline{A}$  комплексной плоскости и, следовательно, каждому комплексному числу  $\underline{A}$  можно поставить в соответствие вектор  $\underline{A}$ , проведенный из начала координат в точку  $A$  (рис. 2.3, б). Длину вектора, изображающего комплексное число, называют модулем этого числа

$$|\underline{A}| = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2} \quad (2.16)$$

Угол  $\alpha$ , образуемый вектором  $\underline{A}$  с положительным направлением вещественной оси, называют аргументом комплексного числа:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{A''}{A'} \quad (2.17)$$

Положительное направление отсчета  $\alpha$  — против часовой стрелки. Аргумент комплексного числа может иметь бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга на  $2n\pi$ , где  $n$  — целое число. Главное значение аргумента заключено в промежутке  $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ .

Как видно из рис. 2.3, б, вещественная  $A'$  и мнимая  $A''$  части комплексного числа  $\underline{A}$  есть проекции вектора  $\underline{A}$  на действительную и мнимую оси соответственно:

$$A' = \operatorname{Re} [\underline{A}] = |\underline{A}| \cos \alpha; \quad A'' = \operatorname{Im} [\underline{A}] = |\underline{A}| \sin \alpha \quad (2.18)$$

Подставляя соотношения (2.18) в выражение (2.15), можно перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической:

$$\underline{A} = |\underline{A}| \cos \alpha + j |\underline{A}| \sin \alpha. \quad (2.19)$$

Далее, используя формулу Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (2.20)$$

где  $e$  — основание натурального логарифма, получаем показательную форму записи комплексного числа

$$\underline{A} = |\underline{A}| e^{j\alpha}. \quad (2.21)$$

Комплексные числа  $\underline{A} = A' + jA'' = |\underline{A}|e^{j\alpha_A}$  и  $\underline{B} = B' + jB'' = |\underline{B}|e^{j\alpha_B}$  считаются равными, если попарно равны их действительные и мнимые части:  $A' = B'$ ,  $A'' = B''$  (или, что то же самое, равны их модули  $|\underline{A}| = |\underline{B}|$ ), а аргументы отличаются на  $2n\pi$ , где  $n$  — целое число;  $\alpha_A - \alpha_B = \pm 2n\pi$ .

Два комплексных числа  $\underline{A} = A' + jA''$  и  $\underline{A}^* = A' - jA''$  называются сопряженными, если их действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком. Точки на комплексной плоскости, изображающие сопряженные комплексные числа, симметричны относительно действительной оси (рис. 2.3,б). Модули сопряженных чисел равны, а главные значения их аргументов отличаются только знаком:

$$\underline{A} = |\underline{A}| e^{j\alpha}; \quad \underline{A}^* = |\underline{A}| e^{-j\alpha}.$$

Понятий «больше» и «меньше» для комплексных чисел не существует.

Арифметические операции над комплексными числами выполняются так же, как над обыкновенными двучленами, имея в виду, что  $j^2 = -1$ . Операции сложения и вычитания удобнее выполнять, используя алгебраическую форму записи:

$$\begin{aligned} \underline{A} + \underline{B} &= (A' + jA'') + (B' + jB'') = (A' + B') + j(A'' + B''); \\ \underline{A} - \underline{B} &= (A' + jA'') - (B' + jB'') = (A' - B') + j(A'' - B''). \end{aligned}$$

Очевидно, что сумма двух сопряженных комплексных чисел  $\underline{A} = A' + jA''$  и  $\underline{A}^* = A' - jA''$  представляет собой действительное число:

$$\underline{A} + \underline{A}^* = 2A'. \quad (2.22)$$

Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел удобнее проводить в показательной форме:

$$\begin{aligned} \underline{A} \cdot \underline{B} &= |\underline{A}| e^{j\alpha_A} \cdot |\underline{B}| e^{j\alpha_B} = |\underline{A}| |\underline{B}| e^{j(\alpha_A + \alpha_B)}; \\ \underline{A} / \underline{B} &= |\underline{A}| e^{j\alpha_A} / (|\underline{B}| e^{j\alpha_B}) = (|\underline{A}| / |\underline{B}|) e^{j(\alpha_A - \alpha_B)}; \\ \underline{A}^n &= [|\underline{A}| e^{j\alpha_A}]^n = |\underline{A}|^n e^{jn\alpha_A}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из выражений (2.23) следует, что при умножении вектора  $\underline{A} = |\underline{A}|e^{j\alpha_A}$  на действительное число  $m$  получается новый вектор, модуль которого в  $m$  раз больше модуля вектора  $\underline{A}$ :

$$m\underline{A} = m |\underline{A}| e^{j\alpha_A};$$



при умножении вектора  $\underline{A} = |\underline{A}|e^{j\alpha_A}$  на вектор  $e^{j\psi_B}$ , модуль которого равен единице, получается новый вектор, повернутый относительно вектора  $\underline{A}$  на угол  $\psi_B$  против часовой стрелки:

$$\underline{A} \cdot e^{j\psi_B} = |\underline{A}| e^{j(\alpha_A + \psi_B)}. \quad (2.24)$$

Из (2.24) и формулы Эйлера следует также, что умножение вектора  $\underline{A} = |\underline{A}|e^{j\alpha_A}$  на вектор

$$j = j \sin(\pi/2) = e^{j\pi/2} \quad (2.25)$$

равносильно повороту вектора  $\underline{A}$  на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки:

$$j\underline{A} = \underline{A}e^{j\pi/2} = |\underline{A}| e^{j[\alpha_A + (\pi/2)]},$$

а умножение вектора  $\underline{A}$  на вектор

$$-j = -j \sin(\pi/2) = e^{-j\pi/2} \quad (2.26)$$

приводит к повороту вектора  $\underline{A}$  на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке:

$$-j\underline{A} = \underline{A}e^{-j\pi/2} = |\underline{A}| e^{j[\alpha_A - (\pi/2)]}.$$

Наконец, умножение вектора  $\underline{A}$  на  $-1 = \cos(\pm\pi) + j \sin(\pm\pi) = e^{\pm j\pi}$  равносильно изменению аргумента  $\underline{A}$  на  $\pm\pi$ :  $-1 \cdot \underline{A} = \underline{A}e^{\pm j\pi} = |\underline{A}|e^{j(\alpha_A \pm \pi)}$ .

Умножение и деление комплексных чисел можно производить также и в алгебраической форме:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A' + jA'')(B' + jB'') = (A' B' - A'' B'') + j(A' B'' + A'' B'),$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A' + jA''}{B' + jB''} = \frac{(A' + jA'')(B' - jB'')}{(B' + jB'')(B' - jB'')} = \frac{A' B' + A'' B''}{|\underline{B}|^2} + j \frac{A'' B' - A' B''}{|\underline{B}|^2},$$

причем при выполнении деления учитывается, что произведение двух комплексно сопряженных чисел есть действительное число  $\underline{B}\underline{B}^* = (B' + jB'')(B' - jB'') = (B')^2 + (B'')^2 = |\underline{B}|^2$ .

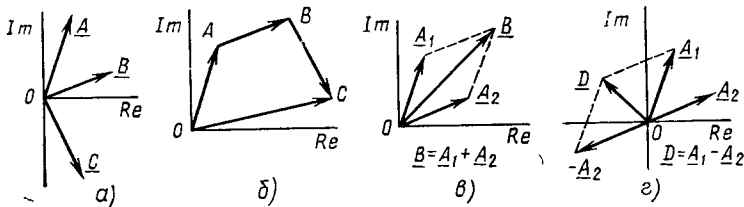


Рис. 2.4. Графическое определение суммы трех (а, б) и двух (в), а также разности двух (z) векторов

Суммирование комплексных чисел во многих случаях бывает удобно производить графически, используя правила действий над векторами. Вектор  $\underline{S}$ , равный сумме векторов  $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \dots, \underline{A}_N$ , может быть построен следующим образом: из начала координат строят вектор  $\underline{A}_1$ , из его конца, как из начала координат, строят вектор  $\underline{A}_2$ , из конца вектора  $\underline{A}_2$  строят вектор  $\underline{A}_3$  и т. д. Вектор, замыкающий ломаную линию, образованную из слагаемых векторов, представляет их сумму  $\underline{S}$ . Так, вектор  $\underline{D}$ , равный сумме векторов  $\underline{A}, \underline{B}$ , и  $\underline{C}$  (рис. 2.4, а, б), равен

замыкающей  $OC = D$  ломаной линии  $OABC$ , построенной из векторов  $A = \overline{OA}$ ,  $B = \overline{AB}$ ,  $C = \overline{BC}$ . Вектор  $B$ , равный сумме двух векторов  $A_1$  и  $A_2$ , — диагональ параллелограмма, построенного на сторонах  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 2.4,  $\theta$ ). Разность  $D = A_1 - A_2$  может быть найдена как сумма векторов  $A_1$  и  $-A_2$  (рис. 2.4,  $\varepsilon$ ).

### Комплексные изображения гармонических функций времени

Каждой гармонической функции времени  $a(t)$  можно поставить в соответствие комплексное число  $a$ , называемое мгновенным или текущим комплексом гармонической функции:

$$\underline{a} = A_m e^{j(\omega t + \psi)} = A_m [\cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)], \quad (2.27)$$

модуль которого равен амплитуде гармонической функции  $A_m$ , а аргумент — ее фазе  $\theta = \omega t + \psi$ . Как видно из выражения (2.27), вещественная часть мгновенного комплекса  $\underline{a}$  равна исходной гармонической функции

$$\text{Re} [\underline{a}] = A_m \cos(\omega t + \psi).$$



**Пример 2.1.** Мгновенные комплексы гармонического тока  $i_1 = 50 \cdot 10^{-3} \times \cos [10^6 t + (\pi/3)]$  [А] и гармонического напряжения  $u_2 = \sqrt{2} \cdot 100 \cos [314 t - (\pi/6)]$  [В] равны соответственно.  $\underline{i}_1 = 50 \cdot 10^{-3} e^{j[10^6 t + (\pi/3)]}$  и  $\underline{u}_2 = \sqrt{2} \cdot 100 e^{j[314 t - (\pi/6)]}$ .

Вещественные части этих комплексов есть исходные гармонические функции:

$$\text{Re} [\underline{i}_1] = \text{Re} \{50 \cdot 10^{-3} \cos [10^6 t + (\pi/3)] + j50 \cdot 10^{-3} \sin [10^6 t + (\pi/3)]\} = 50 \cdot 10^{-3} \cos [10^6 t + (\pi/3)] = i_1;$$

$$\text{Re} [\underline{u}_2] = \text{Re} \{\sqrt{2} \cdot 100 \cos [314 t - (\pi/6)] + j\sqrt{2} \cdot 100 \sin [314 t - (\pi/6)]\} = \sqrt{2} \cdot 100 \cos [314 t - (\pi/6)] = u_2.$$

Геометрически мгновенный комплекс  $\underline{a}$  может быть представлен в виде вектора  $\underline{a} = |a|e^{j\alpha(t)}$ , длина которого  $|a|$  в определенном масштабе равна амплитуде  $A_m$  соответствующей гармонической функции, а аргумент  $\alpha(t)$  изменяется во времени по такому же закону, как и фаза гармонической функции  $\alpha(t) = \omega t + \psi$ . Для того чтобы обеспечить этот закон изменения аргумента, вектор  $\underline{a}$  должен вращаться в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 2.5,  $a$ ). В момент времени  $t = 0$  вектор  $\underline{a}$  должен образовывать с положительным направлением вещественной оси угол  $\psi$ , равный начальной фазе рассматриваемой гармонической функции. Как видно из рис. 2.5,  $a$ , проекция вектора  $\underline{a}$  на вещественную ось в выбранном масштабе времени равна мгновенному значению исходной гармонической функции времени  $a(t) = \text{Re} [\underline{a}]$ .

Используя понятие комплексных сопряженных чисел и выражение (2.22), мгновенное значение гармонической функции  $a(t)$  можно оп-

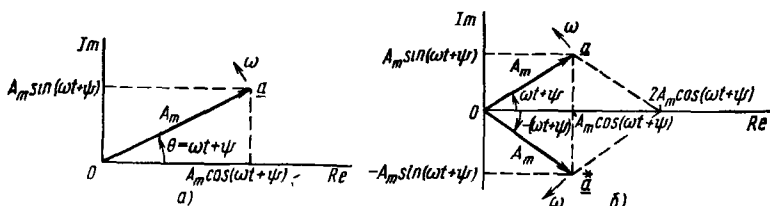


Рис. 2.5. К определению понятия мгновенного комплекса  $\underline{a}$  гармонической функции

ределить так же, как полусумму мгновенного комплекса  $\underline{a} = A_m e^{j(\omega t + \psi)}$  и сопряженного ему комплексного числа  $\underline{a}^* = A_m e^{-j(\omega t + \psi)}$ :

$$a(t) = (\underline{a} + \underline{a}^*)/2 = [A_m e^{j(\omega t + \psi)} + A_m e^{-j(\omega t + \psi)}]/2. \quad (2.28)$$

Векторы  $\underline{a}$  и  $\underline{a}^*$  имеют одинаковую длину, противоположные по знаку начальные фазы и вращаются в комплексной плоскости в противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью  $\omega$  (рис. 2.5, б). Проекции этих векторов на действительную ось равны

$$\text{Re} [\underline{a}] = \text{Re} [\underline{a}^*] = A_m \cos(\omega t + \psi),$$

а проекции на мнимую ось имеют различные знаки:

$$\text{Im} [\underline{a}] = A_m \sin(\omega t + \psi), \quad \text{Im} [\underline{a}^*] = -A_m \sin(\omega t + \psi).$$

Значение мгновенного комплекса  $\underline{a}$  в момент времени  $t = 0$  называется комплексной амплитудой  $\dot{A}_m$  гармонической функции времени  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$ :

$$\dot{A}_m = \underline{a}|_{t=0} = A_m e^{j\psi}. \quad (2.29)$$

Из выражения (2.29) следует, что комплексная амплитуда гармонической функции времени  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$  представляет собой комплексное число, модуль которого равен амплитуде  $A_m$  рассматриваемой функции, а аргумент — ее начальной фазе  $\psi$ . Геометрически комплексная амплитуда может быть представлена в виде неподвижного вектора, расположенного под углом  $\psi$  к вещественной оси (рис. 2.6, а), длина которого в определенном масштабе равна  $A_m$ .

Используя понятие комплексной амплитуды, выражение (2.27) для мгновенного комплекса  $\underline{a}$  может быть преобразовано к следующему виду:

$$\underline{a} = A_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t}. \quad (2.30)$$

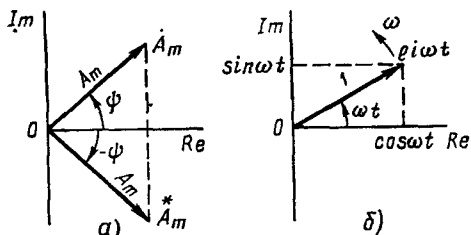


Рис. 2.6. К определению понятий комплексной амплитуды и оператора вращения  $e^{j\omega t}$

Вектор  $e^{j\omega t}$ , называемый оператором вращения, имеет единичную длину и вращается в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 2.6, б). Всякий неподвижный вектор, будучи умноженным на оператор вращения  $e^{j\omega t}$ , начинает вращаться в комплексной плоскости против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ .

В установленном режиме токи и напряжения всех ветвей электрической цепи, находящейся под гармоническим воздействием, есть гармонические функции времени одной частоты. Каждому из токов и напряжений ветвей электрической цепи  $a(t)$  может быть поставлен в соответствие текущий комплекс  $\underline{a}$ . Текущие комплексы, соответствующие токам и напряжениям различных ветвей, изображаются векторами, вращающимися с одинаковой угловой скоростью (неподвижными один относительно другого). Каждый из текущих комплексов токов и напряжений ветвей электрической цепи можно представить в виде произведения соответствующей комплексной амплитуды  $\dot{A}_m$  на оператор вращения  $e^{j\omega t}$ . Очевидно, что оператор вращения является общим для мгновенных комплексов токов и напряжений всех ветвей и не несет информации о токах или напряжениях конкретных ветвей.

Токи и напряжения отдельных ветвей отличаются только амплитудами и начальными фазами, поэтому информация о них при известной частоте  $\omega$  содержится в соответствующих комплексных амплитудах. Зная амплитуды и начальные фазы токов или напряжений любой ветви, всегда можно однозначно найти их комплексные амплитуды и, наоборот, по известной комплексной амплитуде можно однозначно установить амплитуду и начальную фазу исходного гармонического колебания.



**Пример 2.2.** Комплексная амплитуда гармонического тока  $i_1 = 5 \cos [10^6 t + (\pi/6)]$  [А] есть  $\dot{I}_{m1} = 5 e^{j\pi/6}$ , а комплексная амплитуда гармонического напряжения  $u_2 = 30 \cos 10^6 t$  [В] равна  $\dot{U}_{m2} = 30 e^{j0} = 30$ .

При  $\omega = 5 \cdot 10^4$  рад/с комплексным амплитудам тока  $\dot{I}_{m3} = \sqrt{2} \cdot 30 \cdot 10^{-3} \times e^{-j\pi/4}$  [А] и э.д.с.  $\dot{E}_{m4} = \sqrt{2} \cdot 10$  [В] соответствуют мгновенные значения тока и э. д. с.  $i_3 = \sqrt{2} \cdot 30 \cos [(5 \cdot 10^4 t - \pi/4)]$  [мА];  $e_4 = \sqrt{2} \cdot 10 \cos 5 \cdot 10^4 t$  [В].

Итак, установлено, что каждой гармонической функции времени  $a(t)$  можно единственным образом поставить в соответствие комплексное число  $\dot{A}_m$  (комплексную амплитуду), которое можно рассматривать как изображение этой гармонической функции в комплексной плоскости (по Г. Е. Пухову — комплексное изображение) или К-изображение):

$$\dot{A}_m = K [a(t)]. \quad (2.31)$$

Символом К будем обозначать операцию перехода от оригинала (исходной функции времени) к ее изображению в комплексной плоскости. Переход от гармонической функции времени  $a(t)$  к ее комплекс-

ной амплитуде  $\dot{A}_m$  может быть выполнен с помощью преобразования [3]

$$K[a(t)] = \frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} a(t) dt, \quad (2.32)$$

которое в дальнейшем будем называть **п р я м ы м К-п р е о б р а з о в а н и е м** или просто К-преобразованием гармонической функции. В справедливости выражения (2.32) можно убедиться путем непосредственной подстановки в него  $a(t) = A_m \cos(\omega t + \psi)$  и  $T = 2\pi/\omega$ .

Используя выражения (2.28), (2.29) и (2.30), найдем формулу для обратного перехода от комплексной амплитуды к исходной гармонической функции времени:

$$a(t) = (\dot{A}_m e^{j\omega t} + \dot{A}_m^* e^{-j\omega t})/2, \quad (2.33)$$

где  $\dot{A}_m = A_m e^{-j\psi}$  — комплексное число, сопряженное с комплексной амплитудой (рис. 2.6, а). Операцию перехода от К-изображения гармонической функции к оригиналу (**о б р а т н о е К-п р е о б р а з о в а н и е**) будем обозначать  $K^{-1}$ :

$$K^{-1}(\dot{A}_m) = a(t). \quad (2.34)$$

Выражения (2.31) и (2.34), устанавливающие связь между оригиналом и его изображением, могут быть заменены соотношением

$$a(t) \doteq \dot{A}_m,$$

в котором использован знак соответствия  $\doteq$ , означающий взаимное соответствие между функциями, определенными в различных областях.

Как видно из приведенных примеров, прямое и обратное К-преобразования при практических расчетах электрических цепей можно производить непосредственно с использованием определения комплексной амплитуды (2.29) без применения выражений (2.32) и (2.33).

### Операции над комплексными изображениями гармонических функций

Найдем операции над комплексными амплитудами, соответствующие линейным операциям (см. § 2.1) над гармоническими функциями времени.

Пусть необходимо умножить гармоническую функцию  $a(t) = A_m \times \cos(\omega t + \psi)$  на постоянное число  $\alpha$ .

Найдем комплексную амплитуду функции  $\alpha a(t)$ . В соответствии с определением К-преобразования (2.32) К-изображение функции  $\alpha a(t)$

$$K[\alpha a(t)] = \frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} \alpha a(t) dt = \alpha \frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} a(t) dt = \alpha \dot{A}_m.$$

Таким образом, умножение оригинала на произвольное число  $\alpha$  соответствует умножению изображения на это же число:

$$\alpha a(t) \doteq \alpha \dot{A}_m. \quad (2.35)$$

Найдем комплексное изображение суммы гармонических функций времени  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , ...,  $a_N(t)$  с комплексными амплитудами  $\dot{A}_{m1} = K[a_1(t)]$ ,  $\dot{A}_{m2} = K[a_2(t)]$ , ...,  $\dot{A}_{mN} = K[a_N(t)]$ . В соответствии с (2.32) получаем

$$\begin{aligned} K[a_1(t) + a_2(t) + \dots + a_N(t)] &= \frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} [a_1(t) + a_2(t) + \dots + a_N(t)] dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} a_1(t) dt + \frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} a_2(t) dt + \dots + \\ &+ \frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} a_N(t) dt = \dot{A}_{m1} + \dot{A}_{m2} + \dots + \dot{A}_{mN}. \end{aligned}$$

Итак, суммированию гармонических функций времени соответствует суммирование их комплексных амплитуд:

$$a_1(t) + a_2(t) + \dots + a_N(t) \doteq \dot{A}_{m1} + \dot{A}_{m2} + \dots + \dot{A}_{mN}. \quad (2.36)$$

Из выражений (2.35) и (2.36) следует, что линейной комбинации гармонических функций времени соответствует линейная комбинация их комплексных амплитуд:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k a_k(t) \doteq \sum_{k=1}^N \alpha_k \dot{A}_{mk}.$$

Здесь  $\alpha_k$  — постоянные коэффициенты;  $N$  — произвольное целое число.

Найдем комплексное изображение производной гармонической функции времени  $a(t)$ :

$$K\left[\frac{da(t)}{dt}\right] = \frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} \left[\frac{d}{dt} a(t)\right] dt. \quad (2.37)$$

Интегрируя (2.37) по частям, получаем

$$K\left[\frac{d}{dt} a(t)\right] = \frac{2}{T} [e^{-j\omega t} a(t)]_0^T + \frac{2j\omega}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} a(t) dt.$$

Учитывая, что каждый из сомножителей произведения  $e^{-j\omega t} a(t)$  является периодической функцией времени с периодом  $T = 2\pi/\omega$  и, следовательно, разность значений этого произведения, взятых через период, равна нулю

$$[e^{j\omega T} a(t)]_0^T = e^{j\omega T} a(T) - e^{j\omega 0} a(0) = 0,$$

а также, что величина  $\frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} a(t) dt$  представляет собой комплексную амплитуду  $\dot{A}_m$  гармонической функции  $a(t)$ , получаем окончательно

$$K\left[\frac{d}{dt} a(t)\right] = j\omega \dot{A}_m.$$

Таким образом, дифференцированию гармонических функций времени соответствует умножение их комплексных амплитуд на  $j\omega$ :

$$\frac{d}{dt} a(t) \doteq j\omega \dot{A}_m. \quad (2.38)$$

Определим комплексное изображение интеграла от гармонической функции времени  $a(t)$

$$K \left[ \int_{-\infty}^t a(t) dt \right] = \frac{2}{T} \int_0^T e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^t a(t) dt \right] dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$K \left[ \int_{-\infty}^t a(t) dt \right] = \frac{2}{T} \left[ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \int_{-\infty}^t a(t) dt \right]_0^T + \frac{2}{j\omega T} \int_0^T e^{-j\omega t} a(t) dt = \frac{1}{j\omega} \dot{A}_m.$$

Следовательно, интегрированию гармонических функций времени соответствует деление комплексных амплитуд на  $j\omega$ :

$$\int_{-\infty}^t a(t) dt = \frac{1}{j\omega} \dot{A}_m. \quad (2.39)$$

Итак, линейным операциям над гармоническими функциями времени соответствуют линейные операции над их комплексными амплитудами, причем операции дифференцирования и интегрирования заменяются операциями умножения и деления. Эти свойства комплексных изображений гармонических функций позволяют существенно упростить анализ линейных цепей, находящихся под гармоническим воздействием, так как позволяют заменять систему интегро-дифференциальных уравнений электрического равновесия цепи, составленную для мгновенных значений токов и напряжений ветвей, системой алгебраических уравнений для комплексных изображений соответствующих токов и напряжений.

Наряду с комплексной амплитудой  $\dot{A}_m$  в качестве изображения гармонической функции  $a(t)$  в комплексной плоскости широко используют другую комплексную величину — комплексное действующее значение  $\dot{A}$ . По определению, комплексное действующее значение гармонической функции  $a(t) = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \psi)$  представляет собой комплексное число, модуль которого равен действующему значению  $A$  гармонической функции, а аргумент — ее начальной фазе  $\psi$ :

$$\dot{A} = A e^{j\psi}. \quad (2.40)$$

Используя выражения (2.11) и (2.29), можно установить связь между комплексной амплитудой  $\dot{A}_m$  гармонической функции  $a(t)$  и ее комплексным действующим значением  $\dot{A}$ :

$$\dot{A} = \dot{A}_m / \sqrt{2}. \quad (2.41)$$

На комплексной плоскости  $\dot{A}$  изображается в виде вектора, совпадающего по направлению с вектором  $\dot{A}_m$ . Длина вектора  $\dot{A}$  в  $\sqrt{2}$  раз меньше длины вектора  $\dot{A}_m$ .

Все правила, устанавливающие соответствие между операциями над гармоническими функциями времени и операциями над их комплексными амплитудами, справедливы и для операций над комплексными действующими значениями гармонических функций.

Величины  $\dot{I} = I_m / \sqrt{2}$  и  $\dot{U} = U_m / \sqrt{2}$  обычно называют комплексными током и напряжением цепи.

## Комплексные сопротивление и проводимость участка цепи

Рассмотрим произвольную линейную цепь с сосредоточенными параметрами, находящуюся под гармоническим воздействием. Выделим участок этой цепи, имеющий два внешних зажима, и не содержащий источников энергии (рис. 2.7, а). Ток  $i$  и напряжение  $u$  на зажимах этого участка являются гармоническими функциями времени:

$$i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i),$$

$$u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u).$$

По определению, комплексным входным сопротивлением (комплексным сопротивлением)  $\underline{Z}$

пассивного участка цепи называется отношение комплексной амплитуды напряжения на зажимах участка цепи к комплексной амплитуде тока:

$$\underline{Z} = \dot{U}_m / \dot{I}_m. \quad (2.42)$$

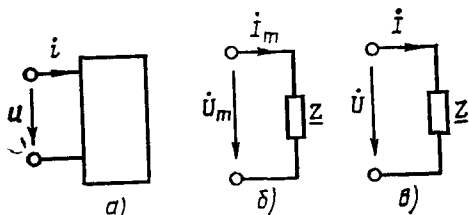


Рис. 2.7. Идеализированный двухполюсник (а) и его комплексные схемы замещения (б, в)

навливаем, что комплексное сопротивление пассивного участка цепи может быть также найдено как отношение комплексных действующих значений напряжения и тока:

$$\underline{Z} = \dot{U} / \dot{I}. \quad (2.43)$$

Комплексное входное сопротивление пассивного участка цепи представляет собой в общем случае комплексное число, поэтому оно может быть представлено в показательной

$$\underline{Z} = z e^{j\varphi} \quad (2.44)$$

или алгебраической

$$\underline{Z} = r + jx \quad (2.45)$$

формах. Величины  $z = |\underline{Z}|$  и  $\varphi$  называются соответственно модулем и аргументом комплексного сопротивления, величины  $r$  и  $x$  — его вещественной (резистивной) и мнимой (реактивной) составляющими (модуль комплексного входного сопротивления цепи  $z$  называется также полным входным сопротивлением). Представляя комплексные амплитуды и комплексные действующие значения напряжений и токов в показательной форме, находим из (2.42) и (2.43)

$$\underline{Z} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{I_m e^{j\psi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)}. \quad (2.46)$$



Сравнивая (2.44) и (2.46), устанавливаем, что модуль комплексного сопротивления  $z$  равен отношению амплитуд или действующих значений напряжения и тока на зажимах рассматриваемого участка цепи:

$$z = U_m / I_m = U / I, \quad (2.47)$$

а аргумент равен разности начальных фаз напряжения и тока:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i. \quad (2.48)$$

В зависимости от фазовых соотношений между напряжением и током величина  $\varphi$  может быть больше нуля (напряжение опережает ток по фазе), меньше нуля (напряжение отстает по фазе от тока) или равна нулю (ток и напряжение совпадают по фазе).

Комплексное входное сопротивление может быть представлено в виде вектора, расположенного в комплексной плоскости, длина которого в определенном масштабе равна  $z$ , а угол наклона к положительной вещественной полуоси равен  $\varphi$  (рис. 2.8, а).

Вещественная  $r$  и мнимая  $x$  составляющие входного сопротивления  $\underline{Z}$  представляют собой проекции вектора  $\underline{Z}$  на вещественную и мнимую оси соответственно:

$$r = \operatorname{Re} [\underline{Z}] = z \cos \varphi, \quad x = \operatorname{Im} [\underline{Z}] = z \sin \varphi.$$

Величина, обратная комплексному входному сопротивлению, называется комплексной входной проводимостью участка цепи

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z}. \quad (2.49)$$

Комплексная входная проводимость (комплексная проводимость) может быть определена как отношение комплексных амплитуд или комплексных действующих значений тока и напряжения на зажимах рассматриваемого участка цепи:

$$\underline{Y} = \dot{I}_m / \dot{U}_m = \dot{I} / \dot{U}. \quad (2.50)$$

Представляя комплексную проводимость  $\underline{Y}$  в показательной форме

$$\underline{Y} = 1/\underline{Z} = e^{-i\varphi} / z = ye^{j\vartheta}, \quad (2.51)$$

находим, что модуль комплексной входной проводимости  $y = |\underline{Y}|$ , называемый полной входной проводимостью цепи, является величиной, обратной модулю комплексного входного сопротивления:

$$y = 1/z = I_m / U_m = I / U,$$

а аргумент входной проводимости  $\vartheta$  равен по абсолютному значению и противоположен по знаку аргументу комплексного входного сопротивления  $\vartheta = -\varphi$ .

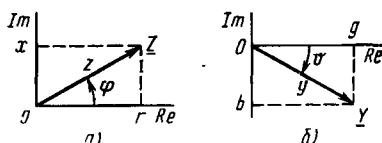


Рис. 2.8. Изображение  $Z$  и  $Y$  на комплексной плоскости

Комплексная входная проводимость участка цепи может быть также представлена в алгебраической форме  $\underline{Y} = g + jb$ . Здесь  $g$  и  $b$  — вещественная (резистивная) и мнимая (реактивная) составляющие входной проводимости, которые можно рассматривать как проекции вектора  $\underline{Y}$  на вещественную и мнимую оси комплексной плоскости (рис. 2.8, б):  $g = y \cos \vartheta$ ,  $b = y \sin \vartheta$ .

Подставляя в (2.49)  $\underline{Z} = r + jx$  и  $\underline{Y} = g + jb$ , находим связь между вещественными и мнимыми составляющими комплексного сопротивления и комплексной проводимости участка цепи:

$$\underline{Y} = g + jb = 1/(r + jx) = (r - jx)/(r^2 + x^2), \quad (2.52)$$

$$\underline{Z} = r + jx = 1/(g + jb) = (g - jb)/(g^2 + b^2). \quad (2.53)$$

Из выражений (2.52), (2.53) видно, что резистивные составляющие комплексного входного сопротивления и комплексной входной проводимости имеют одинаковые знаки:

$$g = r/(r^2 + x^2); \quad r = g/(g^2 + b^2), \quad (2.54)$$

а реактивные составляющие — противоположные:

$$b = -x/(r^2 + x^2), \quad x = -b/(g^2 + b^2). \quad (2.55)$$

Отметим, что каждая из составляющих комплексного сопротивления ( $r$  и  $x$ ) зависит как от резистивной  $g$ , так и реактивной  $b$  составляющей комплексной проводимости, а каждая из составляющих комплексной проводимости ( $g$  и  $b$ ) в свою очередь зависит от  $r$  и  $x$ .

### Комплексная схема замещения цепи. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Комплексные сопротивление и проводимость пассивного участка линейной цепи были введены как отношения комплексных действующих значений или комплексных амплитуд напряжения и тока, приложенных к зажимам этого участка цепи. В то же время комплексные сопротивление и проводимость любого участка линейной цепи, составленного из идеализированных пассивных элементов, не зависят от амплитуд (действующих значений) и начальных фаз токов и напряжений и определяются только параметрами элементов, входящих в рассматриваемый участок цепи, способом их соединения между собой и частотой внешнего гармонического воздействия.

Зная комплексное сопротивление (комплексную проводимость) участка цепи и одну из приложенных к данному участку цепи величин: ток  $i \doteq I_m$  или напряжение  $u \doteq \dot{U}_m$ , можно, используя (2.42), (2.50), найти неизвестное напряжение или неизвестный ток исследуемого участка

$$\dot{U}_m = \underline{Z}I_m; \quad I_m = \underline{Y}\dot{U}_m. \quad (2.56)$$

Аналогично комплексные действующие значения напряжения и тока на зажимах участка цепи

$$\underline{U} = \underline{Z}I; \quad I = \underline{Y}\underline{U}. \quad (2.57)$$

Выражения (2.56), (2.57) по структуре напоминают соотношения между мгновенными значениями напряжения и тока на зажимах линейного сопротивления (1.9), (1.10) и являются математической записью закона Ома в комплексной форме. В отличие от выражений (1.13), (1.16), (1.22), (1.23) уравнения (2.56), (2.57) являются алгебраическими.

Используя закон Ома в комплексной форме, каждому участку линейной электрической цепи, составленному из идеализированных пассивных элементов и имеющему два внешних вывода (см. рис. 2.7, а), в том числе любому идеализированному пассивному двухполюсному элементу, можно поставить в соответствие комплексную схему замещения, на которой рассматриваемый участок цепи представлен комплексным сопротивлением или проводимостью, а токи и напряжения на его зажимах — комплексными амплитудами (см. рис. 2.7, б) или комплексными действующими значениями (см. рис. 2.7, в).

Представляя все входящие в моделирующую цепь идеализированные пассивные элементы их комплексными схемами замещения, а токи и э. д. с. всех идеализированных источников — их комплексными амплитудами или комплексными действующими значениями, получаем комплексную схему замещения цепи (эквивалентную схему для комплексных амплитуд или эквивалентную схему для комплексных действующих значений). В отличие от этих схем замещения рассмотренные ранее эквивалентные схемы, на которых были изображены идеализированные двухполюсные элементы и указаны мгновенные значения токов  $i$  и напряжений  $u$  ветвей и идеализированных источников, будем называть эквивалентными схемами для мгновенных значений.

Таким образом, комплексная схема замещения цепи может быть получена из эквивалентной схемы для мгновенных значений заменой всех идеализированных пассивных двухполюсников их комплексными сопротивлениями (проводимостями) и всех токов и напряжений — их комплексными изображениями.

Мгновенные значения токов и напряжений различных ветвей электрической цепи связаны между собой линейными алгебраическими уравнениями баланса токов и напряжений, составляемыми на основании закона Кирхгофа. Учитывая, что суммированию гармонических функций времени соответствует суммирование их комплексных изображений, перейдем от законов Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений к законам Кирхгофа для комплексных изображений токов и напряжений, называемых обычно законами Кирхгофа в комплексной форме.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме устанавливает связь между комплексными изображениями токов в каждом из узлов моделирующей цепи: *сумма комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) токов всех ветвей, подключенных к каждому из узлов электрической цепи, равна нулю:*

$$\sum_k \dot{I}_{mk} = 0; \quad \sum_k \dot{I}_k = 0. \quad (2.58)$$

Здесь  $k$  — номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме определяет связь между комплексными изображениями напряжений ветвей, входящих в произвольный контур электрической цепи: *сумма комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) напряжений всех ветвей, входящих в любой контур моделирующей цепи, равна нулю:*

$$\sum_{\nu} \dot{U}_{m\nu} = 0; \quad \sum_{\nu} \dot{U}_{\nu} = 0. \quad (2.59)$$

Здесь  $\nu$  — номер ветви, входящей в рассматриваемый контур.

В ряде случаев удобно использовать другую формулировку второго закона Кирхгофа в комплексной форме: *сумма комплексных изображений напряжений на всех элементах любого контура моделирующей цепи равна сумме комплексных изображений э. д. с., всех входящих в контур источников напряжения:*

$$\sum_i \dot{U}_{mi} = \sum_j \dot{E}_{mj}; \quad \sum_i \dot{U}_i = \sum_j \dot{E}_j. \quad (2.60)$$

Здесь  $U_{mi}$ ,  $U_i$  — комплексные изображения напряжений всех элементов контура, за исключением источников напряжения;  $\dot{E}_{mj}$ ,  $\dot{E}_j$  — комплексные изображения э. д. с. источников напряжения, действующих в рассматриваемом контуре.

В связи с тем что выражения (2.58)—(2.60) непосредственно вытекают из соотношений (1.37), (1.40) и (1.42), при суммировании комплексных изображений токов и напряжений ветвей электрической цепи в выражениях (2.58)—(2.60) сохраняются те же правила знаков, что и при суммировании мгновенных значений токов и напряжений.

Используя выражения для законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме, можно составить систему уравнений электрического равновесия цепи для комплексных изображений токов и напряжений. В отличие от системы уравнений электрического равновесия, составленных для мгновенных значений токов и напряжений, *уравнения электрического равновесия для комплексных изображений токов и напряжений являются алгебраическими*. Решение таких уравнений намного проще, чем решение дифференциальных уравнений электрического равновесия, составленных для мгновенных значений токов и напряжений. Таким образом, с использованием комплексных схем замещения и составленных на их основании уравнений электрического равновесия цепи в комплексной форме анализ цепи переменного тока становится не сложнее анализа цепи постоянного тока и может производиться с использованием тех же приемов.

### Общая схема применения метода комплексных амплитуд

Анализ цепей методом комплексных амплитуд содержит следующие этапы:

1) замена гармонических токов и напряжений всех ветвей их комплексными изображениями, а эквивалентной схемы цепи для мгновенных значений — комплексной схемой замещения;

2) составление уравнений электрического равновесия цепи для комплексных изображений токов и напряжений на основе законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме;

3) решение системы уравнений электрического равновесия относительно комплексных изображений интересующих токов и напряжений;

4) переход от комплексных изображений токов и напряжений к их оригиналам.

### § 2.3. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ПАССИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

#### Сопротивление

Пусть к идеализированному резистивному элементу сопротивлению (см. рис. 1.2) приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону (рис. 2.9, а):

$$u_R = \sqrt{2}U_R \cos(\omega t + \psi_u). \quad (2.61)$$

Определим ток сопротивления  $i_R$  и его комплексное входное сопротивление  $\underline{Z}_R$ , а также построим диаграммы, характеризующие зависимость тока, напряжения и мгновенной мощности сопротивления от времени.

Связь между мгновенными значениями тока и напряжения линейного сопротивления определяется законом Ома (1.9). Подставляя (2.61) в (1.9), находим

$$i_R = u_R/R = [\sqrt{2}U_R \cos(\omega t + \psi_u)]/R. \quad (2.62)$$

Из выражения (2.62) видно, что при гармоническом внешнем воздействии ток сопротивления является гармонической функцией времени той же частоты, что и напряжение (рис. 2.9, б). В общем случае гармонический ток через сопротивление

$$i_R = \sqrt{2}I_R \cos(\omega t + \psi_i). \quad (2.63)$$

Сравнивая выражения (2.62) и (2.63), устанавливаем, что ток и напряжение линейного сопротивления совпадают по фазе

$$\psi_u = \psi_i = \psi,$$

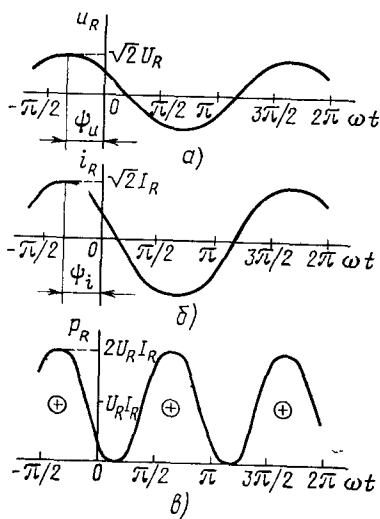


Рис. 2.9. Временные диаграммы напряжения (а), тока (б) и мгновенной мощности (в) сопротивления

а действующие значения напряжения и тока связаны между собой соотношением  $I_R = U_R/R$ , подобным закону Ома для мгновенных значений. Мгновенная мощность сопротивления определяется произведением мгновенных значений напряжения  $u_R$  и тока  $i_R$ :

$$p_R = u_R i_R = 2U_R I_R \cos^2(\omega t + \psi).$$

Выражая  $\cos^2(\omega t + \psi)$  через косинус двойного угла, получаем выражение для мгновенной мощности сопротивления

$$p_R = U_R I_R + U_R I_R \cos 2(\omega t + \psi). \quad (2.64)$$

Из выражения (2.64) следует, что мгновенная мощность сопротивления содержит две составляющие: постоянную, равную произведению действующих значений напряжения и тока, и переменную, изменяющуюся во времени по гармоническому закону с частотой, удвоенной по сравнению с частотой воздействующего напряжения (рис. 2.9, в). Максимальное значение мгновенной мощности сопротивления равно  $2U_R I_R$ , а минимальное — нулю.

В связи с тем что ток и напряжение сопротивления имеют одинаковые начальные фазы, они одновременно достигают максимальных значений и одновременно проходят через нуль (рис. 2.9, а, б). Мгновенная мощность сопротивления всегда положительна, причем она обращается в нуль в точках, где ток и напряжение равны нулю, и достигает максимума в моменты времени, когда ток и напряжение максимальны по абсолютному значению.

Среднее значение мощности сопротивления за период называется активной мощностью и равно произведению действующих значений напряжения и тока:

$$P_A = P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T p_R dt = \frac{U_R I_R}{T} \int_0^T [1 + \cos 2(\omega t + \psi)] dt = U_R I_R.$$

Активная мощность численно равна постоянной составляющей мгновенной мощности и характеризует среднюю за период скорость потребления сопротивлением энергии от источника.

Комплексные ток и напряжение сопротивления  $\dot{I}_R = I_R e^{j\psi_i} = \frac{U_R}{R} e^{j\psi_u}$  и  $\dot{U}_R = U_R e^{j\psi_u}$  имеют одинаковые аргументы и отличаются по модулю в  $R$  раз. На комплексной плоскости  $\dot{U}_R$  и  $\dot{I}_R$  изображаются векторами, которые совпадают по направлению и отличаются только масштабом (рис. 2.10, а).

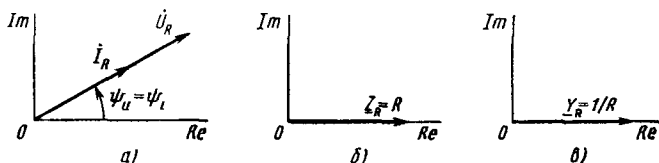


Рис. 2.10. Векторные диаграммы для тока и напряжения (а), комплексного сопротивления (б) и комплексной проводимости (в) сопротивления

Комплексное сопротивление  $\underline{Z}_R$  идеализированного резистивного элемента — сопротивлением равно отношению комплексных действующих значений напряжения и тока:

$$\underline{Z}_R = \dot{U}_R / \dot{I}_R = R. \quad (2.65)$$

Представляя комплексное сопротивление  $\underline{Z}_R$  в показательной и алгебраической формах

$$\underline{Z}_R = z_R e^{j\varphi_R} = r_R + jx_R \quad (2.66)$$

и сравнивая (2.65) с (2.66), устанавливаем, что модуль комплексного сопротивления равен

$$z_R = U_R / I_R = R, \text{ его аргумент } \varphi_R = \psi_u - \psi_i =$$

$= 0$  и что комплексное входное сопротивление  $\underline{Z}_R$  идеализированного резистивного элемента сопротивления содержит только вещественную составляющую:  $r_R = R, x_R = 0$ .

На комплексной плоскости  $\underline{Z}_R$  изображается вектором, направленным вдоль вещественной оси (рис. 2.10, б). Комплексная проводимость сопротивления  $\underline{Y}_R = 1/\underline{Z}_R = 1/R$  также изображается вектором, направление которого совпадает с направлением положительной вещественной полуоси (рис. 2.10, в).

Комплексная схема замещения сопротивления (рис. 2.11) имеет такой же вид, как и эквивалентная схема для мгновенных значений (см. рис. 1.2), и отличается от нее только тем, что мгновенные значения тока  $i_R$  и напряжения  $u_R$  заменены их комплексными изображениями  $\dot{I}_R$  и  $\dot{U}_R$ .

## Емкость

Рассмотрим емкость (см. рис. 1.5), к которой приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону:

$$u_c = \sqrt{2} U_c \cos(\omega t + \psi_u).$$

Используя выражение (1.13), найдем

$$\begin{aligned} i_c &= C \frac{du_c}{dt} = -\omega C \sqrt{2} U_c \sin(\omega t + \psi_u) = \\ &= \sqrt{2} \omega C U_c \cos(\omega t + \psi_u + \pi/2). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Как видно из (2.67), ток емкости изменяется по гармоническому закону

$$i_c = \sqrt{2} I_c \cos(\omega t + \psi_i),$$

причем начальная фаза тока на  $\pi/2$  больше начальной фазы напряжения:  $\psi_i = \psi_u + \pi/2$ , т. е. ток емкости опережает по фазе напряжение на  $90^\circ$  (рис. 2.12, а).

Действующее значение тока емкости пропорционально действующему значению напряжения:  $I_c = \omega C U_c$ .

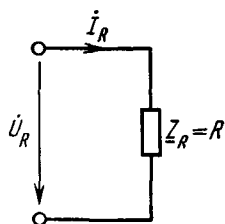


Рис. 2.11. Комплексная схема замещения участка цепи, содержащего сопротивление

Мгновенная мощность емкости  $p_c$  при гармоническом воздействии изменяется по гармоническому закону с частотой в два раза большей частоты воздействующего напряжения (рис. 2.12, б):

$$p_c = u_c i_c = [V\sqrt{2}U_c \cos(\omega t + \psi_u)] [V\sqrt{2}I_c \cos(\omega t + \psi_u + \pi/2)] = -2U_c I_c \cos(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_u) = -U_c I_c \sin 2(\omega t + \psi_u). \quad (2.68)$$

Как видно из временных диаграмм, в течение половины периода изменения мощности ток и напряжение емкости имеют одинаковый знак (емкость заряжается), при этом мгновенная мощность емкости положительна. В течение второй половины периода емкость отдает запасенную энергию (разряжается), при этом ток и напряжение емкости имеют различные знаки, а мгновенная мощность емкости отрицательна. Среднее значение мощности емкости за период (активная мощность) равно нулю:

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T p_c dt = 0. \quad (2.69)$$

Энергия  $w_c$ , запасенная в емкости, определяется в соответствии с выражением (1.18), приложенным к ней напряжением:

$$\begin{aligned} w_c &= C u_c^2 / 2 = \\ &= C U_c^2 \cos^2(\omega t + \psi_u) = \\ &= C U_c^2 [1 + \cos 2(\omega t + \psi_u)] / 2. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Из выражения (2.70) видно, что энергия емкости содержит две составляющие: переменную и постоянную, причем переменная составляющая энергии изменяется во времени по гармоническому закону с частотой,

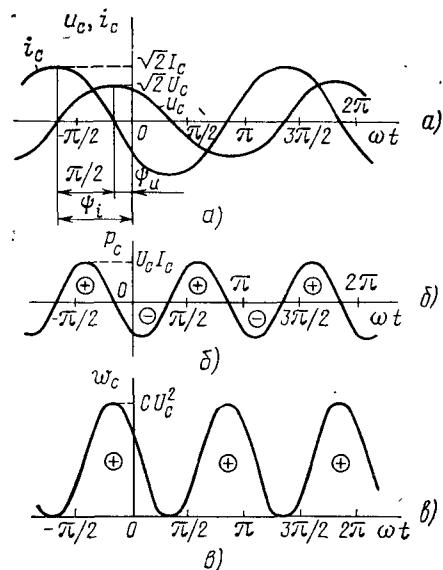


Рис. 2.12. Временные диаграммы напряжения, тока (а), мощности (б) и энергии (в) емкости

равной  $2\omega$  (рис. 2.12, в). Энергия емкости достигает максимального значения в те моменты времени, когда напряжение на емкости максимально по абсолютному значению; при уменьшении (по абсолютному значению) напряжения на емкости запасенная в ней энергия уменьшается и становится равной нулю в моменты времени, когда напряжение на емкости равно нулю. Таким образом, емкость периодически обменивается энергией с остальной частью цепи, причем энергия, запасенная в емкости, является неотрицательной величиной. Емкость не содержит внутренних источников энергии и поэтому в процессе разрядки не может отдать больше энергии, чем она получила от остальной части цепи в процессе зарядки.



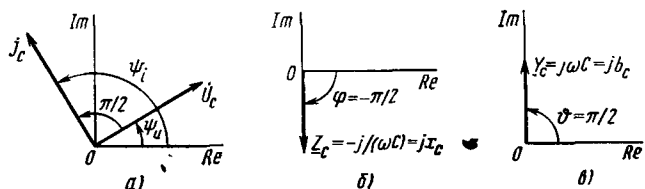


Рис. 2.13. Векторные диаграммы тока и напряжения (а), комплексного сопротивления (б), а также комплексной проводимости (в) емкости

В связи с тем что ток емкости  $i_c$  опережает напряжение емкости  $u_c$  по фазе на угол  $\pi/2$ , комплексные ток и напряжение емкости  $\dot{I}_c = I_c e^{j\psi_i} = \omega C U_c e^{j(\psi_u + \pi/2)}$ ;  $\dot{U}_c = U_c e^{j\psi_u}$  изображаются на комплексной плоскости в виде двух векторов, расположенных таким образом, что вектор  $\dot{I}_c$  повернут относительно вектора  $\dot{U}_c$  на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки (рис. 2.13, а). Комплексные сопротивление и проводимость емкости

$$\dot{Z}_c = \frac{\dot{U}_c}{\dot{I}_c} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} = 1/(j\omega C) = -j/(\omega C) \quad (2.71)$$

$$\underline{Y}_c = 1/\underline{Z}_c = \omega C e^{j\pi/2} = j\omega C. \quad (2.72)$$

Сравнивая (2.71) и (2.72) с показательной и алгебраической формами записи комплексных сопротивления и проводимости  $\underline{Z}_c = z_c e^{j\varphi_c} = r_c + jx_c$ ;  $\underline{Y}_c = y_c e^{j\theta_c} = g_c + jb_c$ , находим

модули, аргументы, вещественные и мнимые составляющие входных сопротивления и проводимости емкости:  $z_c = 1/(\omega C)$ ;  $y_c = \omega C$ ;  $\varphi_c = -\pi/2$ ;  $\theta_c = \pi/2$ ;  $g_c = r_c = 0$ ;  $x_c = -1/(\omega C)$ ;  $b_c = \omega C$ .

На комплексной плоскости  $\underline{Z}_c$  и  $\underline{Y}_c$  изображают векторами, направленными соответственно вдоль отрицательной и положительной мнимых полуосей (рис. 2.13, б, в). Комплексная схема замещения емкости приведена на рис. 2.14.

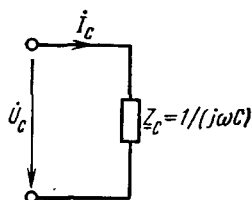


Рис. 2.14. Комплексная схема замещения емкости

## Индуктивность

Найдем напряжение  $u_L$  на индуктивности (см. рис. 1.7), ток  $i_L$  которой изменяется по гармоническому закону:

$$i_L = \sqrt{2} I_L \cos(\omega t + \psi_i). \quad (2.73)$$

Связь между мгновенными значениями тока и напряжения индуктивности определяется выражением (1.22). Подставляя (2.73) в (1.22), получаем

$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di_L}{dt} = -\omega L \sqrt{2} I_L \sin(\omega t + \psi_i) = \\ &= \sqrt{2} \omega L I_L \cos(\omega t + \psi_i + \pi/2). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Как видно из (2.74), напряжение индуктивности, находящейся под гармоническим воздействием, является гармонической функцией времени, имеющей ту же частоту, что и воздействующий ток (рис. 2.15, а):

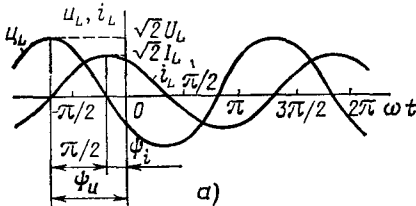
$$u_L = \sqrt{2}U_L \cos(\omega t + \psi_u),$$

причем начальная фаза напряжения на  $\pi/2$  больше начальной фазы тока  $\psi_u = \psi_i + \pi/2$ .

Действующее значение напряжения на индуктивности пропорционально действующему значению тока

$$U_L = \omega L I_L.$$

Так же, как и мгновенная мощность емкости, мгновенная мощность индуктивности  $p_L$  при гармоническом воздействии изменяется по гармоническому закону с частотой, равной  $2\omega$  (рис. 2.15, б):



$$\begin{aligned} p_L &= u_L i_L = \\ &= [\sqrt{2}U_L \cos(\omega t + \psi_u)] \times \\ &\times [\sqrt{2}I_L \cos(\omega t + \psi_i)] = \\ &= -U_L I_L \sin 2(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (2.75)$$

В связи с тем что в индуктивности отсутствует преобразование электрической энергии в другие виды энергии, активная мощность индуктивности равна нулю:  $P_A = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = 0$ .

Энергия  $\omega_L$ , запасенная в магнитном поле индуктивности, определяется мгновенным значением тока индуктивности:

$$\omega_L = \frac{L i^2}{2} = \frac{L I_L^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)].$$

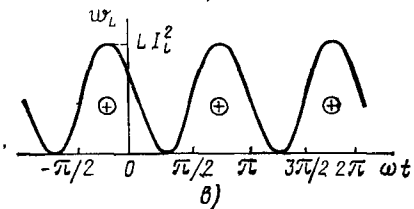
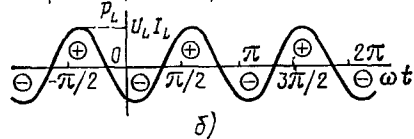


Рис. 2.15. Временные диаграммы тока и напряжения (а), комплексного сопротивления (б), а также комплексной проводимости (в) индуктивности

Так же, как и мгновенная энергия емкости, мгновенная энергия индуктивности содержит постоянную и переменную составляющие, причем переменная составляющая изменяется во времени по гармоническому закону с частотой  $2\omega$  (рис. 2.15, в).

Вследствие того что емкость и индуктивность являются дуальными элементами, процессы, имеющие место в этих элементах при гармоническом воздействии, описываются подобными по структуре аналитическими выражениями, а временные диаграммы для индуктивности подобны временным диаграммам для емкости и могут быть получены из последних путем замены напряжения на ток, а емкости на индуктивность.

Комплексный ток  $\dot{I}_L$  и комплексное напряжение  $\dot{U}_L$  индуктивности определяются выражениями

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\psi_i}; \quad (2.76)$$

$$\dot{U}_L = U_L e^{j\psi_u} = \omega L I_L e^{j(\psi_i + \pi/2)} \quad (2.77)$$

и изображаются на комплексной плоскости в виде пары векторов, длины которых в определенном масштабе равны действующим значениям напряжения и тока индуктивности, причем вектор  $\dot{U}_L$  повернут относительно вектора  $\dot{I}_L$  на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки (рис. 2.16, а).

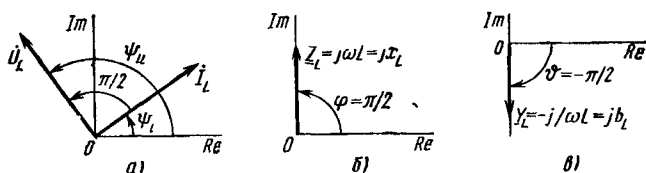


Рис. 2.16. Векторные диаграммы для тока и напряжения (а), комплексного сопротивления (б) и комплексной проводимости (в) индуктивности

Используя выражения (2.76), (2.77), находим комплексное сопротивление  $\underline{Z}_L$  и комплексную проводимость  $\underline{Y}_L$  индуктивности:

$$\underline{Z}_L = \dot{U}_L / \dot{I}_L = \omega L e^{j\pi/2} = j\omega L; \quad (2.78)$$

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = e^{-j\pi/2} / (\omega L) = 1 / (j\omega L) = -j / (\omega L). \quad (2.79)$$

Сравнивая (2.78) и (2.79) с показательной и алгебраической формами записи комплексных сопротивления и проводимости:  $\underline{Z}_L = z_L e^{j\varphi_L} = r_L + jx_L$ ;  $\underline{Y}_L = y_L e^{j\theta} = g_L + jb_L$ , получаем вещественную и мнимую части, модули и аргументы комплексного сопротивления и комплексной проводимости индуктивности:  $z_L = \omega L$ ;  $y_L = 1 / (\omega L)$ ;  $\varphi_L = \pi/2$ ;  $\theta_L = -\pi/2$ ;  $g_L = r_L = 0$ ;  $x_L = \omega L$ ;  $b_L = -1 / (\omega L)$ .

На комплексной плоскости  $\underline{Z}_L$  и  $\underline{Y}_L$  изображаются векторами, ориентированными соответственно вдоль положительного или отрицательного направления мнимой оси (рис. 2.16, б, в). Комплексная схема замещения индуктивности приведена на рис. 2.17.

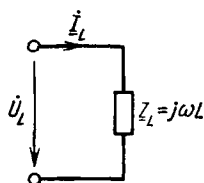


Рис. 2.17. Комплексная схема замещения индуктивности

Таким образом, комплексные сопротивления и проводимости идеализированных пассивных элементов линейных цепей не зависят от амплитуды (действующего значения) и начальной фазы внешнего воздействия и определяются только параметрами соответствующих элементов и частотой внешнего воздействия.

## § 2.4. АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### Последовательная $RL$ -цепь

Рассмотрим идеализированную электрическую цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$  (рис. 2.18, а). Пусть напряжение  $u$ , приложенное к внешним зажимам цепи, изменяется по гармоническому закону

$$u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u),$$

где  $U$ ,  $\omega$ ,  $\psi_u$  — заданные величины. Используя метод комплексных амплитуд, найдем установившееся значение тока  $i$  в цепи.

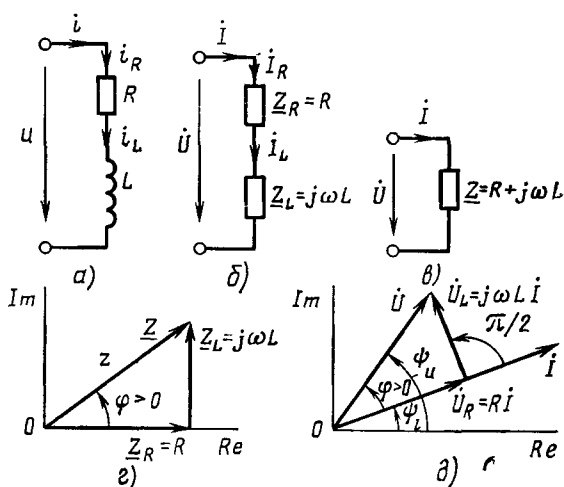


Рис. 2.18. Схемы и векторные диаграммы последовательной  $RL$ -цепи

Искомый ток  $i$  является гармонической функцией времени той же частоты, что и приложенное напряжение:

$$i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i),$$

где  $I$ ,  $\psi_i$  — неизвестные действующее значение и начальная фаза тока  $i$ .

Представляя сопротивление и емкость комплексными схемами замещения и переходя от тока  $i$  и напряжения  $u$  к их комплексным изображениям

$$i \doteq \dot{I} = I e^{j\psi_i}; \quad u \doteq \dot{U} = U e^{j\psi_u}, \quad (2.80)$$

получаем комплексную схему замещения цепи (рис. 2.18, б). Далее, используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составляем систему уравнений электрического равновесия цепи

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L; \quad (2.81)$$

$$I = I_R^* = I_L; \quad (2.82)$$

$$\dot{U}_R = \underline{Z}_R I_R; \quad (2.83)$$

$$\dot{U}_L = \underline{Z}_L I_L. \quad (2.84)$$

Здесь  $\underline{Z}_R = R$  и  $\underline{Z}_L = j\omega L$  — комплексные сопротивления входящих в рассматриваемую цепь идеализированных элементов. Величины  $R$ ,  $L$  и  $\omega$  заданы.

Подставляя (2.82)—(2.84) в уравнение (2.81), находим соотношение, связывающее комплексные изображения искомого тока и заданного напряжения:

$$\dot{U} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L) I = \underline{Z} I. \quad (2.85)$$

Выражение (2.85) представляет собой математическую запись закона Ома в комплексной форме для рассматриваемого участка цепи, причем  $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + j\omega L$  есть комплексное входное сопротивление этого участка цепи. Выражению (2.85) можно поставить в соответствие комплексную схему замещения цепи (рис. 2.18, в). Таким образом, комплексное входное сопротивление цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивлений  $R$  и индуктивности  $L$ , равно сумме комплексных сопротивлений этих элементов. В дальнейшем убедимся, что аналогично можно найти комплексное сопротивление любого участка цепи, представляющего собой последовательное соединение произвольного количества идеализированных двухполюсных элементов.

Комплексное входное сопротивление рассматриваемой цепи может быть изображено на комплексной плоскости в виде вектора  $\underline{Z}$ , равного геометрической сумме векторов  $\underline{Z}_R$  и  $\underline{Z}_L$  (рис. 2.18, г). Длина этого вектора равна, в выбранном масштабе, модулю комплексного входного сопротивления рассматриваемой цепи

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad (2.86)$$

а угол наклона к положительной вещественной полуоси — его аргументу

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\omega L/R). \quad (2.87)$$

Отметим, что при конечных значениях  $\omega$ ,  $L$  и  $R$  угол  $\varphi$  лежит в пределах

$$0 < \varphi < \pi/2. \quad (2.88)$$

Когда аргумент комплексного входного сопротивления  $\varphi$  какого-либо двухполюсника равен нулю, то говорят, что его входные сопротивление и проводимость имеют чисто резистивный (вещест-

венный) характер, когда  $|\varphi| = \pi/2$  — чисто реактивный (мнимый) характер. Если аргумент комплексного входного сопротивления двухполосника равен  $\pi/2$ , то его входное сопротивление и проводимость имеют индуктивный характер, если  $\varphi = -\pi/2$  — емкостной. В рассматриваемом случае значение аргумента  $\varphi$  определяется соотношением (2.88), поэтому входное сопротивление цепи имеет резистивно-индуктивный характер.

Используя (2.85), найдем комплексное действующее значение искомого тока

$$I = \dot{U}/Z = Ue^{j\psi_u}/(ze^{j\varphi}) = Ue^{j(\psi_u - \varphi)}/z, \quad (2.89)$$

где  $z$  и  $\varphi$  определяются соотношениями (2.86) и (2.87). Из выражений (2.89) и (2.80) можно определить действующее значение и начальную фазу тока:

$$I = U/z, \quad \psi_i = \psi_u - \varphi.$$

Переходя от комплексного изображения тока к оригиналу, окончательно получаем

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{2} \frac{U}{z} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) = \\ &= \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \psi_u - \arctg \frac{\omega L}{R}\right). \end{aligned}$$

В связи с тем что при заданной частоте внешнего воздействия  $\omega$  установившиеся значения токов и напряжений цепи полностью определяются их действующими значениями и начальными фазами, на практике обычно не возникает необходимости находить оригиналы токов и напряжений. Задача анализа цепи считается решенной, если найдены комплексные действующие значения соответствующих функций.

Векторные диаграммы для тока и напряжений  $RL$ -цепи приведены на рис. 2.18,  $\delta$ . Так как напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током, вектор  $\dot{U}_R$  совпадает по направлению с вектором  $\dot{I}$ , вектор  $\dot{U}_L$  повернут относительно вектора  $\dot{I}$  на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки (напряжение на индуктивности по фазе опережает ток). Независимо от начальной фазы напряжения  $\psi_u$  вектор  $\dot{I}$  повернут относительно вектора  $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$  по часовой стрелке на угол  $\varphi$ , т. е. ток отстает по фазе от напряжения на угол  $\varphi$ , равный аргументу комплексного входного сопротивления цепи. Отметим также, что так называемый треугольник напряжений, образованный векторами  $\dot{U}$ ,  $\dot{U}_R$  и  $\dot{U}_L$  (рис. 2.18,  $\delta$ ), подобен треугольнику сопротивлений (рис. 2.18,  $\varepsilon$ ), образованному векторами  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Z}_R$  и  $\underline{Z}_L$ .

Из векторной диаграммы видно, что действующие значения напряжения на входе цепи  $U$ , напряжения на сопротивлении  $U_R$  и напря-

жения на индуктивности  $U_L$ , которые определяют длину сторон треугольника напряжений, связаны соотношением

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}$$

г. е. действующее значение напряжения на входе цепи не равно алгебраической сумме действующих значений напряжений на элементах цепи.



**Пример 2.3.** Найдем комплексное входное сопротивление и ток последовательной  $RL$ -цепи (рис. 2.18, а), к зажимам которой приложено напряжение  $u = \sqrt{2} \cdot 50 \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 60^\circ)$ , В и определим напряжения на элементах цепи  $R = 5$  кОм,  $L = 1$  мГн.

Комплексное входное сопротивление цепи  $\underline{Z}$  равно сумме комплексных сопротивлений входящих в нее элементов:

$$\underline{Z} = R + j\omega L = (5 + j6,28) \cdot 10^3, \text{ Ом.}$$

Переходя от алгебраической формы записи к показательной

$$\underline{Z} = 8,03e^{j51,5^\circ}, \text{ кОм,}$$

определяем модуль комплексного входного сопротивления  $z = 8,03$  кОм и его аргумент  $\varphi = 51,5^\circ$ . Находим комплексный ток цепи

$$\dot{i} = \dot{U}_R / \underline{Z} = \frac{50e^{j60^\circ}}{8,03 \cdot 10^3 e^{j51,5^\circ}} = 6,23e^{j8,5^\circ}, \text{ мА}$$

и комплексные напряжения на сопротивлении и индуктивности

$$\dot{U}_R = R\dot{i} = 5 \cdot 10^3 \cdot 6,23 \cdot 10^{-3} e^{j8,5^\circ} = 31,2e^{j8,5^\circ}, \text{ В;}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{i} = 6,28 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3} e^{j90^\circ} 6,23 \cdot 10^{-3} e^{j8,5^\circ} = 39,1e^{j98,5^\circ}, \text{ В.}$$

Мгновенные значения соответствующих величин

$$i = \sqrt{2} \cdot 6,23 \cdot 10^{-3} \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 8,5^\circ), \text{ А;}$$

$$u_R = \sqrt{2} \cdot 31,2 \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 8,5^\circ), \text{ В;}$$

$$u_L = \sqrt{2} \cdot 39,1 \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 98,5^\circ), \text{ В.}$$

### Последовательная $RC$ -цепь

Рассмотрим последовательную  $RC$ -цепь (рис. 2.19, а), к зажимам которой приложено напряжение  $u$ , изменяющееся по гармоническому закону. Найдем комплексный ток цепи и ее комплексное входное сопротивление.

Переходя к комплексной схеме замещения цепи (рис. 2.19, б) и используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составляем систему уравнений электрического равновесия цепи:

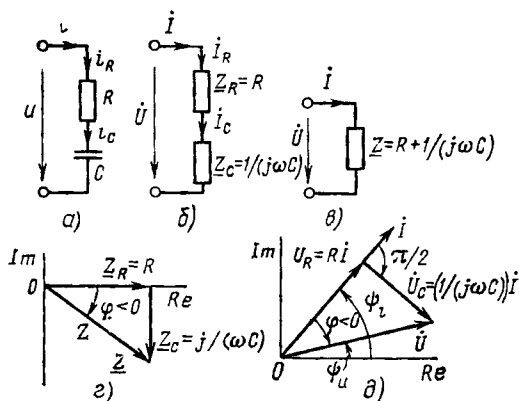
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C; \quad \dot{U}_R = \underline{Z}_R \dot{I}_R;$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R = \dot{I}_C; \quad \dot{U}_C = \underline{Z}_C \dot{I}_C, \quad (2.90)$$

где  $\underline{Z}_R = R$  и  $\underline{Z}_C = 1/(j\omega C)$  — комплексные сопротивления входящих в цепь идеализированных элементов. Решая систему уравнений (2.90) относительно комплексного действующего значения искомого тока, получаем

$$\underline{i} = \dot{U}/(\underline{Z}_R + \underline{Z}_C) = \dot{U}/\underline{Z}. \quad (2.91)$$

Здесь  $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C$  — комплексное входное сопротивление рассматриваемой цепи, которое равно сумме комплексных сопротивлений последовательно включенных идеализированных элементов.



Комплексная схема замещения цепи, соответствующая уравнению (2.91), приведена на рис. 2.19, в. Выразим комплексное сопротивление цепи  $\underline{Z}$  через параметры входящих в цепь элементов:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R - j/(\omega C) = z e^{j\varphi}, \quad (2.92)$$

Рис 2.19. Схемы и векторные диаграммы последовательной RC-цепи

где  $z = \sqrt{R^2 + [1/(\omega C)]^2}$ ;  $\varphi = -\arctg [1/(\omega C)]$ .

Как видно из выражения (2.92), при конечных значениях  $\omega$ ,  $R$  и  $C$  угол  $\varphi$  лежит в пределах  $-\pi/2 < \varphi < 0$ , т. е. входное сопротивление цепи имеет резистивно-емкостной характер. Векторная диаграмма для комплексного входного сопротивления цепи приведена на рис. 2.19, г.

Подставляя (2.92) в (2.91), окончательно получаем

$$\underline{i} = \frac{U}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + [1/(\omega C)]^2}} e^{j\{\psi_u + \arctg [1/(\omega C)]\}}. \quad (2.93)$$

Из выражения (2.93) видно, что ток  $i$  опережает приложенное напряжение  $u$  по фазе на угол  $\varphi$ . Совмещенная векторная диаграмма для тока и напряжений RC-цепи приведена на рис. 2.19, д.

### Последовательная RLC-цепь

Рассмотрим последовательную RLC-цепь (рис. 2.20, а), находящуюся под гармоническим воздействием, комплексная схема замещения которой приведена на рис. 2.20, б. Используя законы Ома и Кирх-



гофа в комплексной форме, составим систему уравнений электрического равновесия цепи

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C; \quad \dot{U}_L = \underline{Z}_L \dot{I}_L; \\ \dot{I} &= \dot{I}_R = \dot{I}_L = \dot{I}_C; \quad \dot{U}_C = \underline{Z}_C \dot{I}_C; \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\dot{U}_R = \underline{Z}_R \dot{I}_R,$$

где  $\underline{Z}_R = R$ ;  $\underline{Z}_L = j\omega L$ ;  $\underline{Z}_C = 1/(j\omega C)$  — комплексные сопротивления входящих в цепь идеализированных элементов. Решая систему (2.94) относительно тока  $\dot{I}$ , получаем

$$\dot{I} = \dot{U} / (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C) = \dot{U} / \underline{Z}. \quad (2.95)$$

Здесь  $\underline{Z}$  — комплексное входное сопротивление последовательной RLC-цепи, равное сумме комплексных сопротивлений входящих в

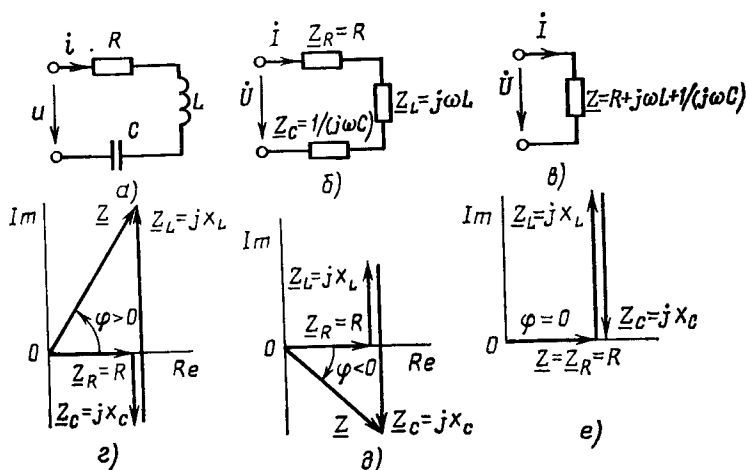


Рис. 2.20. Схемы и векторные диаграммы для сопротивлений последовательной RLC-цепи

цепь элементов, которое определяется только параметрами входящих в цепь элементов и частотой внешнего воздействия:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j[\omega L - 1/(\omega C)]. \quad (2.96)$$

Переходя от алгебраической формы записи  $\underline{Z}$  к показательной, находим модуль и аргумент комплексного входного сопротивления:

$$z = \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (2.97)$$

Из выражений (2.97) следует, что характер входного сопротивления цепи зависит от соотношения между мнимыми составляющими комплексного входного сопротивления емкости  $x_C = -1/(\omega C)$  и индуктивности  $x_L = \omega L$ . При  $x_L > |x_C|$  входное сопротивление цепи

имеет резистивно-индуктивный характер ( $0 < \varphi < \pi/2$ ). Векторная диаграмма, построенная на основании уравнения (2.96) и иллюстрирующая данный случай, представлена на рис. 2.20, *г* (для большей наглядности векторы  $\underline{Z}_L$  и  $\underline{Z}_C$  изображены немного смещенными один относительно другого). Если  $x_L < |x_C|$ , то входное сопротивление цепи имеет резистивно-емкостной характер ( $-\pi/2 < \varphi < 0$ ) (рис. 2.20, *д*). При  $x_L = |x_C|$  мнимые составляющие входного сопротивления емкости  $x_C$  и индуктивности  $x_L$  взаимно компенсируются и входное сопротивление цепи имеет чисто резистивный характер ( $\varphi = 0$ ) (рис. 2.20, *е*).

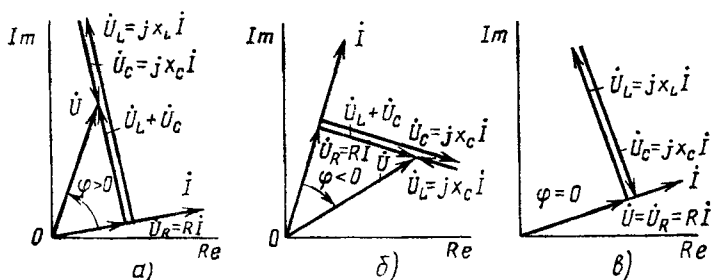


Рис. 2.21. Векторные диаграммы для тока и напряжений последовательной RCL-цепи

Используя уравнение (2.95), можно по известному напряжению, приложенному к внешним зажимам цепи, найти ток и наоборот. Векторные диаграммы для тока и напряжений цепи, соответствующие различным соотношениям между мнимыми составляющими комплексного сопротивления емкости  $x_C$  и индуктивности  $x_L$ , приведены на рис. 2.21. Вектор  $\dot{U}_R = RI$ , изображающий падение напряжения на сопротивлении, совпадает по направлению с вектором  $\dot{I}$ ; вектор  $\dot{U}_L = jx_L \dot{I} = j\omega L \dot{I}$  повернут относительно  $\dot{I}$  на  $90^\circ$  против часовой стрелки; вектор  $\dot{U}_C = -jx_C \dot{I} = -jI/\omega C$  направлен противоположно вектору  $\dot{U}_L$ . При  $x_L > |x_C|$  (рис. 2.21, *а*) вектор  $\dot{U}_L + \dot{U}_C$  совпадает по направлению с вектором  $\dot{U}_L$ , ток цепи отстает по фазе от напряжения ( $\varphi > 0$ ). При  $x_L < |x_C|$  (рис. 2.21, *б*) вектор  $\dot{U}_L + \dot{U}_C$  совпадает по направлению с вектором  $\dot{U}_C$ , ток цепи опережает по фазе напряжение ( $\varphi < 0$ ). Если  $x_L = |x_C|$  (рис. 2.21, *в*), то вектор  $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$ , напряжение на зажимах цепи  $\dot{U}$  равно напряжению на сопротивлении  $\dot{U}_R$ , ток цепи совпадает по фазе с приложенным напряжением ( $\varphi = 0$ ).



**Пример 2.4.** Определим комплексное входное сопротивление и комплексный ток последовательной RLC-цепи (см. рис. 2.20, *а*) с параметрами  $L = 80$  мкГн,  $C = 500$  пФ,  $R = 100$  Ом, к зажимам которой приложено напряжение  $u = \sqrt{2} \cdot 10 \cos \omega t$  В, для частот  $\omega_1 = 2.5 \cdot 10^4$ ,  $\omega_2 = 8 \cdot 10^4$  и  $\omega_3 = 5 \cdot 10^6$  рад/с. Комплексное входное сопротивление цепи (2.96) равно сумме комплексных сопротивлений входящих в нее элементов. Подставляя в (2.96) параметры элементов

цепи, находим комплексное сопротивление цепи при интересующих значениях частоты внешнего воздействия:

$$\underline{Z}|_{\omega=\omega_1} = 100 - j600 = 608,3e^{-j80,5^\circ}, \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}|_{\omega=\omega_2} = 100 + j390 = 402,6e^{j75,6^\circ}, \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}|_{\omega=\omega_3} = 100 \text{ Ом}.$$

Таким образом, при  $\omega = \omega_1$  входное сопротивление цепи имеет резистивно-емкостной характер; при  $\omega = \omega_2$  — резистивно-индуктивный; при  $\omega = \omega_3$  — чисто резистивный.

Используя закон Ома в комплексной форме (2.95), находим комплексный ток цепи:

$$i|_{\omega=\omega_1} = \frac{10}{608,3e^{-j80,5^\circ}} = 16,4e^{j80,5^\circ}, \text{ мА};$$

$$i|_{\omega=\omega_2} = \frac{10}{402,6e^{j75,6^\circ}} = 24,8e^{-j75,6^\circ}, \text{ мА};$$

$$i|_{\omega=\omega_3} = \frac{10}{100} = 100 \text{ мА}.$$

Как и следовало ожидать, согласно характеру комплексного входного сопротивления цепи, при  $\omega = \omega_1$  — ток опережает напряжение по фазе на угол  $80,5^\circ$ ; при  $\omega = \omega_2$  — ток отстает по фазе от напряжения на угол  $75,6^\circ$ ; при  $\omega = \omega_3$  напряжение и ток совпадают по фазе.

### Параллельная RLC-цепь

Рассмотрим параллельную RLC-цепь (рис. 2.22, а), к зажимам которой приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону. Комплексная схема замещения цепи, в которой идеализированные двухполюсные элементы представлены их комплексными проводимостями, изображена на рис. 2.22, б.

Используя законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, составим систему уравнений электрического равновесия цепи:

$$\begin{aligned} I &= I_R + I_C + I_L; \quad I_C = \underline{Y}_C \dot{U}_C; \\ \dot{U} &= \dot{U}_R = \dot{U}_C = \dot{U}_L; \quad I_L = \underline{Y}_L \dot{U}_L; \\ I_R &= \underline{Y}_R \dot{U}_R. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Здесь  $\underline{Y}_R = 1/R$ ;  $\underline{Y}_C = j\omega C$ ;  $\underline{Y}_L = 1/(j\omega L)$  — комплексные проводимости входящих в цепь идеализированных пассивных элементов.

Решая систему уравнений (2.98) относительно тока  $I$ , получаем

$$I = (\underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L) \dot{U} = \underline{Y} \dot{U}, \quad (2.99)$$

где  $\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L$  — комплексная проводимость параллельной RLC-цепи, равная сумме комплексных проводимостей входящих в цепь идеализированных элементов. Далее будет показано, что комплексная проводимость любого участка цепи, состоящего из произволь-

ного числа параллельно включенных ветвей, равна сумме комплексных проводимостей этих ветвей. Комплексная проводимость параллельной  $RLC$ -цепи, как и комплексная проводимость любой линейной цепи, не зависит от амплитуды (действующего значения) и начальной

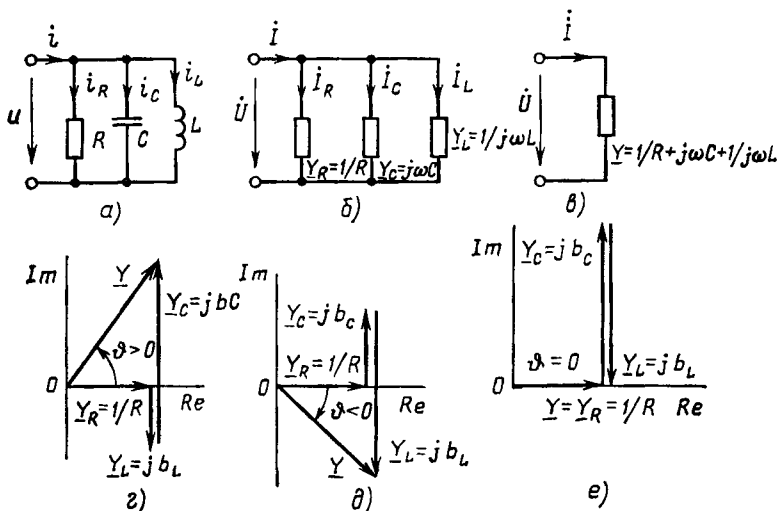


Рис. 2.22. Схемы и векторные диаграммы для проводимостей параллельной  $RLC$ -цепи

фазы внешнего воздействия, а определяется только параметрами входящих в цепь элементов и частотой внешнего воздействия:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L = (1/R) + j[\omega C - 1/(\omega L)]. \quad (2.100)$$

Переходя от алгебраической формы записи к показательной (2.51), найдем модуль  $y$  и аргумент  $\vartheta$  комплексной входной проводимости  $RLC$ -цепи:

$$y = \sqrt{(1/R)^2 + [\omega C - 1/(\omega L)]^2}; \quad \vartheta = \arctg \{R [\omega C - 1/(\omega L)]\}. \quad (2.101)$$

Анализ выражений (2.101) показывает, что характер входной проводимости, а следовательно, и характер входного сопротивления параллельной  $RLC$ -цепи зависят от соотношения между реактивными составляющими входной проводимости емкости  $b_C = \omega C$  и индуктивности  $b_L = -1/(\omega L)$ . Когда  $b_C > |b_L|$  (рис. 2.22, е), входная проводимость цепи имеет резистивно-емкостной характер (аргумент комплексной проводимости  $\pi/2 > \vartheta > 0$ , поэтому аргумент комплексного входного сопротивления  $\varphi$  лежит в пределах  $-\pi/2 < \varphi < 0$ ). При  $b_C < |b_L|$  (рис. 2.22, д) входная проводимость цепи имеет резистивно-индуктивный характер, а при  $b_C = |b_L|$  (рис. 2.22, е) реактивные составляющие входной проводимости емкости  $b_C$  и индуктивности  $b_L$  взаимно компенсируются и входная проводимость цепи имеет чисто резистивный (вещественный) характер.

Уравнение (2.99) представляет собой математическую запись закона Ома в комплексной форме для параллельной  $RLC$ -цепи. Комплексная схема замещения цепи, соответствующая этому выражению, приведена на рис. 2.22, в. Используя уравнение (2.99), можно по заданному напряжению определить ток, текущий через внешние за-

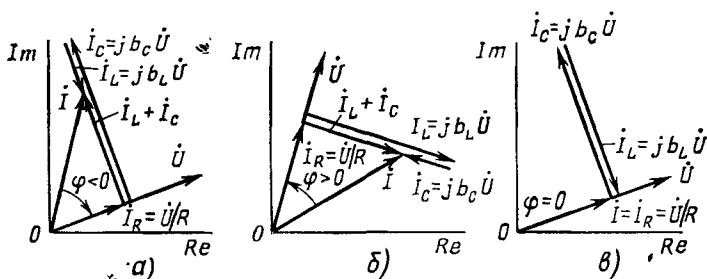


Рис. 2.23. Векторные диаграммы для токов и напряжения параллельной  $RLC$ -цепи при  $b_c > |b_L|$  (а),  $b_c < |b_L|$  (б),  $b_c = |b_L|$  (в)

жимы цепи, и, наоборот, по заданному току определить приложенное к цепи напряжение. Векторные диаграммы для токов и напряжения параллельной  $RLC$ -цепи приведены на рис. 2.23.

Уравнения (2.98), описывающие процессы в параллельной  $RLC$ -цепи, подобны по структуре уравнениям электрического равновесия ранее рассмотренной последовательной  $RLC$ -цепи (2.94) и могут быть получены из одного другого путем замены тока на напряжение, проводимости на сопротивление, емкости на индуктивность. Следовательно, параллельная и последовательная  $RLC$ -цепи являются дуальными. Векторные диаграммы дуальных цепей также могут быть получены из одних других путем упомянутых замен.

## § 2.5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ПРОСТЕЙШИХ ЦЕПЯХ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### Мгновенная мощность пассивного двухполюсника

Рассмотрим произвольный линейный двухполюсник, не содержащий источников энергии. Напряжение и ток на зажимах двухполюсника изменяются по гармоническому закону:  $u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \psi_u)$ ,  $i = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i)$  (рис. 2.24, а). Найдём мгновенную мощность двухполюсника

$$p = ui = 2UI \cos(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_i) = UI \cos \varphi + UI \times \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i), \quad (2.102)$$

где  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  — сдвиг фаз между напряжением и током.

Как видно из выражения (2.102), мгновенная мощность пассивного двухполюсника содержит постоянную составляющую  $UI \cos \varphi$ , значение которой зависит от сдвига фаз между током и напряжением, и переменную составляющую  $UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$ , амплитуда которой  $UI$  не зависит от  $\varphi$ . Среднее значение мгновенной мощности

двухполюсника за период (активная мощность) численно равно постоянной составляющей мгновенной мощности

$$P_A = UI \cos \varphi. \quad (2.103)$$

Анализ выражения (2.102) показывает, что особенности энергетических процессов в рассматриваемом двухполюснике полностью определяются характером его входного сопротивления.

Когда входное сопротивление двухполюсника имеет чисто резистивный характер ( $\varphi = 0$ ), постоянная составляющая мгновенной мощности

численно равна амплитуде переменной составляющей; мгновенная мощность изменяется от  $p_{\min} = 0$  до  $p_{\max} = 2UI$ , принимая только неотрицательные значения. Относительно внешних зажимов двухполюсник ведет себя подобно идеализированному пассивному элементу сопротивлению. В каждый момент времени двухполюсник только потребляет электрическую энергию от источника, необратимо преобразуя ее в другие виды энергии; обмен энергией между двухполюсником и источником энергии отсутствует.

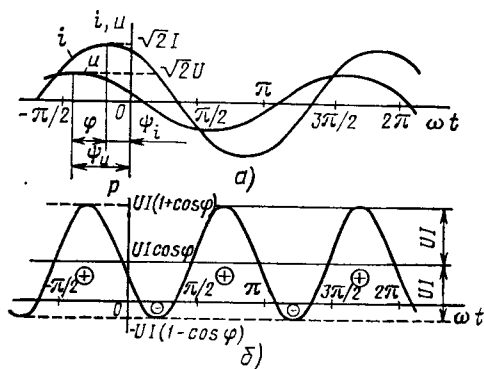


Рис. 2.24. Временные диаграммы напряжения и тока (а), а также мощности (б) произвольного пассивного двухполюсника

Если внутри рассматриваемого двухполюсника имеются энергосемкие элементы (емкости и индуктивности), то они могут обмениваться энергией только между собой, обмена же энергией между этими элементами и источником в установившемся режиме не происходит (более подробно это будет рассмотрено в гл. 3). Нетрудно убедиться, что при  $\varphi = 0$  уравнение (2.102) вырождается в уравнение (2.64), поэтому временные диаграммы рассматриваемого двухполюсника полностью совпадают с временными диаграммами для сопротивления (см. рис. 2.9).

Если входное сопротивление двухполюсника имеет чисто реактивный характер  $|\varphi| = \pi/2$ , то постоянная составляющая мгновенной мощности равна нулю ( $P_A = 0$ ), мгновенная мощность изменяется по гармоническому закону с частотой, вдвое превышающей частоту внешнего воздействия. В данном случае двухполюсник ведет себя подобно емкости или индуктивности, в течение одной половины периода изменения мощности запасая энергию от источника, в течение второй половины периода полностью отдавая ее источнику. При  $\varphi = +\pi/2$  уравнение (2.102) может быть преобразовано к виду (2.75), а временные диаграммы совпадут с временными диаграммами для индуктивности (см. рис. 2.15). Если  $\varphi = -\pi/2$ , уравнение (2.102) совпадает с (2.68), а временные диаграммы цепи имеют такой же вид, как и временные диаграммы для емкости (см. рис. 2.12).

Когда входное сопротивление двухполюсника имеет резистивно-емкостной или резистивно-индуктивный характер ( $0 < |\varphi| < \pi/2$ ), постоянная составляющая мгновенной мощности меньше амплитуды переменной составляющей, а мгновенная мощность двухполюсника изменяется от  $p_{\min} = -UI(1 - \cos \varphi)$  до  $p_{\max} = UI(1 + \cos \varphi)$ . В течение большей части периода мгновенная мощность положительна, в остальной части периода — отрицательна (рис. 2.24, б). В двухполюснике имеет место как процесс запасания энергии, так и процесс необратимого преобразования ее в другие виды энергии, так как площадь, ограниченная участком кривой  $p(t)$  с положительными ординатами (численно равная энергии, потребляемой двухполюсником от источника), больше площади, ограниченной участком кривой  $p(t)$  с отрицательными ординатами (соответствующей энергии, возвращаемой цепью источнику). Характер энергетических процессов в цепи одинаков как при  $0 < \varphi < \pi/2$ , так и при  $-\pi/2 < \varphi < 0$  (временные диаграммы, приведенные на рис. 2.24, соответствуют  $0 < \varphi < \pi/2$ ).

*Ни при каких значениях  $\varphi$  энергия, отдаваемая пассивным двухполюсником во внешнюю по отношению к нему цепь, не может превышать энергию, потребляемую этим двухполюсником от внешней цепи.*

### Активная, реактивная, полная и комплексная мощности

Активная мощность, которая была определена как среднее значение мгновенной мощности за период, характеризует среднюю за период скорость поступления энергии в двухполюсник и численно равна постоянной составляющей мгновенной мощности (2.103). По знаку активной мощности можно судить о направлении передачи энергии: при  $P_A > 0$  двухполюсник потребляет энергию, при  $P_A < 0$  — отдает энергию остальной части цепи. Очевидно, что для двухполюсников, не содержащих источников энергии, активная мощность не может быть отрицательной.

Полной мощностью  $P_S$  называется величина, равная произведению действующих значений тока и напряжения на зажимах цепи:

$$P_S = UI. \quad (2.104)$$

Полная мощность численно равна амплитуде переменной составляющей мгновенной мощности. Активная мощность двухполюсника может быть выражена через полную мощность:

$$P_A = P_S \cos \varphi. \quad (2.105)$$

Из выражения (2.105) видно, что полная мощность есть максимально возможное значение активной мощности цепи, которое имеет место при  $\varphi = 0$ .

Комплексное число  $\underline{P}_S$ , модуль которого равен полной мощности цепи  $P_S$ , а аргумент — углу сдвига фаз между током и напряжением  $\varphi$ , называется комплексной мощностью цепи

$$\underline{P}_S = P_S e^{j\varphi}. \quad (2.106)$$

Переходя от показательной формы записи  $\underline{P}_S$  к тригонометрической

$$\underline{P}_S = P_S \cos \varphi + jP_S \sin \varphi, \quad (2.107)$$

устанавливаем, что вещественная часть комплексной мощности равна активной мощности цепи:

$$\operatorname{Re} [\underline{P}_S] = P_S \cos \varphi = P_A. \quad (2.108)$$

Мнимая часть комплексной мощности представляет собой так называемую реактивную мощность цепи

$$\operatorname{Im} [\underline{P}_S] = P_S \sin \varphi = P_Q. \quad (2.109)$$

Реактивная мощность характеризует процессы обмена энергией между цепью и источником и численно равна максимальной скорости запасания энергии в цепи. В зависимости от знака угла  $\varphi$  реактивная мощность цепи может быть либо положительной, либо отрицательной. По знаку реактивной мощности, таким образом, можно судить о характере запасаемой энергии: при  $P_Q > 0$  энергия запасается в магнитном поле цепи, при  $P_Q < 0$  — в электрическом. При  $P_Q = 0$  в цепи отсутствует обмен энергией с источником.

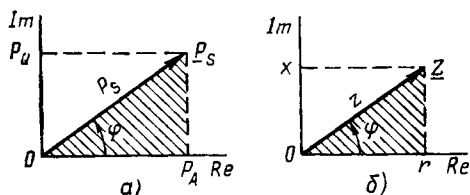


Рис. 2.25. Треугольники мощностей (а) и сопротивлений (б) произвольного пассивного двухполюсника

которого равна активной мощности цепи  $P_A$ , а мнимая — реактивной  $P_Q$ .

Комплексному числу  $\underline{P}_S$  можно поставить в соответствие вектор  $\underline{P}_S$ , проекции которого на вещественную и мнимую оси равны, соответственно  $P_A$  и  $P_Q$  (рис. 2.25, а). Прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной  $P_S$ , и катетами  $P_A$  и  $P_Q$  называется **треугольником мощностей**. Из рисунка видно, что полная, активная и реактивная мощности связаны между собой соотношением

$$P_S^2 = P_A^2 + P_Q^2.$$

В связи с тем что треугольник мощностей цепи подобен треугольнику сопротивлений этой же цепи (рис. 2.25, б), комплексная мощность  $\underline{P}_S$  и ее компоненты  $P_S$ ,  $P_A$ ,  $P_Q$  могут быть выражены через комплексное сопротивление цепи  $\underline{Z}$  и его компоненты  $z$ ,  $r$ ,  $x$ :

$$\begin{aligned} P_S &= UI = I^2 z; & P_Q &= P_S \sin \varphi = UIx/z = I^2 x; \\ P_A &= P_S \cos \varphi = UIr/z = I^2 r; & \underline{P}_S &= P_S e^{j\varphi} = I^2 z e^{j\varphi} = I^2 \underline{Z}. \end{aligned} \quad (2.111)$$



Найдем связь между комплексной мощностью и комплексными действующими значениями тока и напряжения на зажимах цепи. Подставляя в (2.106) выражения (2.104) и (2.48), находим

$$\underline{P}_S = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = \dot{U} \dot{I}^*, \quad (2.112)$$

где  $\dot{I}^* = I e^{-j\psi_i}$  — число, комплексно сопряженное с  $\dot{I}$  (комплексно сопряженный ток).

Таким образом, комплексная мощность цепи равна произведению комплексного напряжения цепи  $\dot{U}$  на комплексно сопряженный ток  $\dot{I}^*$ .

Активная, реактивная, полная и комплексная мощности имеют одинаковую размерность [Дж/с]. Однако для того, чтобы подчеркнуть различный физический смысл, который вкладывается в эти понятия, единицам данных величин присвоены различные названия. Активная мощность, так же как и мгновенная мощность, выражается в ваттах [Вт], полная и комплексная мощности — в вольт-амперах [В · А], реактивная мощность — в вольт-амперах реактивных [вар].



**Пример 2.5.** Напряжение и ток на зажимах произвольного двухполюсника изменяются по гармоническому закону:

$$u = \sqrt{2} \cdot 120 \cos(314t + 20^\circ), \text{ В};$$

$$i = \sqrt{2} \cdot 6,8 \cos(314t - 51^\circ), \text{ мА}.$$

Определим полную, активную, реактивную и комплексную мощности двухполюсника.

Комплексный ток  $\dot{I}$ , комплексное напряжение  $\dot{U}$  и угол сдвига фаз  $\varphi$  между током и напряжением на зажимах рассматриваемого двухполюсника:

$$\dot{i} = I e^{j\psi_i} = 6,8 \cdot 10^{-3} e^{-j51^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} = 120 e^{j20^\circ}, \text{ В};$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 71^\circ.$$

Подставляя эти величины в (2.104), (2.105), (2.109) и (2.112), находим искомые мощности:

$$P_S = UI = 120 \cdot 6,8 \cdot 10^{-3} = 0,816 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$P_A = UI \cos \varphi = 0,816 \cos 71^\circ = 0,266 \text{ Вт};$$

$$P_Q = UI \sin \varphi = 0,816 \sin 71^\circ = 0,772 \text{ вар};$$

$$\underline{P}_S = \dot{U} \dot{I}^* = 120 e^{j20^\circ} \cdot 6,8 \cdot 10^{-3} e^{j51^\circ} = 0,816 e^{j71^\circ} \text{ В} \cdot \text{А}.$$

В связи с тем что входное сопротивление цепи имеет резистивно-индуктивный характер ( $0 < \varphi < \pi/2$ ), реактивная мощность цепи положительна.

## Баланс мощностей

Рассмотрим произвольную электрическую цепь, содержащую  $N$  идеальных источников напряжения,  $M$  идеальных источников тока и  $H$  идеализированных пассивных элементов. Пусть  $i_k$ ,  $u_k$  — ток и

напряжение  $k$ -го элемента цепи. Из закона сохранения энергии следует, что сумма мгновенных мощностей всех элементов цепи в каждый момент времени равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{N+M+H} p_k = \sum_{k=1}^{N+M+H} u_k i_k = 0. \quad (2.113)$$

Группируя члены, соответствующие идеализированным активным ( $p_{k \text{ ист}}$ ) и идеализированным пассивным ( $p_{k \text{ потр}}$ ) элементам, уравнение (2.113) можно преобразовать к виду

$$-\sum_{k=1}^{N+M} p_{k \text{ ист}} = \sum_{k=1}^H p_{k \text{ потр}}. \quad (2.114)$$

Уравнение (2.114) называют уравнением (условием) баланса мгновенных мощностей. Принимая во внимание, что мгновенная мощность любого элемента характеризует скорость потребления энергии этим элементом (потребляемая мощность), а мгновенная мощность, взятая со знаком минус, характеризует скорость отдачи энергии этим элементом (отдаваемая мощность), условие баланса мгновенных мощностей может быть сформулировано следующим образом: *сумма мгновенных мощностей, отдаваемых всеми источниками, равна сумме мгновенных мощностей, потребляемых всеми приемниками энергии* (необходимо иметь в виду, что потребляется и отдается не мощность, а электрическая энергия).

Можно показать, что условие, аналогичное (2.114), выполняется и для комплексных мощностей всех элементов:

$$-\sum_{k=1}^{N+M} P_{Sk \text{ ист}} = \sum_{k=1}^H P_{Sk \text{ потр}}. \quad (2.115)$$

Уравнение (2.115) называется уравнением (условием) баланса комплексных мощностей. Таким образом, *сумма комплексных мощностей, отдаваемых всеми идеализированными активными элементами, равна сумме комплексных мощностей всех идеализированных пассивных элементов*.

Для практических расчетов электрических цепей условие баланса мощностей удобно представить в следующей форме:

$$\sum_{k=1}^N \dot{E}_k \dot{I}_k + \sum_{k=1}^M \dot{U}_k \dot{J}_k = \sum_{k=1}^H I_k^2 Z_k. \quad (2.116)$$

Левая часть выражения (2.116) представляет собой алгебраическую сумму комплексных мощностей, отдаваемых всеми активными элементами. Слагаемое вида  $\dot{E}_k \dot{I}_k$  есть произведение комплексного действующего значения э.д. с. источника напряжения на комплексно сопряженный ток этого источника; слагаемое вида  $\dot{U}_k \dot{J}_k$  равно произведению комплексного напряжения на источнике тока на комплексно сопряженный ток этого источника. Слагаемые, состоящие в левой части выражения (2.116), берут со знаком плюс, если направления токов и напряжений источников выбраны в соответствии с рис. 2.26. В против-

ном случае соответствующие слагаемые берут со знаком минус. Правая часть уравнения (2.116) есть сумма комплексных мощностей всех идеализированных пассивных элементов, причем каждое слагаемое вида  $I_k^2 Z_k$  равно произведению квадрата действующего значения тока  $k$ -го идеализированного пассивного элемента на его комплексное сопротивление.

Из условия баланса комплексных мощностей следуют условия баланса активных и реактивных мощностей: активная мощность, отдаваемая всеми источниками, равна активной мощности всех потребителей:

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Re} [\dot{E}_k \dot{I}_k] + \sum_{k=1}^M \operatorname{Re} [\dot{U}_k \dot{J}_k] = \\ = \sum_{k=1}^H I_k^2 r_k;$$

реактивная мощность всех источников равна реактивной мощности всех потребителей:

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Im} [\dot{E}_k \dot{I}_k] + \sum_{k=1}^M \operatorname{Im} [\dot{U}_k \dot{J}_k] = \sum_{k=1}^H I_k^2 x_k,$$

где  $r_k$  и  $x_k$  — вещественная и мнимая составляющие комплексного сопротивления  $k$ -го элемента.



**Пример 2.6.** Определим комплексный ток последовательной  $RL$ -цепи (см. рис. 2.18, а) с параметрами элементов  $R = 8$  кОм,  $L = 4$  мГн, к зажимам которой подключен источник в.д.с.  $e = \sqrt{2} \cdot 30 \cos(10^5 t + 45^\circ)$ , В, и проверим выполнение условия баланса мощностей.

Находим комплексное входное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = R + j\omega L = 8 \cdot 10^3 + j4 \cdot 10^3 = 8,94e^{j26,6^\circ}, \text{ кОм},$$

и, используя закон Ома в комплексной форме, находим комплексный ток цепи

$$\dot{I} = E / \underline{Z} = 30e^{j45^\circ} / (8,94 \cdot 10^3 e^{j26,6^\circ}) = 3,36 \cdot 10^{-3} e^{j18,4^\circ}, \text{ А}.$$

Комплексная мощность, отдаваемая источником напряжения:

$$-P_{\text{ист}} = \dot{E} \dot{I} = 30e^{j45^\circ} \cdot 3,36 \cdot 10^{-3} e^{-j18,4^\circ} = 0,1e^{j26,6^\circ}, \text{ В} \cdot \text{А}.$$

равна комплексной мощности, потребляемой сопротивлением и индуктивностью:

$$P_{\text{потр}} = I^2 (R + j\omega L) = (3,36 \cdot 10^{-3})^2 8,94e^{j26,6^\circ} = 0,1e^{j26,6^\circ}, \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Таким образом, условие баланса комплексных мощностей выполняется.

## Коэффициент мощности

При проектировании электроэнергетических систем важное народнохозяйственное значение имеет обеспечение передачи максимальной активной мощности в нагрузку при заданных действующих зна-

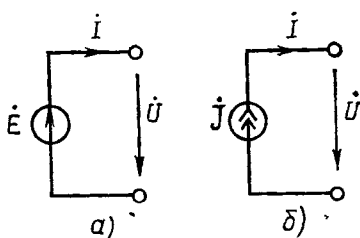


Рис. 2.26. К определению знака комплексных мощностей: а — отдаваемой источником напряжения; б — отдаваемой источником тока

чениях токов и напряжений. Из выражения (2.103) видно, что повышение  $P_A$  при неизменных действующих значениях токов и напряжений может быть достигнуто путем увеличения  $\cos \varphi$ , т. е. путем уменьшения угла сдвига фаз между током и напряжением. Максимально возможное значение  $P_A$  равно полной мощности  $P_S$  и достигается при  $\cos \varphi = 1$ . При уменьшении  $\cos \varphi$  для получения заданной активной мощности в нагрузке требуется увеличивать действующие значения токов и напряжений, что ведет к росту потерь энергии в системе и требует увеличения мощности источников энергии.

Величина, характеризующая степень приближения активной мощности нагрузки к максимальному значению  $\cos \varphi = P_A/P_S$ , называется коэффициентом мощности.

Очевидно, что наивысшее значение коэффициент мощности ( $\cos \varphi = 1$ ) имеет при чисто резистивном характере нагрузки. Если нагрузка имеет резистивно-емкостной или резистивно-индуктивный характер  $\underline{Y}_H = g_H + jb_H$ , то параллельно ей подключают компенсирующий элемент, проводимость которого выбирают равной по абсолютному значению и противоположной по знаку мнимой составляющей проводимости нагрузки:

$$\underline{Y}_K = jb_K = -jb_H. \quad (2.117)$$

Комплексное входное сопротивление  $\underline{Z}$  участка цепи, представляющего собой параллельное соединение нагрузки и компенсирующего элемента, будет иметь чисто резистивный характер  $\underline{Z} = 1/(\underline{Y}_H + \underline{Y}_K) = 1/g_H$ , что обеспечит максимально возможное значение коэффициента мощности.

Комплексное сопротивление большинства реальных приемников энергии (электродвигателей, электронагревательных элементов, осветительных приборов) имеет резистивно-индуктивный характер:  $b_H = -1/(\omega L_H) < 0$ .

Для компенсации мнимой составляющей проводимости нагрузки параллельно ей должны подключаться компенсирующие конденсаторы, емкость которых рассчитывают в соответствии с условием (2.117):

$$C_K = -b_H/\omega = 1/(\omega^2 L_H). \quad (2.118)$$



**Пример 2.7.** В качестве нагрузки некоторого электротехнического устройства используется двухполюсник, рассмотренный в примере 2.5. Определим тип компенсирующего элемента и рассчитаем его основной параметр (емкость  $C_K$  или индуктивность  $L_K$ ).

Комплексная проводимость нагрузки

$$\underline{Y}_H = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = 56,7 \cdot 10^{-6} e^{-j71^\circ} = (18,4 - j53,6) 10^{-6}, \text{ См,}$$

в данном случае имеет резистивно-индуктивный характер ( $b_H < 0$ ), следовательно, в качестве компенсирующего элемента необходимо использовать конденсатор. Емкость компенсирующего конденсатора  $C_K$  может быть рассчитана по формуле (2.118):

$$C_K = -b_H/\omega = 53,6 \cdot 10^{-6}/314 = 0,17 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

## Согласование источника энергии с нагрузкой

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из источника энергии и нагрузки. Пусть источник энергии представлен последовательной схемой замещения (рис. 2.27), причем его внутреннее сопротивление имеет комплексный характер:  $\underline{Z}_i = r_i + jx_i$ .

Задача согласования источника энергии с нагрузкой заключается в выборе такого сопротивления нагрузки  $\underline{Z}_H = r_H + jx_H$ , при котором в цепи будут выполняться условия, называемые критериями согласования. Рассмотрим согласование источника с нагрузкой по критерию наибольшей активной мощности, передаваемой в нагрузку, и по критерию наибольшего к. п. д.

Активная мощность нагрузки в соответствии с (2.111)

$$P_A = I^2 r_H = E^2 r_H / [(r_i + r_H)^2 + (x_i + x_H)^2]. \quad (2.119)$$

Как видно из (2.119),  $P_A$  является функцией двух переменных  $r_H$  и  $x_H$ . В связи с тем что вещественная  $r_H$  и мнимая  $x_H$  составляющие сопротивления нагрузки не зависят одна от другой, выбор значения каждой из этих величин, соответствующего максимуму  $P_A$ , можно производить в отдельности.

Величина  $x_H$  входит только в знаменатель выражения (2.119). Очевидно, что максимальное значение активной мощности по этой переменной  $P_{A \max}$  будет достигнуто, если

$$x_H = -x_i. \quad (2.120)$$

При этом  $P_{A \max} = P_A|_{x_H = -x_i} = E^2 r_H / (r_i + r_H)^2$ .

Для определения значения  $r_H$ , соответствующего наибольшему возможному значению (максимум максимум) активной мощности нагрузки  $P_{A \max \max}$ , продифференцируем  $P_{A \max}$  по  $r_H$  и приравняем нулю полученное выражение:

$$\frac{dP_{A \max}}{dr_H} = \frac{(r_i + r_H)^2 - 2r_H(r_i + r_H)}{(r_i + r_H)^4} E^2 = 0.$$

Иначе

$$(r_i + r_H)^2 - 2r_H(r_H + r_i) = 0. \quad (2.121)$$

Решая уравнение (2.121), находим значение вещественной составляющей сопротивления нагрузки

$$r_H = r_i, \quad (2.122)$$

при котором активная мощность  $P_A$  достигает наибольшего возможного значения (рис. 2.28, а):

$$P_{A \max \max} = P_A|_{\substack{\max \\ r_H = r_i \\ x_H = -x_i}} = P_A|_{r_H = r_i} = \frac{E^2}{4r_i}. \quad (2.123)$$

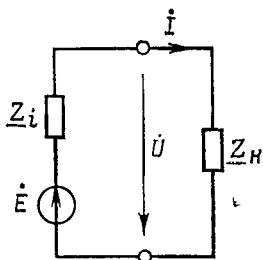


Рис. 2.27. Схема замещения источника энергии с нагрузкой

Объединяя условия (2.120) и (2.122), находим, что наибольшее возможное значение активной мощности нагрузки  $P_{A \max \max}$  соответствует  $Z_H = r_H + jx_H = r_i - jx_i$  или  $Z_H = \underline{Z}_i^*$ , где  $\underline{Z}_i^*$  — величина, сопряженная с комплексным внутренним сопротивлением источника.

Таким образом, для согласования источника энергии с нагрузкой по критерию наибольшей активной мощности, передаваемой в нагрузку, сопротивление нагрузки должно быть величиной, комплексно сопряженной с внутренним сопротивлением источника. В частном случае, если

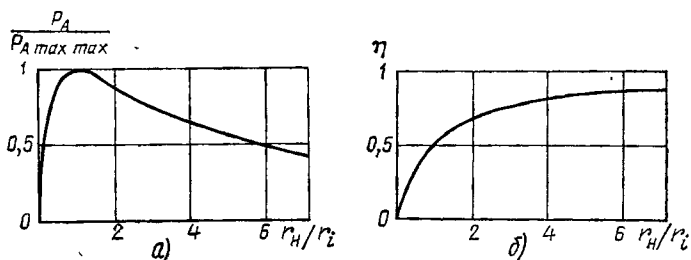


Рис. 2.28. Зависимость активной мощности нагрузки (а) и к. п. д. (б) от вещественной составляющей сопротивления нагрузки  $r_H$  при  $x_H = -x_i$

внутреннее сопротивление источника имеет чисто резистивный характер ( $Z_i = r_i$ ), то сопротивление нагрузки должно выбираться равным внутреннему сопротивлению источника  $Z_H = \underline{Z}_i = r_i$ .

Коэффициент полезного действия цепи (см. рис. 2.27) равен отношению активной мощности, потребляемой нагрузкой  $P_A$ , к суммарной активной мощности, потребляемой в цепи:  $\eta = \frac{r_H I^2}{(r_H I^2 + r_i I^2)} = \frac{r_H}{r_H + r_i}$ .

Зависимость к. п. д. от резистивной составляющей сопротивления нагрузки показана на рис. 2.28, б. Из рисунка видно, что к. п. д. цепи монотонно возрастает с ростом  $r_H / r_i$ , приближаясь к  $\eta = 1$  при  $r_H / r_i \rightarrow \infty$ .

Таким образом, для согласования источника с нагрузкой по критерию максимума к. п. д. необходимо, чтобы резистивная составляющая сопротивления нагрузки была намного больше резистивной составляющей внутреннего сопротивления источника ( $r_H \gg r_i$ ).

Рассмотренные критерии согласования источника энергии с нагрузкой являются несовместимыми, т. е. не могут выполняться одновременно. В частности, при согласовании источника с нагрузкой по критерию максимальной активной мощности, передаваемой в нагрузку, к. п. д. цепи будет равен 0,5. Очевидно, что мощные электроэнергетические системы не могут работать с к. п. д., при котором половина выработанной энергии теряется на внутреннем сопротивлении источника, поэтому обычно стремятся к достижению максимально возможного значения к. п. д., выбирая  $r_H \gg r_i$ . Согласование по критерию максимальной активной мощности, передаваемой в нагрузку, широко используется в маломощных радиоэлектронных устройствах,

когда независимо от потерь необходимо добиться выделения максимальной мощности сигнала в нагрузке.

Следует отметить, что приведенные рассуждения справедливы только для источников с конечным внутренним сопротивлением. Для источников с  $R_i = 0$  или  $G_i = 0$   $\eta = 1$  при любом конечном значении резистивной составляющей сопротивления нагрузки, а выделяемая в нагрузку мощность неограниченно возрастает с уменьшением [при питании от источника напряжения (1.26)] или с увеличением [при питании от источника тока (1.27)]  $r_n$ .

## § 2.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### Понятие об эквивалентных преобразованиях

Анализ процессов в электрических цепях во многих случаях может быть существенно упрощен за счет использования различных преобразований, в результате которых отдельные участки идеализированных цепей заменяются участками с более простой топологией или участками, более удобными для анализа.

Два участка идеализированной электрической цепи называются эквивалентными, если при замене одного из этих участков другим токи и напряжения остальной части цепи не изменяются. Преобразования электрических цепей, в результате которых некоторые участки электрической цепи заменяются эквивалентными им участками, называются эквивалентными. Из определения эквивалентных участков следует, что они должны иметь одинаковое количество внешних выводов, причем в процессе эквивалентных преобразований токи этих выводов и напряжения между ними должны оставаться неизменными.

Эквивалентные участки электрических цепей обладают свойствами симметричности (если цепь А эквивалентна цепи Б, то цепь Б эквивалентна цепи А), рефлексивности (цепь А является эквивалентной самой себе) и транзитивности (если цепь А эквивалентна цепи Б, а цепь Б эквивалентна цепи В, то цепи А и В являются эквивалентными). Если эквивалентность двух участков электрической цепи выполняется при любых значениях внешних воздействий, то такие участки являются полностью эквивалентными. Различия между ними не могут быть установлены с помощью каких-либо измерений, проводимых на внешних выводах. Если эквивалентность двух участков выполняется только при определенном значении внешних воздействий, то такие участки являются частично эквивалентными (эквивалентными при заданных условиях). Так, два участка линейной электрической цепи, находящейся под гармоническим воздействием, могут быть либо полностью эквивалентными, либо частично при заданной частоте внешнего воздействия.

Эквивалентные преобразования электрических цепей основаны на эквивалентных (равносильных) преобразованиях соответствующих систем уравнений электрического равновесия. Каждое равносильное

преобразование системы уравнений электрического равновесия исходной цепи (приведение подобных членов, исключение неизвестных, замена переменных и т. д.) приводит к эквивалентному преобразованию моделирующей цепи. Соответственно изменяется и условное графическое изображение моделирующей цепи — схема цепи. На практике преобразования электрических цепей проводят без составления систем уравнений электрического равновесия, путем непосредственного преобразования схем по определенным правилам. Систему уравнений электрического равновесия цепи составляют для уже преобразованной цепи, схема которой имеет достаточно простой вид.

Рассмотрим правила преобразования цепей с последовательным и параллельным соединением элементов.

### Участки цепей с последовательным соединением элементов

Рассмотрим неразветвленную электрическую цепь (рис. 2.29, а), содержащую  $N$  сопротивлений,  $M$  емкостей,  $K$  индуктивностей и  $\nu$  неуправляемых источников напряжения (обобщенная одноконтурная цепь). Так как через все элементы цепи протекает один и тот же ток  $i$ , то уравнение электрического равновесия, составленное на основе второго закона Кирхгофа и компонентных уравнений, может быть записано в следующей форме:

$$R_1 i + \dots + R_N i + \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i dt + \dots + \frac{1}{C_M} \int_{-\infty}^t i dt + L_1 \frac{di}{dt} + \dots + L_K \frac{di}{dt} = u - [e_1 + \dots + e_\nu]. \quad (2.124)$$

После приведения подобных членов (2.124) принимает вид

$$R_{\text{эк}} i + \frac{1}{C_{\text{эк}}} \int_{-\infty}^t i dt + L_{\text{эк}} \frac{di}{dt} = u - e_{\text{эк}}, \quad (2.125)$$

где  $R_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^N R_i$ ;  $\frac{1}{C_{\text{эк}}} = \sum_{i=1}^M \frac{1}{C_i}$ ;  $L_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^K L_i$ ;  $e_{\text{эк}} = \sum_{i=1}^{\nu} e_i$ .

Уравнению (2.125) соответствует преобразованная цепь, схема которой изображена на рис. 2.29, б. Таким образом, ток и напряжение на зажимах обобщенной одноконтурной цепи не изменятся, если каждую из групп последовательно включенных однотипных элементов заменить одним эквивалентным элементом, параметр которого  $R_{\text{эк}}$ ,  $C_{\text{эк}}$ ,  $L_{\text{эк}}$  и  $e_{\text{эк}}$  рассчитывается в соответствии с (2.125).

Из выражения (2.125) следует, что при последовательном включении сопротивлений, индуктивностей и источников напряжения параметры эквивалентного элемента  $R_{\text{эк}}$ ,  $L_{\text{эк}}$  и  $e_{\text{эк}}$  равны сумме параметров последовательно включенных элементов соответствующего типа. При этом суммирование э. д. с. источников напряжения производится ал-



гебраически, с учетом их знаков, которые определяются тем, совпадает или не совпадает направление э. д. с. с направлением обхода контура. Очевидно, что  $R_{\text{ЭК}}$  и  $L_{\text{ЭК}}$  будут превышать сопротивление и индуктивность любого из последовательно включенных элементов. При последовательном соединении  $N$  одинаковых сопротивлений  $R$  или индуктивностей  $L$  параметр эквивалентного элемента  $R_{\text{ЭК}}$  или  $L_{\text{ЭК}}$  будет в  $N$  раз больше, чем параметр каждого из последовательно включенных элементов.

При последовательном включении емкостей значение величины, обратной  $C_{\text{ЭК}}$ , определяется как сумма обратных значений всех последовательно включенных емкостей, причем эквивалентная емкость  $C_{\text{ЭК}}$

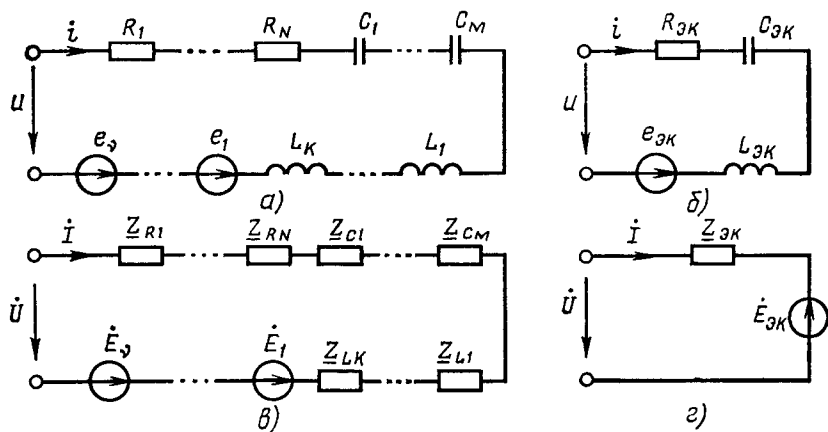


Рис 2.29. Преобразование участка цепи с последовательным соединением элементов

меньше, чем любая из последовательно включенных емкостей. При последовательном включении  $N$  одинаковых емкостей эквивалентная емкость  $C_{\text{ЭК}}$  в  $N$  раз меньше каждой из последовательно включенных емкостей.

Если обобщенная одноконтурная цепь находится под гармоническим воздействием, то от эквивалентной схемы для мгновенных значений (рис. 2.29, а) удобнее перейти к эквивалентной схеме для комплексных действующих значений (рис. 2.29, в). Уравнение электрического равновесия такой цепи, составленное на основании закона Ома и второго закона Кирхгофа в комплексной форме, имеет следующий вид:

$$\underline{Z}_{R1} \dot{I} + \dots + \underline{Z}_{RN} \dot{I} + \underline{Z}_{C1} \dot{I} + \dots + \underline{Z}_{CM} \dot{I} + \underline{Z}_{L1} \dot{I} + \dots + \underline{Z}_{LK} \dot{I} = \dot{U} - [\dot{E}_1 + \dots + \dot{E}_v].$$

После преобразований получаем

$$\underline{Z}_{\text{ЭК}} \dot{I} = \dot{U} - \dot{E}_{\text{ЭК}}, \quad (2.126)$$

где  $\underline{Z}_{\text{ЭК}} = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_{Ri} + \sum_{i=1}^M \underline{Z}_{Ci} + \sum_{i=1}^K \underline{Z}_{Li}$ ;  $\dot{E}_{\text{ЭК}} = \sum_{i=1}^v \dot{E}_i$ .

Комплексная схема замещения цепи, соответствующая уравнению (2.126), приведена на рис. 2.29, *г*.

Таким образом, любой участок электрической цепи, представляющий собой последовательное соединение произвольного количества идеализированных неуправляемых источников напряжения и идеализированных пассивных двухполюсников, при гармоническом воздействии может быть заменен ветвью, содержащей один источник напряжения, э.д.с. которого равна алгебраической сумме э.д.с. всех последовательно включенных источников, и один пассивный двухполюсник, комплексное сопротивление которого равно сумме комплексных сопротивлений всех последовательно включенных пассивных двухполюсников.

### Участки цепей с параллельным соединением элементов

Пусть электрическая цепь (рис. 2.30, *а*) состоит из параллельно соединенных  $N$  сопротивлений,  $M$  емкостей,  $K$  индуктивностей и  $\nu$  неуправляемых источников тока (о б о б щ е н н а я д в у х у з л о в а я ц е п ь). Все элементы цепи находятся под одним и тем же напряжением  $u$ , поэтому уравнение электрического равновесия, составленное на основании первого закона Кирхгофа, может быть записано в форме

$$i = \frac{1}{R_1} u + \dots + \frac{1}{R_N} u + C_1 \frac{du}{dt} + \dots + C_M \frac{du}{dt} + \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t u dt + \dots + \frac{1}{L_K} \int_{-\infty}^t u dt - [j_1 + \dots + j_\nu]. \quad (2.127)$$

После приведения подобных членов получаем

$$i = \frac{1}{R_{\text{вк}}} u + C_{\text{вк}} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L_{\text{вк}}} \int_{-\infty}^t u dt - j_{\text{вк}}, \quad (2.128)$$

где  $\frac{1}{R_{\text{вк}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$ ;  $C_{\text{вк}} = \sum_{i=1}^M C_i$ ;  $\frac{1}{L_{\text{вк}}} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{L_i}$ ;  $j_{\text{вк}} = \sum_{i=1}^{\nu} j_i$ .

Уравнению (2.128) соответствует преобразованная цепь, схема которой приведена на рис. 2.30, *б*. Видно, что ток и напряжение на зажимах обобщенной двухузловой цепи не изменятся, если каждую из групп параллельно включенных однотипных элементов заменить одним эквивалентным элементом, параметры которого  $R_{\text{вк}}$ ,  $C_{\text{вк}}$ ,  $L_{\text{вк}}$  и  $j_{\text{вк}}$  рассчитываются в соответствии с (2.128).

Из выражения (2.128) следует, что при параллельном включении емкостей и источников тока параметры эквивалентного элемента  $C_{\text{вк}}$ ,  $j_{\text{вк}}$  равны сумме параметров параллельно включенных элементов соответствующего типа. При этом суммирование токов источников тока производится алгебраически с учетом их знаков, определяемых ориентацией источников относительно узла, для которого составляется уравнение (2.127). Очевидно, что  $C_{\text{вк}}$  превышает по значению любую из параллельно включенных емкостей  $C_1, \dots, C_M$ . При параллельном соединении  $N$  одинаковых емкостей  $C_{\text{вк}} = NC$ .

При параллельном включении сопротивлений или индуктивностей значения величин, обратных  $R_{\text{ЭК}}$  и  $L_{\text{ЭК}}$ , будут определяться как сумма обратных значений этих сопротивлений или индуктивностей. Значения  $R_{\text{ЭК}}$  и  $L_{\text{ЭК}}$  будут меньше, чем сопротивление или индуктивность любого из параллельно включенных элементов соответствующего типа. При параллельном включении одинаковых сопротивлений  $R$  или индуктивностей  $L$ ,  $R_{\text{ЭК}} = R/N$ , а  $L_{\text{ЭК}} = L/N$ .

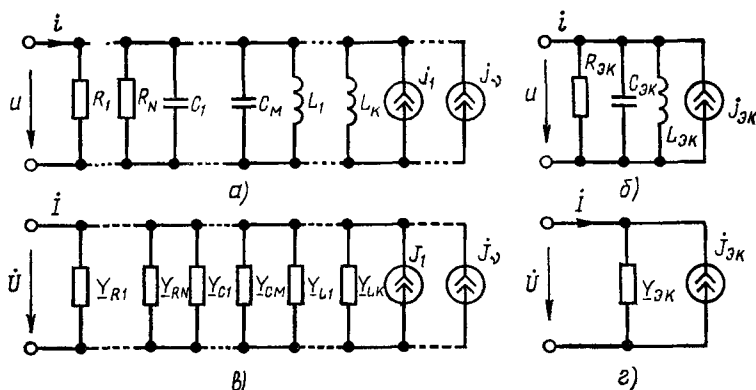


Рис. 2.30. Преобразование участка цепи с параллельным соединением элементов

Для рассмотрения параметров обобщенной двухузловой цепи при гармоническом воздействии воспользуемся комплексной схемой замещения этой цепи (рис. 2.30, б). Уравнение электрического равновесия цепи в комплексной форме может быть записано следующим образом:

$$I = \underline{Y}_{R1} \dot{U} + \dots + \underline{Y}_{RN} \dot{U} + \underline{Y}_{C1} \dot{U} + \dots + \underline{Y}_{CM} \dot{U} + \underline{Y}_{L1} \dot{U} + \dots + \underline{Y}_{LK} \dot{U} - [\dot{J}_1 + \dots + \dot{J}_v] \quad \text{или} \quad I = \underline{Y}_{\text{ЭК}} \dot{U} - \dot{J}_{\text{ЭК}}, \quad (2.129)$$

$$\text{где } \underline{Y}_{\text{ЭК}} = \sum_{i=1}^N \underline{Y}_{Ri} + \sum_{i=1}^M \underline{Y}_{Ci} + \sum_{i=1}^K \underline{Y}_{Li}; \quad \dot{J}_{\text{ЭК}} = \sum_{i=1}^v \dot{J}_i.$$

Комплексная схема замещения цепи, соответствующая уравнению (2.129), изображена на рис. 2.30, г.

Таким образом, любой участок электрической цепи, представляющей собой параллельное соединение произвольного количества идеализированных пассивных двухполюсников, может быть заменен одним пассивным двухполюсником, комплексная проводимость которого  $\underline{Y}_{\text{ЭК}}$  равна сумме комплексных проводимостей всех параллельно включенных двухполюсников. Произвольное количество параллельно включенных идеализированных источников тока может быть заменено одним источником, комплексное действующее значение тока которого  $\dot{J}_{\text{ЭК}}$  равно сумме комплексных действующих значений токов всех параллельно включенных источников.

Переходя в (2.129) от комплексных проводимостей к комплексным сопротивлениям, найдем эквивалентное комплексное входное сопро-

тивление  $\underline{Z}_{\text{ЭК}}$  группы параллельно включенных идеализированных пассивных двухполюсников:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{ЭК}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_{Ri}} + \sum_{i=1}^M \frac{1}{\underline{Z}_{Ci}} + \sum_{i=1}^K \frac{1}{\underline{Z}_{Li}}. \quad (2.130)$$

Выражения, подобные (2.129) и (2.130), можно получить для комплексной проводимости и комплексного сопротивления любого участка цепи, являющегося параллельным соединением произвольного количества идеализированных пассивных двухполюсников с заданным комплексным входным сопротивлением  $\underline{Z}_i$  или комплексной входной проводимостью  $\underline{Y}_i$ :

$$\underline{Y}_{\text{ЭК}} = \sum_{i=1}^N \underline{Y}_i; \quad \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ЭК}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_i}, \quad (2.131)$$

где  $N$  — число параллельно включенных двухполюсников.

Используя (2.131), найдем выражение для комплексного входного сопротивления участка цепи, представляющего собой параллельное соединение двух элементов с комплексными сопротивлениями  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ :

$$\underline{Z}_{\text{ЭК}} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2). \quad (2.132)$$

### Участки цепей со смешанным соединением элементов

Правила преобразования участков цепей с параллельным или последовательным соединением элементов могут быть применены и для преобразования пассивных участков цепей со смешанным соединением элементов. Преобразование таких участков, представляющих собой сочетание групп параллельно или последовательно включенных элементов, обычно производят в несколько этапов, на каждом из которых группу параллельно включенных элементов заменяют одним двухполюсником, комплексная проводимость которого равна сумме комплексных проводимостей параллельно включенных элементов, а группу последовательно включенных элементов — одним двухполюсником, комплексное сопротивление которого равно сумме комплексных сопротивлений всех последовательно включенных элементов.



**Пример 2.8.** Рассмотрим преобразование участка идеализированной цепи со смешанным соединением элементов (рис. 2.31, а), содержащего группу параллельно включенных элементов ( $\underline{Z}_3$ ,  $\underline{Z}_4$ ) и группу последовательно включенных элементов ( $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ). Заменяя параллельно включенные элементы  $\underline{Z}_3$  и  $\underline{Z}_4$  одним элементом с комплексным сопротивлением

$$\underline{Z}_{\text{ЭК1}} = \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 / (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4),$$

получим преобразованную схему цепи (рис. 2.31, б) с тремя последовательно включенными элементами:  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  и  $\underline{Z}_{\text{ЭК1}}$ . Заменяя эти элементы одним с комплексным сопротивлением

$$\underline{Z}_{\text{ЭК2}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{\text{ЭК1}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 / (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4),$$

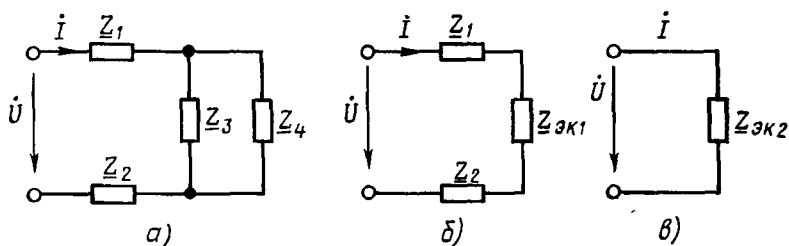


Рис. 2.31. К примеру 2.8

приходим к простейшей преобразованной схеме рассматриваемого участка цепи с одним элементом  $Z_{эк2}$  (рис. 2.31, в).



**Пример 2.9.** Определим эквивалентную индуктивность цепи с параметрами элементов  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 300$  мкГн, схема которой приведена на рис. 2.32.

Участок цепи с тремя параллельно включенными одинаковыми индуктивностями  $L_2 = L_3 = L_4$  обладает эквивалентной индуктивностью, в три раза меньшей, чем каждая из параллельно включенных индуктивностей,  $L_{эк1} = 100$  мкГн. Этот участок включен последовательно с индуктивностью  $L_1$ , поэтому искомая эквивалентная индуктивность

$$L_{эк2} = L_1 + L_{эк1} = 400 \text{ мкГн.}$$



**Пример 2.10.** Определим комплексное входное сопротивление участка цепи с параметрами элементов  $R = 1,5$  кОм,  $C_1 = 40$  пФ,  $C_2 = 10$  пФ,  $C_3 = 50$  пФ частотой внешнего воздействия  $f = 1,2$  МГц (рис. 2.33).

Параллельно включенные емкости  $C_2$  и  $C_3$  могут быть заменены одной эквивалентной емкостью

$$C_{эк1} = C_2 + C_3 = 60 \text{ пФ.}$$

Емкости  $C_1$  и  $C_{эк1}$ , включенные последовательно, заменим одной емкостью

$$C_{эк2} = C_1 C_{эк1} / (C_1 + C_{эк1}) = 24 \text{ пФ.}$$

Получаем преобразованную цепь (рис. 2.33, б). В результате комплексное входное сопротивление цепи на частоте  $f = 1,2$  МГц

$$\underline{Z} = R - j / (2\pi f C_{эк2}) = 1,5 - j5,53, \text{ кОм.}$$

Из рассмотренных примеров следует, что в результате объединения групп последовательно и параллельно включенных элементов происходит постепенное «сворачивание» цепи, причем участок со смешан-

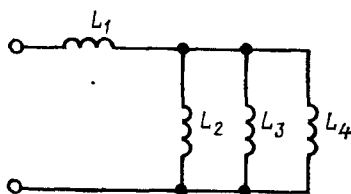


Рис. 2.32. К примеру 2.9

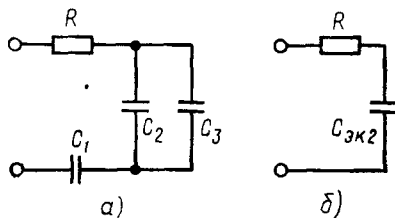


Рис. 2.33. К примеру 2.10

ным соединением пассивных элементов, имеющий два внешних вывода (пассивный двухполюсник), в конечном счете, может быть заменен одним элементом, комплексное сопротивление которого равно входному сопротивлению исходного участка цепи.

К цепям со смешанным соединением элементов относятся цепи или лестничные цепи, входное сопротивление или входная проводимость которых могут быть представлены в виде цепной (непрерывной) дроби, т. е. с помощью выражения типа

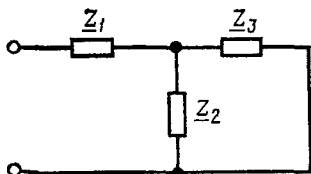


Рис. 2.34. Схема простейшей лестничной цепи

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + 1 \left/ \left( a_3 + \dots + \frac{1}{a_N} \right) \right.}$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_N$  называются элементами цепной дроби. Число элементов дроби  $N$  может быть конечным (конечная цепная дробь) или бесконечным (бесконечная цепная дробь).

Рассмотрим простейшую лестничную цепь (рис. 2.34). Нетрудно установить, что входное сопротивление этой цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3}$$

Заменяя в этом выражении сопротивление элемента  $\underline{Z}_2$  его проводимостью  $\underline{Y}_2 = 1/\underline{Z}_2$ , получаем окончательно

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_2 + 1/\underline{Z}_3}$$

Таким образом, входное сопротивление рассматриваемой цепи может быть представлено в виде конечной цепной дроби, элементы которой  $a_1, a_2, a_3$  равны соответственно  $\underline{Z}_1, \underline{Y}_2, \underline{Z}_3$ . Используя аналогичные преобразования, можно представить в виде цепной дроби и входное сопротивление лестничной цепи более общего вида (рис. 2.35, а):

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \dots + \frac{1}{\underline{Y}_{N-1} + 1/\underline{Z}_N}}} \quad (2.133)$$

Таким образом, число элементов цепной дроби равно числу идеализированных двухполюсных элементов, образующих лестничную цепь, причем элементами цепной дроби являются комплексные сопротивления двухполюсников, образующих продольные ветви лестничной цепи ( $\underline{Z}_1, \underline{Z}_3, \dots, \underline{Z}_N$ ), и комплексные проводимости двухполюсников, входящих в поперечные ветви ( $\underline{Y}_2, \underline{Y}_4, \dots, \underline{Y}_{N-1}$ ).

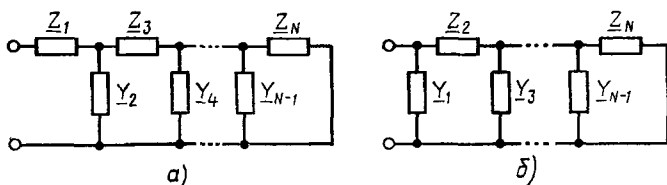


Рис. 2.35. Схемы лестничных цепей общего вида

Если лестничная цепь содержит поперечную ветвь, подключенную непосредственно к внешним зажимам цепи (рис. 2.35, б), то в виде цепной дроби может быть представлена входная проводимость

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \frac{1}{\underline{Z}_2 + \frac{1}{\underline{Y}_3 + \dots + \frac{1}{\underline{Y}_{N-1} + 1/\underline{Z}_N}}}. \quad (2.134)$$

Таким образом, для того чтобы выражения для входных сопротивлений или входных проводимостей лестничных цепей могли быть записаны в виде цепных дробей типа (2.133), (2.134), необходимо элементы, образующие продольные ветви, представить их комплексными сопротивлениями, а элементы, входящие в поперечные ветви, — их комплексными проводимостями.

### Эквивалентное преобразование треугольника сопротивлений в звезду и обратное преобразование

Найдем условия эквивалентности двух участков электрической цепи (рис. 2.36, а, б), которые представляют собой соединение пассивных идеализированных двухполюсников треугольником и звездой. По определению, эти участки цепи эквивалентны, если при замене одного участка другим токи выводов  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$  и напряжения между выводами  $\dot{U}_{12}, \dot{U}_{23}, \dot{U}_{31}$  останутся неизменными. Учитывая, что из трех напряжений между выводами только два являются независимыми (третье может быть найдено из уравнения баланса напряжений), для экви-

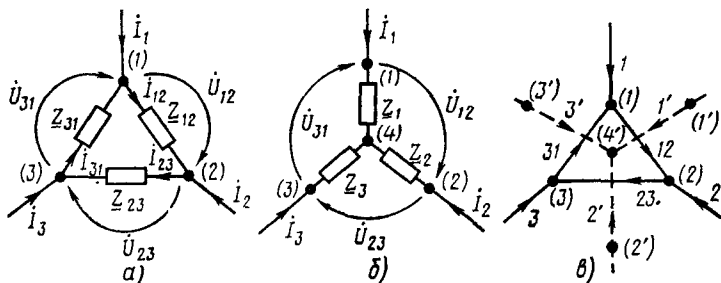


Рис. 2.36. Эквивалентные преобразования треугольник—звезда и звезда—треугольник

валентности треугольника сопротивлений звезде достаточно потребовать, чтобы любая пара из трех напряжений между выводами одной цепи была равна соответствующей паре напряжений другой цепи (при одинаковых значениях токов внешних выводов).

Выразим токи сопротивлений  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ ,  $\underline{Z}_{31}$ , образующих стороны треугольника сопротивлений, через токи внешних выводов  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$ . Составляя на основании законов Кирхгофа систему уравнений электрического равновесия этого участка цепи

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 + \underline{I}_{31} - \underline{I}_{12} &= 0; \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0; \\ \underline{I}_2 + \underline{I}_{12} - \underline{I}_{23} &= 0; \quad \underline{Z}_{12} \underline{I}_{12} + \underline{Z}_{23} \underline{I}_{23} + \underline{Z}_{31} \underline{I}_{31} = 0 \end{aligned}$$

и решая ее относительно токов  $\underline{I}_{12}$ ,  $\underline{I}_{23}$ ,  $\underline{I}_{31}$ , находим

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= (\underline{Z}_{31} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{23} \underline{I}_2) / (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}); \\ \underline{I}_{23} &= (\underline{Z}_{12} \underline{I}_2 - \underline{Z}_{31} \underline{I}_3) / (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}); \\ \underline{I}_{31} &= (\underline{Z}_{23} \underline{I}_3 - \underline{Z}_{12} \underline{I}_1) / (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Используя выражения (2.135), определим напряжения между внешними выводами треугольника сопротивлений

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{Z}_{12} \underline{I}_{12} = \underline{Z}_{12} (\underline{Z}_{31} \underline{I}_1 - \underline{Z}_{23} \underline{I}_2) / (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}); \\ \underline{U}_{23} &= \underline{Z}_{23} \underline{I}_{23} = \underline{Z}_{23} (\underline{Z}_{12} \underline{I}_2 - \underline{Z}_{31} \underline{I}_3) / (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}). \end{aligned}$$

Соответствующие напряжения между внешними выводами звезды (рис. 2.36, б)  $\underline{U}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2$ ;  $\underline{U}_{23} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3$ .

Приравнявая напряжения  $\underline{U}_{12}$  и  $\underline{U}_{23}$  между внешними выводами рассматриваемых участков цепи, находим

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \underline{I}_1 - \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \underline{I}_2 &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_2 \underline{I}_2; \\ \frac{\underline{Z}_{23} \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \underline{I}_2 - \frac{\underline{Z}_{23} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \underline{I}_3 &= \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3. \end{aligned} \quad (2.136)$$

В соответствии со сказанным равенства (2.136) должны выполняться при любых значениях токов внешних выводов. Полагая в (2.136) сначала  $\underline{I}_2 = 0$ , а затем  $\underline{I}_3 = 0$ , определяем соотношения между сопротивлениями, при которых рассматриваемые участки цепей (рис. 2.36, а, б) будут эквивалентными:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{31} / (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}); \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{23} / (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}); \\ \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_{23} \underline{Z}_{31} / (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Рассчитав сопротивления  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$  по заданным  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ ,  $\underline{Z}_{31}$ , можно осуществить эквивалентную замену треугольника сопротивлений звездой (преобразование треугольник — звезда). Из рис. 2.36 видно, что



при этом преобразовании из цепи устраняется контур, образуемый сопротивлениями  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ ,  $\underline{Z}_{31}$ , и появляется новый узел — место соединения сопротивлений  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$ .

Решая систему уравнений (2.137) относительно  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ ,  $\underline{Z}_{31}$ , получим соотношения, позволяющие производить эквивалентную замену звезды сопротивлений треугольником (преобразование звезда—треугольник):

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / \underline{Z}_3; \\ \underline{Z}_{23} &= \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / \underline{Z}_1; \\ \underline{Z}_{31} &= \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \underline{Z}_1 / \underline{Z}_2.\end{aligned}\tag{2.138}$$

Преобразование звезда-треугольник приводит к уменьшению числа узлов преобразуемой цепи (за счет устранения узла, являющегося местом соединения сопротивлений  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Z}_3$ ), однако при этом появляется новый контур, образуемый сопротивлениями  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{23}$ ,  $\underline{Z}_{31}$ .

Заменяем в выражениях (2.138) комплексные сопротивления элементов их проводимостями. Проведя преобразования, установим, что выражения для комплексных проводимостей элементов, образующих стороны треугольника

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 / (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3); \\ \underline{Y}_{23} &= \underline{Y}_2 \underline{Y}_3 / (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3); \\ \underline{Y}_{31} &= \underline{Y}_3 \underline{Y}_1 / (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3),\end{aligned}\tag{2.139}$$

имеют такую же структуру, как и выражения для комплексных сопротивлений, входящих в лучи звезды (2.137). Подобным образом можно получить выражения для комплексных проводимостей лучей звезды  $\underline{Y}_1$ ,  $\underline{Y}_2$ ,  $\underline{Y}_3$ , которые оказываются аналогичными выражениям для комплексных сопротивлений сторон треугольника (2.138). Учитывая, что рассматриваемые участки обладают дуальными графами (рис. 2.36, в), приходим к заключению, что эти участки цепей являются дуальными.

Выражения (2.139) могут быть обобщены и для преобразования  $N$ -лучевой звезды (см. рис. 1.23, б) в  $N$ -угольник (см. рис. 1.23, а):

$$\underline{Y}_{kl} = \underline{Y}_k \underline{Y}_l / (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_N).$$

Здесь  $\underline{Y}_{kl}$  — проводимость стороны  $N$ -угольника, соединяющей узлы  $k$  и  $l$ ;  $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \dots, \underline{Y}_N$  — проводимость элементов, образующих лучи звезды.

Обратное преобразование полного  $N$ -угольника в  $N$ -лучевую звезду в общем случае невозможно.

Применение преобразований треугольник—звезда и звезда—треугольник в ряде случаев позволяет существенно упростить анализ цепей, в частности иногда с помощью этих преобразований удается приводить сложные участки цепей к более простым (параллельное, последовательное или смешанное соединение элементов).



**Пример 2.11.** Для цепи с параметрами элементов  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 30 \text{ Ом}$ ;  $\dot{E} = 1,3 \text{ В}$  (рис. 2.37, а) определим ток ветви, содержащей источник напряжения  $\dot{E}$ .

Ток  $\dot{I}$  можно найти, решая основную систему уравнений электрического равновесия цепи, однако этот путь весьма трудоемок. Учитывая, что по условию задачи требуется определить только ток независимого источника  $\dot{E}$ , целесообразно остальную часть цепи, к которой подключен этот источник, заменить комплексным входным сопротивлением. Непосредственное нахождение входного сопротивления пассивного двухполюсника, к которому подключен идеальный источник напряжения, постепенным «сворачиванием» по правилам преобразования участков

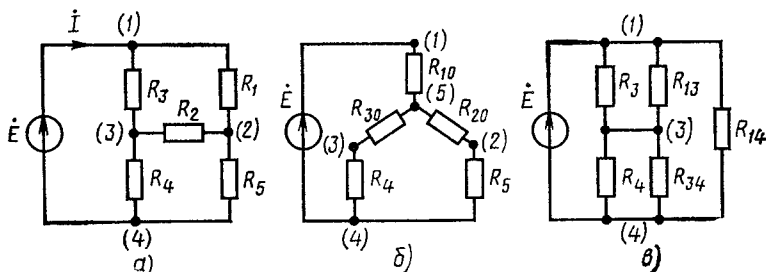


Рис. 2.37. К примеру 2.11

цепей с параллельным и последовательным соединением элементов невозможно, так как в данном двухполюснике отсутствуют последовательно или параллельно включенные элементы.

Заменяем треугольник сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$  звездой сопротивлений  $R_{10}, R_{20}, R_{30}$  (рис. 2.37, б). Используя формулы (2.137), находим:

$$\begin{aligned} R_{10} &= R_1 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) = 6 \text{ Ом}; \\ R_{20} &= R_1 R_2 / (R_1 + R_2 + R_3) = 10 \text{ Ом}; \\ R_{30} &= R_2 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) = 15 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Преобразуя полученную цепь с помощью правил преобразования участков цепей со смешанным соединением элементов, определяем входное сопротивление пассивного двухполюсника  $R = 26 \text{ Ом}$  и искомый ток  $\dot{I} = 50 \text{ мА}$ .

Тот же результат может быть получен, если использовать преобразование звезда—треугольник. В частности, заменяя сопротивления  $R_1, R_2, R_5$  (рис. 2.37, а) сопротивлениями

$$\begin{aligned} R_{13} &= R_1 + R_2 + R_1 R_2 / R_5 = 103,3 \text{ Ом}; \\ R_{14} &= R_1 + R_5 + R_1 R_5 / R_2 = 62 \text{ Ом}, \\ R_{34} &= R_2 + R_5 + R_2 R_5 / R_1 = 155 \text{ Ом}, \end{aligned}$$

получаем цепь (рис. 2.37, в), которая легко поддается дальнейшим преобразованиями.

### Последовательная и параллельная схемы замещения пассивного двухполюсника

Два различных линейных пассивных двухполюсника с одинаковыми комплексными сопротивлениями (комплексными проводимостями) эквивалентны, так как при замене одного из них другим токи и напряжения внешних выводов, соединяющих двухполюсники с остальной ча-

стью цепи, не изменяются. Следовательно, условием эквивалентности линейных пассивных двухполюсников является равенство их комплексных сопротивлений (проводимостей).

Комплексное сопротивление любого пассивного двухполюсника  $\underline{Z} = r + jx$  можно представить как сумму комплексных сопротивлений двух последовательно включенных двухполюсников, одно из которых имеет чисто резистивный  $\underline{Z}_a = r$ , а другое  $\underline{Z}_p = jx$  — чисто реактивный характер.

Комплексную проводимость этого двухполюсника  $\underline{Y} = 1/\underline{Z} = g + jb$  можно рассматривать как комплексную проводимость цепи из двух параллельно соединенных элементов с проводимостями  $\underline{Y}_a = g$  и  $\underline{Y}_p = jb$ . Поэтому, произвольному линейному пассивному двухполюснику, находящемуся под гармоническим воздействием, можно поставить в соответствие две схемы замещения — последовательную (рис. 2.38, а) и параллельную (рис. 2.39, а), причем каждая из них содержит один реактивный элемент и один элемент, входное сопротивление которого имеет чисто резистивный характер.

В общем случае вещественные  $r$ ,  $g$  и мнимые  $x$ ,  $b$  составляющие комплексного входного сопротивления и комплексной входной проводимости двухполюсника являются сложными функциями частоты:  $r = r(\omega)$ ,  $x = x(\omega)$ ,  $g = g(\omega)$ ,  $b = b(\omega)$ . При изменении частоты  $r$  и  $g$  могут изменяться только по значению, а  $x$  и  $b$  — как по значению, так и по знаку.

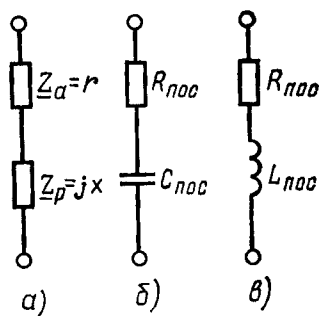


Рис. 2.38. Последовательные схемы замещения пассивного двухполюсника

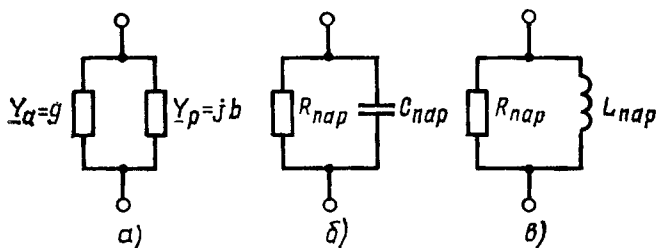


Рис. 2.39. Параллельные схемы замещения пассивного двухполюсника

При фиксированном значении угловой частоты  $\omega = \omega_1$ , вещественные и мнимые составляющие входных сопротивлений и проводимостей двухполюсника, а следовательно,  $\underline{Z}_a$ ,  $\underline{Z}_p$ , а также  $\underline{Y}_a$ ,  $\underline{Y}_p$  элементов последовательной и параллельной схем замещения принимают определенные значения  $\underline{Z}_a = r(\omega_1)$ ,  $\underline{Z}_p = jx(\omega_1)$ ,  $\underline{Y}_a = g(\omega_1)$ ,  $\underline{Y}_p = jb(\omega_1)$ .

Постоянное вещественное число  $Z_a = r(\omega_1)$  можно рассматривать как комплексное сопротивление идеализированного пассивного элемента — сопротивления, входящего в последовательную схему замещения двухполюсника (см. рис. 2.38, б, в):

$$R_{\text{пос}} = r(\omega_1). \quad (2.140)$$

Мнимое число  $Z_p = jx(\omega_1)$  в зависимости от знака  $x(\omega_1)$  можно рассматривать либо как комплексное сопротивление емкости ( $x(\omega_1) < 0$ )

$$C_{\text{пос}} = -1/[\omega_1 x(\omega_1)], \quad (2.141)$$

либо как комплексное сопротивление индуктивности ( $x(\omega_1) > 0$ )

$$L_{\text{пос}} = x(\omega_1)/\omega_1, \quad (2.142)$$

входящих в эту же схему замещения.

Параллельная схема замещения двухполюсника (рис. 2.39, б, в) содержит сопротивление

$$R_{\text{пар}} = 1/g(\omega_1) \quad (2.143)$$

и либо емкость ( $b(\omega_1) > 0$ )

$$C_{\text{пар}} = b(\omega_1)/\omega_1, \quad (2.144)$$

либо индуктивность ( $b(\omega_1) < 0$ )

$$L_{\text{пар}} = -1/[\omega_1 b(\omega_1)]. \quad (2.145)$$

В частном случае, когда входное сопротивление двухполюсника имеет чисто резистивный или чисто реактивный характер, обе схемы замещения вырождаются в одну схему, содержащую единственный идеализированный пассивный элемент (сопротивление, емкость или индуктивность).

Таким образом, при фиксированном значении частоты внешнего воздействия каждому линейному пассивному двухполюснику независимо от числа входящих в него элементов и способа их соединения можно поставить в соответствие эквивалентную схему, содержащую не более двух идеализированных пассивных элементов. Разумеется, такое преобразование будет эквивалентным только при  $\omega = \omega_1$ . Изменение частоты внешнего воздействия может вызывать изменение не только значений параметров элементов последовательной и параллельной схем замещения двухполюсника, но и характера соответствующих реактивных элементов.

Последовательная и параллельная цепи, схемы которых приведены на рис. 2.38, а и 2.39, а, обладают одинаковыми комплексными сопротивлениями (проводимостями) и поэтому являются эквивалентными. Выбор той или иной цепи и соответственно той или иной схемы замещения двухполюсника при заданной частоте внешнего воздействия производится только исходя из удобства последующего анализа.

При необходимости последовательная и параллельная схемы замещения двухполюсника могут быть преобразованы одна в другую. Соотношения между параметрами их элементов однозначно устанавливаются с помощью выражений (2.52) — (2.55) и (2.140) — (2.145). Ана-

Таблица 2.1. Формулы для взаимного преобразования параллельной и последовательной схем замещения пассивного двухполюсника

Параметры исходной цепи	Параметры преобразованной цепи
$R_{\text{пос}}$ $C_{\text{пос}}$	$R_{\text{пар}} = R_{\text{пос}} [1 + 1/(\omega_1 R_{\text{пос}} C_{\text{пос}})^2]$ $C_{\text{пар}} = C_{\text{пос}} / [1 + (\omega_1 C_{\text{пос}} R_{\text{пос}})^2]$
$R_{\text{пос}}$ $L_{\text{пос}}$	$R_{\text{пар}} = R_{\text{пос}} [1 + (\omega_1 L_{\text{пос}} / R_{\text{пос}})^2]$ $L_{\text{пар}} = L_{\text{пос}} \{1 + [R_{\text{пос}} / (\omega_1 L_{\text{пос}})]^2\}$
$R_{\text{пар}}$ $C_{\text{пар}}$	$R_{\text{пос}} = R_{\text{пар}} / [1 + (\omega_1 C_{\text{пар}} R_{\text{пар}})^2]$ $C_{\text{пос}} = C_{\text{пар}} [1 + 1/(\omega_1 C_{\text{пар}} R_{\text{пар}})^2]$
$R_{\text{пар}}$ $L_{\text{пар}}$	$R_{\text{пос}} = R_{\text{пар}} / \left[ 1 + \left( \frac{R_{\text{пар}}}{\omega_1 L_{\text{пар}}} \right)^2 \right]$ $L_{\text{пос}} = L_{\text{пар}} / \left[ 1 + \left( \frac{\omega_1 L_{\text{пар}}}{R_{\text{пар}}} \right)^2 \right]$

Из этих выражений показывает, что при взаимных преобразованиях последовательной и параллельной схем характер реактивного элемента, входящего в схему замещения, не изменяется (табл. 2.1).

Выражения, приведенные в таблице, можно использовать для взаимных преобразований произвольных участков цепей с параллельным и последовательным включением элементов. Например, при заданной частоте внешнего воздействия  $\omega = \omega_1$  участок цепи, представляющий собой последовательное соединение сопротивления  $R_1$  и емкости  $C_1$ , может быть заменен эквивалентным участком цепи с параллельно включенными сопротивлением  $R_2$  и емкостью  $C_2$ . Несмотря на то что в данном случае параметры элементов исходной цепи не являются функциями частоты, параметры элементов преобразованной цепи  $R_2, C_2$  зависят от частоты внешнего воздействия. При этом изменение частоты внешнего воздействия приводит только к изменению параметров элементов преобразованной цепи; изменения характера реактивных элементов в данном случае не происходит.



**Пример 2.12.** Найдем последовательную и параллельную схемы замещения последовательной RLC-цепи (см. пример 2.4) при частоте внешнего воздействия  $\omega = \omega_1 = 2,5 \cdot 10^6$  рад/с.

Комплексное сопротивление цепи при  $\omega = \omega_1$  имеет резистивно-емкостной характер

$$\underline{Z} = r(\omega_1) + jx(\omega_1) = 100 - j600, \text{ Ом},$$

поэтому последовательная и параллельная схемы замещения цепи на данной частоте содержат сопротивление и емкость (см. рис. 2.38, б, 2.39, б). Параметры элементов последовательной схемы замещения в соответствии с выражениями (2.140), (2.141)

$$R_{\text{пос}} = r(\omega_1) = 100 \text{ Ом}; \quad C_{\text{пос}} = -1/[\omega_1 x(\omega_1)] = 666,7 \text{ пФ}.$$

Параметры элементов параллельной схемы замещения найдем, используя формулы, приведенные в табл. 2.1:

$$R_{\text{пар}} = R_{\text{пос}} [1 + 1/(\omega_1 R_{\text{пос}} C_{\text{пос}})^2] = 3,7 \text{ кОм};$$

$$C_{\text{пар}} = C_{\text{пос}} / [1 + (\omega_1 R_{\text{пос}} C_{\text{пос}})^2] = 649 \text{ пФ}.$$

### Комплексные схемы замещения источников энергии

Ранее были рассмотрены последовательная и параллельная схемы замещения линейризованных источников постоянного тока и напряжения (см. рис. 1.16, б, в) и получены соотношения для их взаимного преобразования (1.35), (1.36). Покажем, что аналогичные соотношения выполняются и для линейризованных источников гармонических токов и напряжений, т. е. для

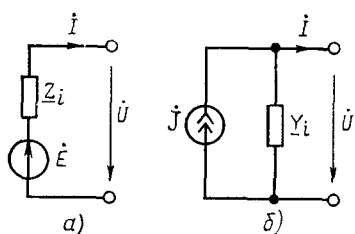


Рис. 2.40. Последовательная (а) и параллельная (б) комплексные схемы замещения источников энергии

источников, комплексные схемы замещения которых содержат идеальный источник напряжения  $\dot{E}$  и комплексное внутреннее сопротивление  $\underline{Z}_i$  (рис. 2.40, а) или идеальный источник тока  $\dot{J}$  и комплексную внутреннюю проводимость  $\underline{Y}_i$  (рис. 2.40, б).

В соответствии с последовательной схемой замещения (рис. 2.40, а) комплексное действующее значение напряжения на зажимах линейризованного источника

$$\dot{U} = \dot{E} - \underline{Z}_i \dot{I}. \quad (2.146)$$

В то же время из параллельной схемы замещения (рис. 2.40, б) получаем

$$\dot{U} = (\dot{J} - \dot{I}) / \underline{Y}_i = \dot{J} / \underline{Y}_i - \dot{I} / \underline{Y}_i. \quad (2.147)$$

Сравнивая выражения (2.146) и (2.147), находим условия эквивалентности последовательной и параллельной комплексных схем замещения линейризованного источника гармонических токов и напряжений:

$$\dot{E} = \dot{J} / \underline{Y}_i, \quad \underline{Z}_i = 1 / \underline{Y}_i. \quad (2.148)$$

Действительно, выражения (2.148) подобны (1.35), (1.36) и могут быть получены из последних путем замены вещественных внутреннего сопротивления  $R_i$  и внутренней проводимости  $G_i$  соответственно комплексным сопротивлением  $\underline{Z}_i$  и комплексной проводимостью  $\underline{Y}_i$ , а мгновенных значений тока  $j(t)$  и э.д.с.  $e(t)$  их комплексными изображениями. Как отмечалось ранее, взаимные преобразования параллельной и последовательной схем замещения возможны только для линейризованных источников с конечными внутренним сопротивлением и внутренней проводимостью ( $\underline{Z}_i \neq 0$ ,  $\underline{Y}_i \neq 0$ ).

В ряде случаев при анализе цепей возникает необходимость преобразовывать источники, т. е. заменять идеализированный источник одного типа другим. Для линеаризованных источников с конечным внутренним сопротивлением (проводимостью) эта задача решается путем преобразования последовательной схемы замещения источника в параллельную или обратно с помощью выражений (2.148). Если в эквивалентной схеме реального источника содержится только идеальный источник напряжения, однако в цепи, внешней по отношению к нему, имеется произвольный пассивный двухполюсник, включенный последовательно с источником, то его комплексное сопротивление  $\underline{Z}$  можно рассматривать как внутреннее сопротивление линеаризованного источника  $\underline{Z}_i$ , что дает возможность воспользоваться для преобразования источника выражениями (2.148). Аналогично, если параллельно идеальному источнику тока включена любая ветвь, составленная из пассивных элементов, то ее комплексную проводимость  $\underline{Y}$  можно рассматривать как внутреннюю проводимость линеаризованного источника  $\underline{Y}_i$ . Идеальные источники тока и напряжения, которые могут быть преобразованы один в другой таким образом, называются **невырожденными**.

Формулами (2.148) можно воспользоваться и для взаимного преобразования невырожденных управляемых источников тока и напряжения. Разумеется, при этом характер управляющего воздействия (ток или напряжение) не изменяется.

Если в анализируемую цепь включены идеальный источник напряжения и последовательно с ним нет элементов, сопротивление которых можно рассматривать как внутреннее сопротивление линеаризованного источника, или идеальный источник тока, параллельно которому нет ветвей, проводимость которых можно трактовать как внутреннюю проводимость соответствующего источника, то такие источники называют **вырожденными**. Вырожденные источники напряжения и тока не могут быть преобразованы один в другой непосредственно с помощью выражений (2.148), однако они могут быть устранены из рассматриваемой цепи с помощью преобразований, получивших название **переноса источников**.

### Перенос источников

Рассмотрим участок идеализированной электрической цепи, содержащий вырожденный источник напряжения (рис. 2.41, *a*). Покажем, что данный участок цепи может быть заменен одним из эквивалентных ему участков цепей, не содержащим вырожденных источников.

Идеальный источник напряжения  $\dot{E}$  из ветви, подключенной между узлами (6) и (7) (рис. 2.41, *a*), перенесем во все ветви, подключенные к узлу (6) (рис. 2.41, *б*) или во все ветви, подключенные к узлу (7) (рис. 2.41, *в*). В обоих случаях перенос источника напряжения произведен без изменения э.д.с. источника и его ориентации относительно направлений обхода контуров 1 и 4. *Ветвь, ранее содержавшая источник  $\dot{E}$ ,*

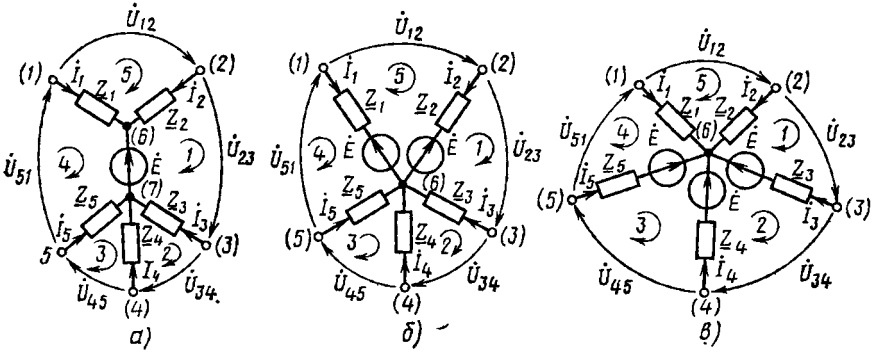


Рис. 2.41. Перенос идеализированного источника напряжения

после преобразования исчезает, причем узлы (6) и (7), к которым она была подключена, объединяются в один узел.

Процессы во всех трех идеализированных цепях описываются решениями одной и той же системы уравнений электрического равновесия, составленной на основании законов Кирхгофа:

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 &= 0; & -Z_3 I_3 + Z_4 I_4 + U_{34} &= 0; \\
 -Z_1 I_1 + Z_2 I_2 + U_{12} &= 0; & -Z_4 I_4 + Z_5 I_5 + U_{45} &= 0; \\
 -Z_2 I_2 + Z_3 I_3 + U_{23} &= E; & -Z_5 I_5 + Z_1 I_1 + U_{51} &= -E.
 \end{aligned}$$

Следовательно, при замене цепи (рис. 2.41, а) любой из цепей (рис. 2.41, б, в) токи внешних выводов и напряжения между ними не изменяются, т. е. участки этих цепей эквивалентны. В результате переноса источника вырожденный источник напряжения заменен несколькими невырожденными источниками напряжения, которые при необходимости могут быть преобразованы в источники тока с помощью рассмотренных ранее преобразований.

Вырожденный источник тока, включенный между узлами (k) и (l) произвольной электрической цепи, может быть заменен несколькими источниками тока, включенными параллельно любым ветвям электрической цепи, образующим путь между узлами (k) и (l).

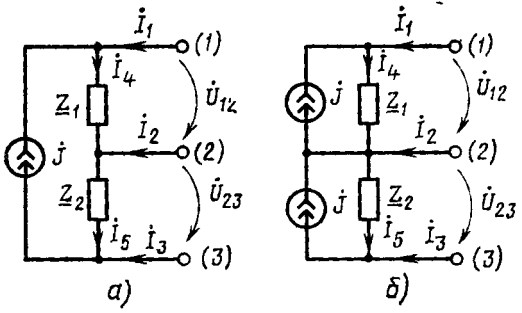


Рис. 2.42. Перенос идеализированного источника тока

Например, вырожденный источник тока  $J$ , включенный между узлами (1) и (3) электрической цепи (рис. 2.42, а), может быть заменен двумя источниками тока, подключенными параллельно ветвям с комплексными сопротивлениями  $Z_1$  и  $Z_2$ , образующим путь между этими же узлами (рис. 2.42, б). Источ-



ник тока переносится без изменения тока источника  $J$  и его ориентации относительно узлов (1) и (3). Эквивалентность цепей следует из того, что процессы в них описываются одной и той же системой уравнений электрического равновесия, составленной на основании законов Кирхгофа:

$$\begin{aligned} I_1 - I_4 + J &= 0; \quad \underline{Z}_1 I_4 - \dot{U}_{12} = 0; \\ I_2 + I_4 - I_5 - 0; \quad \underline{Z}_2 I_5 - \dot{U}_{23} &= 0. \\ I_3 + I_5 - J &= 0; \end{aligned}$$

В общем случае в результате переноса источника тока вырожденный источник заменяется несколькими невырожденными источниками, которые при необходимости могут быть преобразованы в источники напряжения с помощью выражений (2.148). Ветвь, ранее содержащая вырожденный источник тока, после переноса источника исчезает.

## § 2.7. ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

### Понятие взаимной индуктивности

Две или более индуктивных катушек называются **связанными**, если изменение тока одной из катушек вызывает появление э. д. с. в остальных. Напомним, что явление наведения э. д. с. в какой-либо индуктивной катушке при изменении тока другой катушки называется **взаимной индукцией**, а наведенная э. д. с. — **э. д. с. взаимной индукции**.

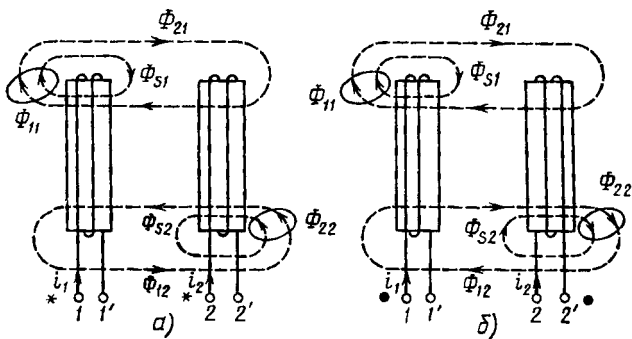


Рис. 2.43. Связанные катушки индуктивности:  
а) согласное включение; б) встречное включение

Рассмотрим две индуктивные катушки, расположенные таким образом, что магнитный поток, вызванный током одной из катушек, пронизывает витки другой катушки (рис. 2.43). Пусть  $i_1$  и  $i_2$  — токи первой и второй катушек, а  $\Phi_{11}$  и  $\Phi_{22}$  — магнитные потоки с а м о и н д у к ц и и этих катушек, т. е. магнитные потоки, пронизывающие каждую из катушек и вызванные протекающим по ней током. Часть магнитного потока самоиндукции первой катушки  $\Phi_{21}$ , которая

пронизывает витки второй катушки, назовем потоком взаимной индукции второй катушки. Часть магнитного потока самоиндукции первой катушки  $\Phi_{S1}$ , которая не пронизывает витки второй катушки, назовем магнитным потоком рассеяния первой катушки, часть магнитного потока самоиндукции второй катушки  $\Phi_{12}$ , которая пронизывает витки первой, называется потоком взаимной индукции первой катушки, а часть магнитного потока самоиндукции второй катушки  $\Phi_{S2}$ , которая пронизывает только витки второй катушки, — потоком рассеяния второй катушки (на рис. 2.43 изображено только по одной силовой линии каждого из магнитных потоков). Таким образом, магнитный поток самоиндукции каждой из катушек содержит по две составляющие

$$\Phi_{11} = \Phi_{21} + \Phi_{S1}; \quad \Phi_{22} = \Phi_{12} + \Phi_{S2} \quad (2.149)$$

Полный магнитный поток, пронизывающий каждую из катушек, складывается из магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12}; \quad \Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}. \quad (2.150)$$

Потокоосцепление каждой из катушек так же, как и магнитный поток, имеет две составляющие — потокоосцепление самоиндукции  $\Psi_{11}$ ,  $\Psi_{22}$  и потокоосцепление взаимной индукции  $\Psi_{21}$ ,  $\Psi_{12}$ :

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12}; \quad \Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21}. \quad (2.151)$$

Когда все витки каждой из катушек пронизываются одинаковыми магнитными потоками, выражения (2.151) могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= N_1 \Phi_1 = N_1 \Phi_{11} \pm N_1 \Phi_{12}; \\ \Psi_2 &= N_2 \Phi_2 = N_2 \Phi_{22} \pm N_2 \Phi_{21}, \end{aligned} \quad (2.152)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — число витков первой и второй катушек.

Знак плюс в выражениях (2.150) — (2.152) соответствует совпадающим по направлению (предполагается, что катушки расположены соосно) магнитным потокам самоиндукции и взаимной индукции каждой из катушек. Такое включение катушек индуктивности называется *согласным* (рис. 2.43, *а*). Знак минус соответствует противоположным направлениям магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции. Такое включение катушек называют *встречным* (рис. 2.43, *б*).

В соответствии с законом электромагнитной индукции (1.19) электродвижущие силы, наводимые в каждой из связанных катушек индуктивности:

$$\begin{aligned} e_1 &= - \frac{d\Psi_1}{dt} = - \left( \frac{d\Psi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{dt} \right); \\ e_2 &= - \frac{d\Psi_2}{dt} = - \left( \frac{d\Psi_{22}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.153)$$

Первое слагаемое в каждом из выражений (2.153) представляет собой э.д.с. самоиндукции, второе — э. д. с. взаимной индукции. Преобразуем выражения (2.153), формально умножив и разделив каждое из слагаемых на  $di_1$  или  $di_2$ :

$$\begin{aligned} e_1 &= - \left( \frac{d\Psi_{11}}{di_1} \frac{di_1}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{di_2} \frac{di_2}{dt} \right); \\ e_2 &= - \left( \frac{d\Psi_{22}}{di_2} \frac{di_2}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{di_1} \frac{di_1}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.154)$$

В индуктивных катушках без ферромагнитных сердечников магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции пропорциональны вызывающим их токам, поэтому производные потокосцеплений по токам могут быть заменены отношением соответствующих величин. Индуктивность каждой катушки  $L_1$  или  $L_2$  есть отношение потокосцепления самоиндукции к вызвавшему его току:

$$L_1 = \frac{d\Psi_{11}}{di_1} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}; \quad L_2 = \frac{d\Psi_{22}}{di_2} = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2}. \quad (2.155)$$

Взаимная индуктивность между катушками  $M_{12}$  и  $M_{21}$  — это отношение потокосцепления взаимной индукции к вызвавшему его току:

$$M_{12} = \frac{d\Psi_{12}}{di_2} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}; \quad M_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{di_1} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}. \quad (2.156)$$

Связанные индуктивные катушки, у которых потоки самоиндукции и взаимной индукции пропорциональны вызвавшим их токам и, следовательно, величины  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M_{12}$  и  $M_{21}$  не зависят от  $i_1$  и  $i_2$ , называются катушками с линейной индуктивностью. Для них всегда выполняется условие  $\Psi_{12}/i_2 = \Psi_{21}/i_1$ , поэтому

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (2.157)$$

Взаимную индуктивность выражают в генри (Гн).

С учетом введенных обозначений (2.155), (2.156), (2.157) э.д.с., наводимые в каждой из катушек:

$$\begin{aligned} e_1 &= - \left( L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \right); \\ e_2 &= - \left( L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \right). \end{aligned}$$

Переходя от э.д. с. к напряжениям на зажимах связанных индуктивных катушек, получаем окончательно

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \\ u_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (2.158)$$

В теории электрических цепей рассмотрение реальных элементов — связанных индуктивных катушек — заменяют рассмотрением их упрощенных моделей — связанных индуктивностей. С в я з а н н ы е



Одноименными зажимами двух связанных индуктивных катушек называется пара зажимов, выбранных таким образом, что при одинаковых относительно этих зажимов направлениях токов катушек магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в каждой из них суммируются. Одноименные зажимы индуктивных катушек помечают одинаковыми значками (буквами  $n$  и  $k$ , точками, звездочками, треугольниками и т. п.), проставляемыми в непосредственной близости к соответствующим зажимам. Так, на рис. 2.43, *a* звездочками отмечены одноименные зажимы 1 и 2. Вторую пару одноименных зажимов этих катушек образуют зажимы 1' и 2', специально не обозначенные, так как

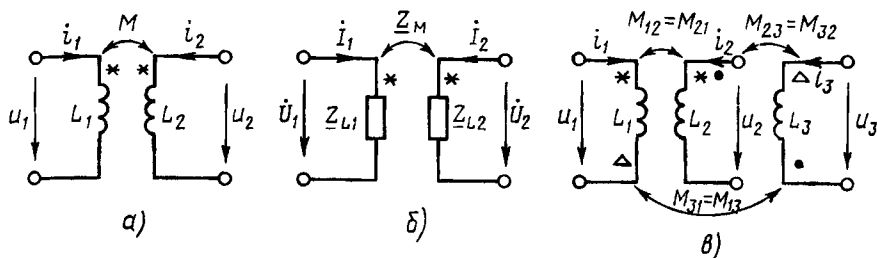


Рис. 2.44. Условные графические обозначения связанных индуктивностей на эквивалентных схемах

для решения вопроса о том, является ли заданное включение согласным или встречным, достаточно обозначить одну пару одноименных зажимов. На рис. 2.43, *б* точками обозначены одноименные зажимы 1 и 2'.

Аналогично поступают и при построении эквивалентных схем электрических цепей с взаимными индуктивностями. Условное графическое изображение связанных индуктивностей, используемое при построении таких схем, показано на рис. 2.44, *a*. Когда общим магнитным потоком связано не две, а большее количество индуктивностей, одноименные зажимы каждой из пар обозначают с помощью различных значков (рис. 2.44, *в*).

Итак, если токи связанных индуктивностей одинаково ориентированы относительно одноименных зажимов, то такое включение является согласным и в выражениях (2.158) следует использовать знак плюс; в противном случае, включение является встречным и необходимо использовать знак минус (величина  $M$  при этом считается положительной). Например, индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  на рис. 2.44, *a* и  $L_1$  и  $L_2$  на рис. 2.44, *в* включены согласнo, а индуктивности  $L_2$  и  $L_3$ ,  $L_1$  и  $L_3$  (рис. 2.44, *в*) включены встречно.

До сих пор рассматривались только соосно расположенные индуктивные катушки. В общем случае, когда направления осей связанных индуктивных катушек не совпадают, при выборе способа их включения используют несколько иной подход. При этом в выражениях (2.158) берут знак плюс, а взаимную индуктивность рассчитывают по формуле

$$M = M_{\max} \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между направлением магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции в центре катушек.

## Коэффициент связи между индуктивными катушками

Из качественного рассмотрения процессов в связанных индуктивных катушках следует, что чем сильнее связаны катушки, т. е. чем большая часть магнитного потока, создаваемого током каждой из них, пронизывает другую катушку, тем выше взаимная индуктивность. Однако при этом не ясно, как связана взаимная индуктивность с индуктивностями катушек, и чем определяется максимальное значение  $M$ . Введем новую величину, количественно характеризующую степень связи между катушками -- коэффициент связи. Коэффициент связи  $k_M$  представляет собой среднее геометрическое из отношений потока взаимоиндукции к потоку самоиндукции каждой из катушек:

$$k_M = \sqrt{\Phi_{12} \Phi_{21} / (\Phi_{11} \Phi_{22})}. \quad (2.160)$$

Представляя магнитный поток самоиндукции каждой из катушек в виде суммы потока рассеяния этой катушки и потока взаимоиндукции другой катушки (2.149), получаем

$$k_M = \sqrt{\Phi_{12} \Phi_{21} / (\Phi_{21} + \Phi_{S1}) (\Phi_{12} + \Phi_{S2})}. \quad (2.161)$$

Из выражения (2.161) видно, что значения коэффициента связи лежат в пределах

$$0 \leq k_M \leq 1, \quad (2.162)$$

причем  $k_M \text{ макс} = 1$  только тогда, когда потоки рассеяния обеих катушек равны нулю, или, другими словами, когда магнитный поток, создаваемый током одной катушки, полностью пронизывает другую катушку. Коэффициент связи определяется конструкцией катушки и практически всегда меньше единицы.

Коэффициент связи  $k_M$  можно выразить через индуктивности связанных катушек и их взаимную индуктивность. Подставляя в (2.160) выражения для потоков самоиндукции  $\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{22}$  и взаимоиндукции  $\Phi_{12}$ ,  $\Phi_{21}$ , полученные из (2.155), (2.156), находим

$$k_M = \sqrt{\frac{M_{12} i_2 / N_1}{L_1 i_1 / N_1} \frac{M_{21} i_1 / N_2}{L_2 i_2 / N_2}} = \sqrt{\frac{M_{12} M_{21}}{L_1 L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

откуда

$$M = k_M \sqrt{L_1 L_2}. \quad (2.163)$$

Из выражения (2.163) с учетом (2.162) можно определить пределы, в которых изменяются значения взаимной индуктивности:

$$0 \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}. \quad (2.164)$$

Таким образом, максимальное значение взаимной индуктивности катушек не может превышать среднего геометрического их индуктивностей.



на основании законов Кирхгофа, определяются только топологией цепи и не зависят от входящих в нее элементов. В связи с этим уравнения баланса токов и напряжений цепи, содержащей связанные индуктивности, имеют точно такой же вид, как и уравнения соответствующей цепи в отсутствие связи между индуктивностями, т. е. при  $M = 0$ .



**Пример 2.13.** Составим основную систему уравнений электрического равновесия цепи, эквивалентная схема которой для мгновенных значений приведена на рис. 2.45, а.

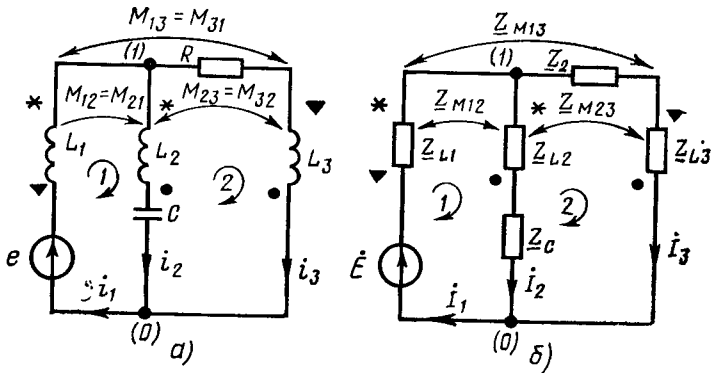


Рис. 2.45. К примеру 2.13

На основании первого и второго законов Кирхгофа для цепи может быть составлено три независимых уравнения

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_3 &= 0; \\ u_{L1} + u_{L2} + u_C &= e; \\ u_R + u_{L3} - u_C - u_{L2} &= 0. \end{aligned}$$

В сочетании с пятью компонентными уравнениями

$$\begin{aligned} u_R &= Ri_3; \\ u_C &= u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt; \\ u_{L1} &= L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt}; \\ u_{L2} &= -M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt}; \\ u_{L3} &= M_{31} \frac{di_1}{dt} + M_{32} \frac{di_2}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt}. \end{aligned}$$

получаем восемь уравнений для определения восьми неизвестных величин:  $i_1$ ;  $i_2$ ;  $i_3$ ;  $u_R$ ;  $u_C$ ;  $u_{L1}$ ;  $u_{L2}$ ;  $u_{L3}$ .



Эквивалентная схема рассматриваемой цепи для комплексных токов и напряжений изображена на рис. 2.45, б, а основная система уравнений электрического равновесия цепи в комплексной форме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= 0; \quad \dot{U}_R = R\dot{I}_3; \\ \dot{U}_{L1} + \dot{U}_{L2} + \dot{U}_C &= \dot{E}; \quad \dot{U}_C = \dot{I}_2/(j\omega C); \\ \dot{U}_R + \dot{U}_{L3} - \dot{U}_C - \dot{U}_{L2} &= 0; \\ \dot{U}_{L1} &= j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M_{12} \dot{I}_2 + j\omega M_{13} \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{L2} &= -j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{23} \dot{I}_3; \\ \dot{U}_{L3} &= j\omega M_{31} \dot{I}_1 + j\omega M_{32} \dot{I}_2 + j\omega L_3 \dot{I}_3 \end{aligned}$$

Выражая падения напряжений на всех элементах через соответствующие токи, получаем систему из уравнений

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0;$$

$$j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M_{12} \dot{I}_2 + j\omega M_{13} \dot{I}_3 - j\omega M_{21} \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M_{23} \dot{I}_3 + \dot{I}_2/(j\omega C) = \dot{E};$$

$R\dot{I}_3 + j\omega M_{31} \dot{I}_1 + j\omega M_{32} \dot{I}_2 + j\omega L_3 \dot{I}_3 - \dot{I}_2/(j\omega C) + j\omega M_{21} \dot{I}_1 - j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M_{23} \dot{I}_3 = 0$   
для определения неизвестных токов  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ .

### Эквивалентные преобразования участков цепей со связанными индуктивностями

Рассмотрим эквивалентные преобразования участков цепей, содержащих связанные индуктивности. В частности, покажем возможность замены их участками, не содержащими связанных индуктивностей. Начнем с наиболее простых случаев, когда связанные индуктивности включены последовательно (рис. 2.46, а, б) или параллельно

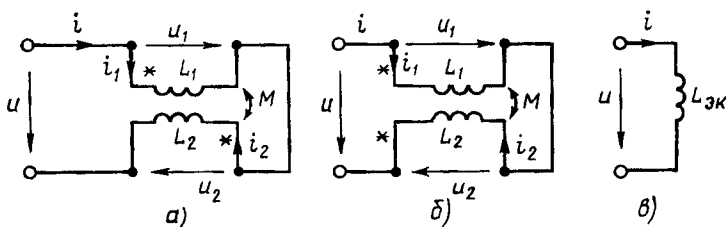


Рис. 2.46. Последовательное соединение связанных индуктивностей

(рис. 2.47, а, б). В этих случаях участок цепи, содержащий связанные индуктивности, имеет два внешних вывода, т. е. представляет собой двухполюсник. Определим его комплексное входное сопротивление и схему замещения.

При последовательном соединении связанных индуктивностей их токи равны, а напряжение на входе рассматриваемого участка цепи есть сумма напряжений на каждой из индуктивностей:

$$i = i_1 = i_2; \quad u = u_1 + u_2. \quad (2.166)$$

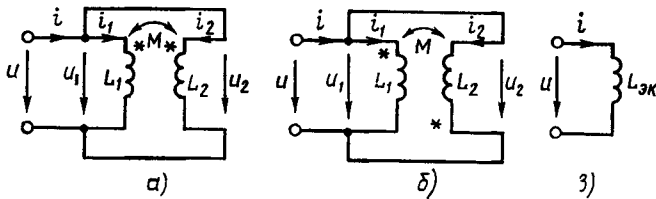


Рис. 2.47. Параллельное соединение связанных индуктивностей

Используя выражения (2.166) и компонентные уравнения связанных индуктивностей (2.158), определяем зависимость между током и напряжением на зажимах рассматриваемого участка цепи:

$$u = (L_1 + L_2 \pm 2M) \frac{di}{dt} = L_{\text{эк}} \frac{di}{dt}. \quad (2.167)$$

Как видно из выражения (2.167), участок цепи, содержащий последовательно включенные связанные индуктивности, может быть заменен эквивалентной индуктивностью (см. рис. 2.46, в)

$$L_{\text{эк}} = L_1 + L_2 \pm 2M, \quad (2.168)$$

где знак плюс соответствует согласному включению, а минус — встречному. Таким образом, при согласном включении связанных индуктивностей эквивалентная индуктивность получается больше, а при встречном — меньше, чем эквивалентная индуктивность участка цепи, содержащего две последовательно включенные несвязанные индуктивности.

На использовании выражения (2.168) основан простой метод измерения взаимной индуктивности, в соответствии с которым сначала производят измерение эквивалентной индуктивности катушек при согласном  $L_{\text{эк. согл}} = L_1 + L_2 + 2M$  и встречном включении  $L_{\text{эк. встр}} = L_1 + L_2 - 2M$ , а затем по формуле  $M = (L_{\text{эк. согл}} - L_{\text{эк. встр}}) / 4$  рассчитывают  $M$ .

При параллельном соединении связанных индуктивностей к их зажимам прикладывается одинаковое напряжение  $u$ , а входной ток рассматриваемого участка цепи складывается из токов обеих индуктивностей:

$$u = u_1 = u_2; \quad i = i_1 + i_2. \quad (2.169)$$

Используя (2.169) и компонентные уравнения связанных индуктивностей (2.158), составляем систему уравнений

$$\begin{aligned} u &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \\ u &= L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}; \\ i &= i_1 + i_2, \end{aligned}$$

из решения которой находим зависимость между напряжением и током на зажимах рассматриваемого участка цепи:

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M} \frac{di}{dt} = L_{\text{эк}} \frac{di}{dt}. \quad (2.170)$$

В соответствии с (2.170) участок цепи, представляющий собой две параллельно включенные связанные индуктивности, обладает эквивалентной индуктивностью (рис. 2.47, в)

$$L_{\text{эк}} = (L_1 L_2 - M^2) / (L_1 + L_2 \mp 2M), \quad (2.171)$$

причем знак минус соответствует согласному включению, а знак плюс — встречному.

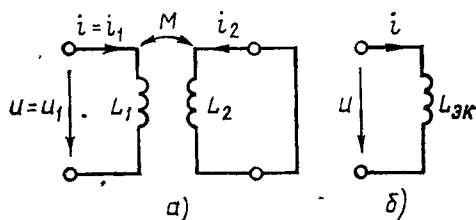
При  $L_1 = L_2 = L$  выражение (2.171) приводится к виду

$$L_{\text{эк}} = L(1 - k_M^2) / [2(1 \mp k_M)] = L(1 \pm k_M) / 2,$$

откуда следует, что  $\lim_{k_M \rightarrow 1} L_{\text{эк}} = L$  при согласном и  $\lim_{k_M \rightarrow 1} L_{\text{эк}} = 0$  при встречном включении индуктивностей.

При коротком замыкании одной из связанных индуктивностей, например индуктивности  $L_2$  (см. рис. 2.44, а), участок цепи, содержащий связанные индуктивности, также представляет собой двухполюсник, напряжение и ток на входе которого совпадают с напряжением и током на зажимах индуктивности  $L_1$  (рис. 2.48, а). Решая систему уравнений, описывающую процессы в данном участке цепи

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} &= u; \\ L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} &= 0; \\ i &= i_1, \end{aligned}$$



находим

$$u = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} \frac{di}{dt} = L_{\text{эк}} \frac{di}{dt}, \quad (2.172)$$

Рис. 2.48. Короткое замыкание одной из связанных индуктивностей

где  $L_{\text{эк}} = (L_1 L_2 - M^2) / L_2$  — эквивалентная индуктивность участка цепи.

Таким образом, все рассмотренные идеализированные двухполюсники, содержащие связанные индуктивности, при любом воздействии могут быть заменены одной индуктивностью  $L = L_{\text{эк}}$ . Комплексное сопротивление этих двухполюсников имеет чисто реактивный характер:  $Z = j\omega L_{\text{эк}}$ .

Найдем схему замещения участка цепи, содержащего две связанные индуктивности, включенные таким образом, что они имеют одну общую точку (рис. 2.49, а, б). Используя в качестве исходных компонентные уравнения связанных индуктивностей (2.158), добавим к первому из

этих уравнений и вычтем из него член  $M \frac{di_1}{dt}$ , а ко второму уравнению добавим и вычтем член  $M \frac{di_2}{dt}$ :

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt};$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt}.$$

После приведения подобных членов эти уравнения принимают вид

$$u_1 = (L_1 \mp M) \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt};$$

$$u_2 = (L_2 \mp M) \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{d(i_1 + i_2)}{dt}.$$
(2.173)

Здесь, как и в полученных ранее выражениях, верхний знак соответствует согласному, а нижний знак — встречному включению связанных индуктивностей.

Системе (2.173) может быть поставлена в соответствие эквивалентная схема участка цепи, не содержащая связанных индуктивностей (рис. 2.49, в). Анализ уравнений (2.173) и эквивалентной схемы показывает, что только при согласном включении и достаточно малом коэффициенте связи ( $M < L_1, M < L_2$ ) все три индуктивности этой схемы положительны. При встречном включении или при согласном включении при большом коэффициенте связи ( $M > L_1$  или  $M > L_2$ ) одна из

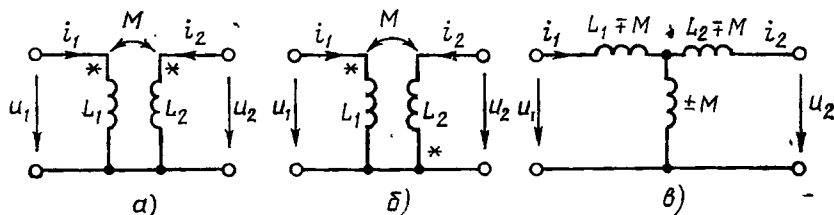


Рис. 2.49. Две связанные индуктивности с общей точкой:

а — согласное включение; б — встречное включение; в — эквивалентная схема без связанных индуктивностей

индуктивностей оказывается отрицательной. Очевидно, что такой схеме нельзя поставить в соответствие моделирующую цепь, состоящую из идеализированных элементов — индуктивностей. Эта схема является чисто расчетной: ее применение во многих случаях существенно упрощает анализ цепей со связанными индуктивностями

В общем случае, если рассматриваемый участок цепи содержит связанные индуктивности, не имеющие общих точек, его можно заменить участком цепи без взаимных индуктивностей, но с управляемыми источниками (рис. 2.50, а и 2.51, а). В первом случае эквивалентная схема содержит источники напряжения, э.д.с. которых равна напряжению на некотором участке цепи; во втором — управляемые источники напряжения, э.д.с. которых пропорциональна производным токов цепи.

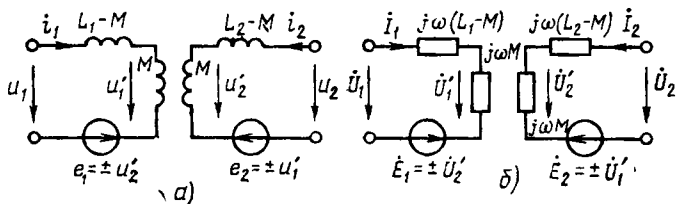


Рис. 2.50. Схемы замещения связанных индуктивностей с источниками напряжения, управляемыми напряжением

Комплексные схемы замещения преобразованных цепей изображены на рис. 2.50, б и 2.51, б. В справедливости предлагаемых схем можно убедиться, составив по ним систему уравнений электрического равновесия преобразованной цепи и приведя ее к виду (2.158).

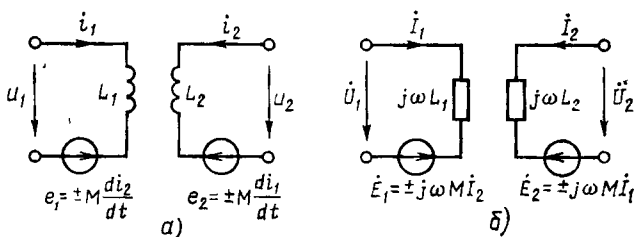


Рис. 2.51. Схемы замещения связанных индуктивностей с источниками напряжения, управляемыми производными токов

Используя приемы, подобные рассмотренным, можно построить также ряд других схем замещения участков цепей со связанными индуктивностями.

### Вариометры с переменной взаимной индуктивностью

В различных радиотехнических устройствах широко используют катушки с переменной индуктивностью, иазываемые в а р и о м е т р а м и. Индуктивность вариометра может изменяться различными способами, например путем изменения числа витков или путем перемещения магнитного или немагнитного сердечника, однако наибольшее распространение получили вариометры с переменной взаимной индуктивностью.

Вариометр этого типа представляет собой две связанные индуктивные катушки, намотанные на цилиндрические или сферические каркасы и расположенные одна внутри другой так, что внутренняя катушка (ротор) может вращаться относительно неподвижной наружной катушки (статора). Взаимная индуктивность между катушками изменяется при этом по косинусоидальному закону, принимая значения от  $M = M_{\max}$  при  $\alpha = 0$  (магнитные потоки ротора и статора совпадают по направлению) до  $M = 0$  при  $\alpha = 90^\circ$  (магнитные потоки в центре ротора и статора перпендикулярны) и  $M = -M_{\max}$  при  $\alpha = 180^\circ$  (направления магнитных потоков ротора и статора противоположны).

Обмотки ротора и статора могут быть включены последовательно или параллельно, в ряде случаев применяются вариометры, у которых обмотка ротора закорочена. Максимальные  $L_{\max}$  и минимальные  $L_{\min}$  значения индуктивности

вариометра, соответствующие этим вариантам соединения обмоток ротора и статора, могут быть рассчитаны с помощью выражений (2.168), (2.171), и (2.172). Одним из основных параметров вариометра является коэффициент перекрытия по индуктивности  $k_L = L_{\max}/L_{\min}$ . Коэффициент перекрытия определяется максимальным значением взаимной индуктивности  $M_{\max}$  и увеличивается с ростом коэффициента связи между обмотками.

## Понятие о линейных трансформаторах

Трансформатором называется устройство для передачи энергии из одной части электрической цепи в другую, основанное на использовании явления взаимоиндукции. Трансформатор состоит из нескольких связанных индуктивных катушек (обмоток), которые для

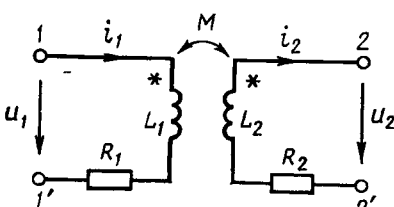


Рис. 2.52. Эквивалентная схема линейного трансформатора

повышения их индуктивности и уменьшения потоков рассеяния размещены на общем ферромагнитном сердечнике. Одну из обмоток трансформатора обычно подключают к источнику энергии, а к остальным обмоткам подсоединяют различные нагрузки. Обмотка, подключенная к источнику энергии, называется *первичной*, остальные обмотки называются *вторичными*.

В связи с тем что свойства магнитных материалов существенно зависят от напряженности пронизывающих их магнитных полей и, следовательно, от создающих эти поля токов, трансформатор с ферромагнитным сердечником представляет собой в общем случае устройство с *нелинейными характеристиками*. Процессы в нем описываются *нелинейными дифференциальными уравнениями*.

В трансформаторе без ферромагнитного сердечника электрические процессы могут быть описаны *линейными дифференциальными уравнениями*, поэтому такой трансформатор называется *линейным* (рис. 2.52). *Линейный двухобмоточный трансформатор можно рассматривать как две связанные катушки с линейной индуктивностью*. Сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  учитывают потери энергии в обмотках трансформатора. При необходимости в эквивалентной схеме можно учесть также межвитковые и межобмоточные емкости, которые, как правило, не оказывают существенного влияния на работу трансформатора в рабочем диапазоне частот. Понятие «линейного трансформатора» оказывается полезным не только при анализе процессов в трансформаторах без ферромагнитного сердечника. В ряде случаев, когда нелинейность магнитных материалов не оказывает существенного влияния на характеристики трансформатора с ферромагнитным сердечником, его приближенно рассматривают как *линейный* и представляют при анализе цепей с помощью линейной схемы замещения.

Используя компонентные уравнения связанных индуктивностей (2.158), составим уравнения баланса напряжений идеализированной

цепи, схема которой изображена на рис. 2.52:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \\ -u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (2.174)$$

Ограничивая рассмотрение случаем гармонического внешнего воздействия, перейдем в (2.174) от мгновенных значений токов и напряжений к их комплексным изображениям:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 - j\omega M\dot{I}_2; \\ -\dot{U}_2 &= (R_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 - j\omega M\dot{I}_1. \end{aligned} \quad (2.175)$$

Система уравнений (2.175) при сделанных допущениях описывает соотношения между токами и напряжениями на зажимах трансформаторов различных типов, которые можно приближенно считать линейными, и служит основой для анализа различных цепей с трансформаторами при гармоническом внешнем воздействии.

Пусть в рассматриваемом линейном двухобмоточном трансформаторе ток вторичной обмотки  $\dot{I}_2 = 0$  (режим холостого хода на выходе). Как видно из выражений (2.175), ток первичной обмотки  $\dot{I}_1$  в этом случае не равен нулю:

$$\dot{I}_1|_{\dot{I}_2=0} = \dot{U}_1 / (R_1 + j\omega L_1) = \dot{I}_{10}. \quad (2.176)$$

Ток  $\dot{I}_{10}$ , потребляемый трансформатором от источника в режиме холостого хода на выходе, называется током намагничивания. При заданной угловой частоте и конечной амплитуде напряжения первичной обмотки ток намагничивания уменьшается с ростом индуктивности первичной обмотки  $L_1$  и обращается в нуль при  $L_1 = \infty$ .

Решим систему уравнений (2.175) относительно напряжения  $\dot{U}_1$  и тока  $\dot{I}_1$  первичной обмотки:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \left[ \frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega M} + \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{j\omega M Z_{\text{н}}} \right] \dot{U}_2; \\ \dot{I}_1 &= \frac{R_2 + j\omega L_2 + Z_{\text{н}}}{j\omega M} \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (2.177)$$

Из выражений (2.177) видно, что напряжение  $\dot{U}_1$  и ток  $\dot{I}_1$  первичной обмотки линейного трансформатора пропорциональны соответственно напряжению  $\dot{U}_2$  и току  $\dot{I}_2$  вторичной обмотки, причем коэффициенты пропорциональности в обоих случаях зависят от сопротивления нагрузки  $Z_{\text{н}} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ .

В теории цепей большое значение имеют понятия «совершенного» и «идеального» трансформатора.

Совершенным трансформатором называется идеализированный четырехполюсный элемент, представляющий собой две связанные индуктивности с коэффициентом связи, равным единице. Из определе-

ния следует, что в таком трансформаторе (рис. 2.53, а) отсутствуют потоки рассеяния и не происходит запасаения энергии в электрическом поле или преобразования электрической энергии и в другие виды энергии. Полагая в выражениях (2.177)  $R_1 = R_2 = 0$  и  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ , получаем уравнения, определяющие зависимости между токами и напряжениями обмоток совершенного трансформатора:

$$\dot{U}_1 = \sqrt{L_1/L_2} \dot{U}_2; \quad (2.178)$$

$$I_1 = \left( \sqrt{L_2/L_1} + \frac{Z_{\text{н}}}{j\omega L_1} \sqrt{L_1/L_2} \right) i_2$$

Величина

$$n = \sqrt{L_2/L_1} = L_2/M = M/L_1, \quad (2.179)$$

входящая в уравнения (2.178), получила название коэффициента трансформации. Подставляя в (2.179) выражения для индуктивностей катушек (2.155) и их взаимных индуктивностей

(2.156), находим, что коэффициент трансформации равен отношению числа витков вторичной обмотки  $N_2$  к числу витков первичной обмотки  $N_1$ :

$$n = \frac{N_2 \Phi_{21}/i_1}{N_1 \Phi_{11}/i_1} = \frac{N_2}{N_1} \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{21} + \Phi_{S1}} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (2.180)$$

(Напомним, что потоки рассеяния совершенного трансформатора равны нулю, т. е.  $\Phi_{S1} = \Phi_{S2} = 0$ .)

Используя выражения (2.176) и (2.179), преобразуем уравнения (2.178) к виду

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2/n; \quad I_1 = (nI_2 + I_{10}), \quad (2.181)$$

где  $I_{10} = \dot{U}_1/(j\omega L_1)$  — ток намагничивания совершенного трансформатора.

Согласно выражениям (2.181) отношение напряжения на вторичной обмотке совершенного трансформатора к напряжению на первичной обмотке равно коэффициенту трансформации и не зависит от сопротивления нагрузки. Выражениям (2.181) соответствует комплексная схема замещения совершенного трансформатора, приведенная на рис. 2.53, б.

Совершенный трансформатор, ток намагничивания которого равен нулю, называется идеальным. Из выражений (2.181) видно, что ток намагничивания совершенного трансформатора равен нулю толь-

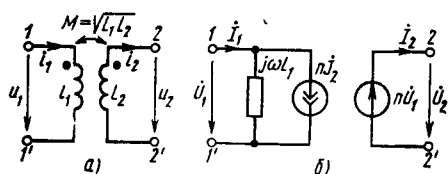


Рис. 2.53. Совершенный трансформатор (а) и его комплексная схема замещения (б)



ко при  $L_1 = \infty$ . Подставляя в (2.181)  $I_{10} = 0$ , получаем компонентные уравнения идеального трансформатора

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{n} \dot{U}_2; \dot{I}_1 = n \dot{I}_2. \quad (2.182)$$

Аналогичный вид будут иметь и соотношения между мгновенными значениями токов и напряжений идеального трансформатора:

$$u_1 = \frac{1}{n} u_2; i_1 = n i_2. \quad (2.183)$$

Комплексная схема замещения идеального трансформатора изображена на рис. 2.54, а, схема замещения для мгновенных значений — на рис. 2.54, б.

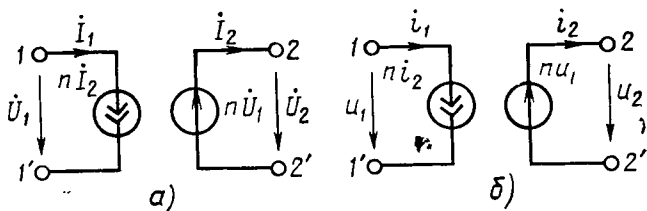


Рис. 2.54. Схемы замещения идеального трансформатора

Из компонентных уравнений (2.182) и (2.183) следует, что при любом значении сопротивления нагрузки отношение напряжения вторичной обмотки к напряжению первичной обмотки идеального трансформатора равно отношению токов первичной и вторичной обмоток:

$$u_2/u_1 = i_1/i_2 = n; \dot{U}_2/\dot{U}_1 = I_1/I_2 = \dot{I}_1/\dot{I}_2 = n. \quad (2.184)$$

В связи с тем что коэффициент трансформации  $n$  является действительным числом, напряжение и ток первичной обмотки имеют такие же начальные и мгновенные фазы, как соответственно напряжение и ток вторичной обмотки, и отличаются от них только по амплитуде (действующему значению). Из выражений (2.184) следует, что мгновенная и комплексная мощности, потребляемые первичной обмоткой, равны мгновенной и комплексной мощностям, отдаваемым идеальным трансформатором в нагрузку:

$$u_1 i_1 = u_2 i_2; \dot{U}_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \dot{I}_2.$$

Очевидно, что к.п.д. идеального трансформатора равен единице.

Если к зажимам 2 — 2' идеального трансформатора подключено сопротивление нагрузки  $Z_{\text{н}} = \dot{U}_2/\dot{I}_2$ , то его входное сопротивление со стороны зажимов 1 — 1'

$$\underline{Z} = \dot{U}_1/\dot{I}_1 = \dot{U}_2/(n^2 \dot{I}_2) = \underline{Z}_{\text{н}}/n^2. \quad (2.185)$$

Таким образом, входное сопротивление идеального трансформатора имеет такой же характер, как и сопротивление нагрузки, и отличается от него по модулю в  $n^2$  раз. Способность трансформаторов преобразо-

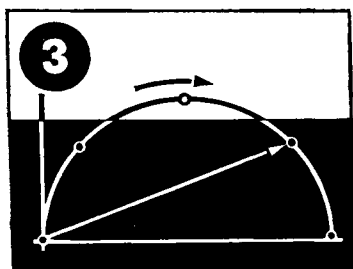
вывать «модуль» сопротивления широко используется в радиоэлектронных устройствах для согласования сопротивления источника энергии с нагрузкой.

В отличие от идеального в реальном трансформаторе происходят потери энергии, он характеризуется в ряде случаев значительными паразитными емкостями, индуктивность его обмоток имеет конечное значение, а потоки рассеяния не равны нулю. Как правило, при разработке конструкции трансформатора предпринимается ряд мер, направленных на приближение его свойств к свойствам идеального трансформатора. С этой целью, в частности, обмотки трансформатора размещают на ферромагнитном сердечнике с высоким значением эффективной магнитной проницаемости. Применение сердечника увеличивает индуктивность обмоток, а также коэффициент связи и приводит к снижению тока намагничивания. Рациональным выбором материалов и конструкции трансформатора добиваются также уменьшения межвитковых и межобмоточных емкостей и снижения всех видов потерь энергии. В зависимости от степени приближения свойств реального трансформатора к свойствам идеального при анализе цепей его можно представлять одной из эквивалентных схем, приведенных на рис. 2.52—2.54, или привлекать более сложные, например нелинейные, схемы замещения.



**Пример 2.14.** Рассмотрим применение трансформаторов для согласования источника энергии с нагрузкой. Пусть оптимальное (по какому-либо критерию) сопротивление нагрузки источника энергии равно  $R_{H \text{ opt}}$ . Сопротивление же нагрузки, например динамического громкоговорителя, равно  $R_H$  и не подлежит регулировке. Если эту нагрузку подключить к источнику энергии через согласующий трансформатор с коэффициентом трансформации  $n = \sqrt{R_H / R_{H \text{ opt}}}$ , свойства которого близки к свойствам идеального трансформатора, то в соответствии с (2.185) входное сопротивление трансформатора  $Z = R_H / n^2 = R_{H \text{ opt}}$  и источник энергии окажется нагруженным на сопротивление, равное оптимальному.

# Частотные характеристики простейших электрических цепей



## § 3.1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### Понятие о комплексных частотных характеристиках

Задача анализа электрической цепи была сформулирована ранее как задача определения реакции цепи на заданное внешнее воздействие. Пусть для некоторой линейной электрической цепи это воздействие задано в виде токов и напряжений нескольких независимых источников тока и напряжения, а искомая реакция (отклик) цепи представляет собой совокупность токов или напряжений отдельных элементов (нагрузок). Вынесем из рассматриваемой цепи все ветви, содержащие независимые источники тока и напряжения, а также ветви, содержащие напряжения которых подлежат определению. Оставшуюся часть цепи, содержащую идеализированные пассивные элементы и, возможно, управляемые источники, представим в виде многополюсника (рис. 3.1, а).

Уточним понятия входов и выходов цепи. В х о д н ы м и будем называть пару зажимов (полюсов), к которым подключается каждый из независимых источников, задающих внешнее воздействие на цепь. Зажимы, служащие для подключения нагрузки, т. е. ветви, ток или напряжение которой необходимо определить, назовем в ы х о д н ы м и. Пары входных и выходных зажимов образуют соответственно в х о д ы и в ы х о д ы цепи, точнее, входы и выходы многополюсника, который получается из цепи при вынесении из нее источников внешнего воздействия и нагрузок. Деление зажимов на входные и выходные является в некоторой степени условным, так как одна и та же пара зажимов может одновременно быть и входной, и выходной (например, когда внешнее воздействие на цепь задается некоторым независимым источником напряжения и требуется определить ток ветви, содержащей этот источник). В связи с этим наряду с понятиями входа и выхода в теории цепей широко используется понятие стороны многополюсника.

С т о р о н о й м н о г о п о л ю с н и к а, или п о р т о м, называется пара зажимов, которые служат либо входом, либо выходом, либо и входом и выходом одновременно.

Из определений входных и выходных зажимов следуют важные особенности зажимов, образующих порт многополюсника:

1) ток, вытекающий через один зажим порта, равен току, вытекающему через другой зажим этого же порта;

2) между парами полюсов, принадлежащих к разным портам, не должно быть никаких внешних по отношению к многополюснику соединений (внутри многополюсника соединения, естественно могут быть).

Зажимы, образующие одну сторону многополюсника, будем обозначать одинаковыми цифрами (со штрихом и без штриха)  $1 - 1'$ ,  $2 - 2'$ , ...,  $n - n'$  (рис. 3.1). В зависимости от числа сторон различают односторонние, двусторонние и  $n$ -сторонние многополюсники.

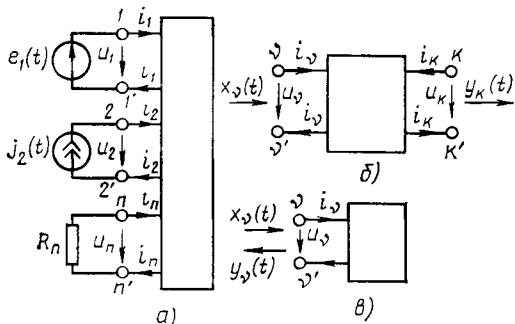


Рис. 3.1. Представление цепи в виде многополюсника

Пусть внешнее воздействие на цепь задано только на одной паре полюсов  $v - v'$ :  $x(t) = x_v(t)$  и необходимо найти реакцию цепи также только на одной паре полюсов  $k - k'$  (рис. 3.1, б):  $y(t) = y_k(t)$ . Поскольку процессы на остальных полюсах в данном случае интереса не представляют, их можно не выделять из цепи. Исследуемую цепь удобно рассматривать как двусторонний четырехполюсник. Если  $v = k$ , то исследуемая цепь становится односторонней, т. е. превращается в двухполюсник (рис. 3.1, в).

Ограничимся рассмотрением случая гармонического внешнего воздействия; при этом от исследования соотношений между мгновенными значениями реакции цепи  $y_h(t)$  и внешнего воздействия  $x_v(t)$  можно перейти к исследованию соотношений между их комплексными изображениями.

По определению, комплексной частотной характеристикой цепи называется отношение комплексных изображений отклика и воздействия:

$$H_{kv}(j\omega) = \dot{Y}_{mk} / \dot{X}_{mv} = \dot{Y}_k / \dot{X}_v. \quad (3.1)$$

Здесь  $\dot{Y}_{mk} \doteq y_k(t)$ ;  $\dot{Y}_k = \dot{Y}_{mk} / \sqrt{2}$  — комплексные амплитуда и действующее значение реакции цепи;  $\dot{X}_{mv} \doteq x_v(t)$ ;  $\dot{X}_v = \dot{X}_{mv} / \sqrt{2}$  — комплексные амплитуда и действующее значение внешнего воздействия;  $k$  — номер выходных зажимов;  $v$  — номер входных зажимов.

Размерность комплексной частотной характеристики (КЧХ) равна отношению размерностей отклика цепи и внешнего воздействия. В зависимости от того, какие величины (токи или напряжения) рассматриваются в качестве откликов и внешних воздействий, КЧХ может иметь размерность сопротивления (внешнее воздействие —  $i_v$ , реакция цепи —  $u_k$ ), проводимости (внешнее воздействие —  $u_v$ , реакция цепи

—  $i_k$ ) или быть безразмерной (внешнее воздействие —  $u_v$  и реакция цепи —  $i_k$  либо внешнее воздействие —  $i_v$  и реакция цепи —  $i_k$ ).

Как и всякое комплексное число, КЧХ цепи может быть записана в показательной

$$H_{kv}(j\omega) = H_{kv}(\omega) e^{j\psi_{kv}(\omega)} \quad (3.2)$$

или в алгебраической

$$H_{kv}^s(j\omega) = H'_{kv}(\omega) + jH''_{kv}(\omega) \quad (3.3)$$

формах. Представляя комплексные изображения отклика и воздействия в показательной форме

$$\begin{aligned} \dot{X}_{mv} &= \sqrt{2} \dot{X}_v = X_{mv} e^{j\psi_x} = \sqrt{2} X_v e^{j\psi_x}; \\ \dot{Y}_{mk} &= \sqrt{2} \dot{Y}_k = Y_{mk} e^{j\psi_y} = \sqrt{2} Y_k e^{j\psi_y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

и подставляя (3.4) в выражение (3.1), определяем модуль и аргумент КЧХ:

$$\begin{aligned} H_{kv}(\omega) &= Y_{mk}/X_{mv} = Y_k/Y_v; \\ \psi_{kv}(\omega) &= \psi_y - \psi_x. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, модуль КЧХ равен отношению амплитуд или действующих значений отклика цепи и внешнего воздействия, а ее аргумент представляет собой разность начальных фаз отклика и внешнего воздействия.

Если  $\dot{X}_{mv} \equiv 1$ , КЧХ определяется выражением

$$H_{kv}(j\omega) \Big|_{\dot{X}_{mv} \equiv 1} = \dot{Y}_{mk} = Y_{mk} e^{j\psi_y}, \quad (3.6)$$

следовательно, КЧХ цепи численно равна комплексной амплитуде реакции цепи на внешнее воздействие с единичной амплитудой и нулевой начальной фазой.

Зависимости модуля  $H_{kv}(\omega)$  и аргумента  $\psi_{kv}(\omega)$  комплексной частотной характеристики от частоты  $\omega$  называются амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристиками цепи. Из сравнения выражений (3.2) и (3.6) видно, что АЧХ и ФЧХ цепи характеризуют зависимости от частоты соответственно амплитуды и начальной фазы отклика цепи на внешнее воздействие с  $X_{mv} = 1$  и  $\psi_x = 0$ . Таким образом, КЧХ сочетает в себе амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики цепи.

При графическом представлении комплексных частотных характеристик цепи обычно строят либо отдельно АЧХ и ФЧХ, либо изображают зависимости от частоты вещественной  $H'_{kv}(\omega)$  и мнимой  $H''_{kv}(\omega)$  составляющих КЧХ, которые однозначно выражаются через  $H_{kv}(\omega)$  и  $\psi_{kv}(\omega)$ :

$$H'_{kv}(\omega) = H_{kv}(\omega) \cos \psi_{kv}(\omega); \quad H''_{kv}(\omega) = H_{kv}(\omega) \sin \psi_{kv}(\omega).$$

Комплексную частотную характеристику можно изобразить и в виде одной зависимости — годографа КЧХ, построенного на комплексной плоскости. Годограф КЧХ представляет собой геометрическое место концов вектора  $H_{kv}(j\omega)$ , соответствующих изменению частоты

ты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  (рис. 3.2). На годографе указывают точки, соответствующие некоторым значениям частоты  $\omega$ , и стрелкой показывают направление перемещения конца вектора  $H_{kv}(j\omega)$  при увеличении частоты. Как видно из рисунка, годограф КЧХ позволяет одновременно судить как об АЧХ и ФЧХ, так и о зависимости вещественной  $H'_{kv}(\omega)$  и мнимой  $H''_{kv}(\omega)$  составляющих КЧХ от частоты. Годограф КЧХ иногда называют амплитудно-фазовой характеристикой цепи.

Комплексные частотные характеристики цепи делятся на входные и передаточные. Когда отклик и внешнее воздействие рассматриваются на одних и тех же зажимах цепи (см. рис. 3.1, а), КЧХ называется входной. Если отклик и внешнее воздействие задаются на разных зажимах цепи (см. рис. 3.1, б), КЧХ называется передаточной. Различают два вида входных и четыре вида передаточных характеристик.

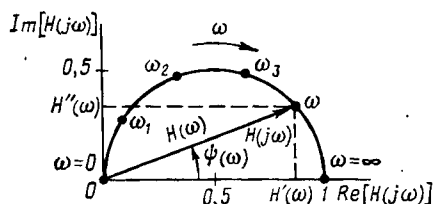


Рис. 3.2. Годограф комплексной частотной характеристики цепи

Если внешнее воздействие на цепь является током  $x_v(t) = i_v(t) \doteq \dot{I}_v$ , а реакция — напряжением  $y_v(t) = u_v(t) \doteq \dot{U}_v$ , то

КЧХ цепи представляет собой комплексное входное сопротивление цепи относительно зажимов  $v - v'$ :

$$H_{vv}(j\omega) = Z_{vv}(j\omega) = \dot{U}_v / \dot{I}_v.$$

К входным характеристикам цепи относится также комплексная входная проводимость

$$Y_{vv}(j\omega) = \dot{I}_v / \dot{U}_v,$$

при этом внешнее воздействие — напряжение  $u_v(t) \doteq U_v$ , а реакция — ток  $i_v(t) \doteq I_v$ .

К передаточным характеристикам цепи относятся: комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$K_{kv}(j\omega) = \dot{U}_k / \dot{U}_v,$$

комплексный коэффициент передачи по току

$$G_{kv}(j\omega) = \dot{I}_k / \dot{I}_v,$$

комплексное передаточное сопротивление

$$Z_{kv}(j\omega) = \dot{U}_k / \dot{I}_v$$

и комплексная передаточная проводимость

$$Y_{kv}(j\omega) = \dot{I}_k / \dot{U}_v.$$

Очевидно, что комплексное входное сопротивление  $Z_{vv}(j\omega)$  и комплексное передаточное сопротивление  $Z_{kv}(j\omega)$  имеют размерность сопротивления, комплексная входная проводимость  $Y_{vv}(j\omega)$  и комплексная передаточная проводимость  $Y_{kv}(j\omega)$  — размерность про-

димости. Комплексные коэффициенты передачи по току  $G_{kv}(j\omega)$  и напряжению  $K_{kv}(j\omega)$  являются безразмерными величинами.

В дальнейшем будет показано, что КЧХ линейных цепей не зависят от амплитуды и начальной фазы внешнего воздействия, а определяются структурой цепи и параметрами входящих в нее элементов. Знание КЧХ позволяет определить реакцию цепи  $y_k(t) \doteq \dot{Y}_k$  на заданное гармоническое воздействие  $x_v(t) \doteq \dot{X}_v$ :

$$\dot{Y}_k = H_{kv}(j\omega) \dot{X}_v.$$

В общем случае каждая линейная цепь характеризуется большим числом комплексных частотных характеристик, так как любая из рассмотренных разновидностей КЧХ может быть определена для различных сочетаний пар входных и выходных зажимов и при различных значениях сопротивлений нагрузки.

### Комплексные частотные характеристики идеализированных двухполюсных пассивных элементов

Идеализированные двухполюсные пассивные элементы обладают только входными КЧХ. В связи с этим у них имеется только одна пара внешних выводов, нумеровать выводы в обозначениях КЧХ не будем.

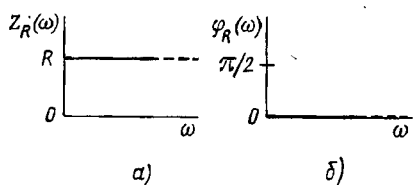


Рис. 3.3. АЧХ (а) и ФЧХ (б) сопротивления

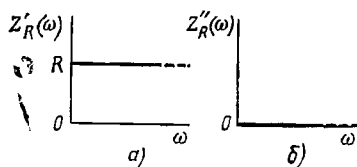


Рис. 3.4. Зависимости от частоты вещественной (а) и мнимой (б) составляющих  $Z_R(j\omega)$

**С о п р о т и в л е н и е.** Комплексное входное сопротивление этого элемента определяется выражением

$$Z_R(j\omega) = \underline{Z}_R = R.$$

Модуль комплексного входного сопротивления  $Z_R(\omega)$  и его аргумент  $\varphi_R(\omega)$  не зависят от частоты:

$$Z_R(\omega) = R; \varphi_R(\omega) = 0,$$

в связи с чем АЧХ и ФЧХ комплексного входного сопротивления имеют вид прямых линий с постоянной ординатой (рис. 3.3, а, б). Зависимости от частоты вещественной и мнимой составляющих комплексного входного сопротивления

$$Z'_R(\omega) = R; Z''_R(\omega) = 0$$

представлены на рис. 3.4. Поскольку  $Z_R(j\omega)$  не зависит от частоты, годограф входного сопротивления вырождается в точку на комплексной плоскости (рис. 3.5).

**Индуктивность.** Из выражения для комплексного входного сопротивления индуктивности  $Z_L(j\omega) = \underline{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2}$  можно найти модуль комплексного входного сопротивления  $Z_L(\omega) = \omega L$ , его аргумент  $\varphi_L(\omega) = \pi/2$ , а также вещественную  $Z'_L(\omega) = 0$  и мнимую  $Z''_L(\omega) = \omega L$  составляющие (рис. 3.6).

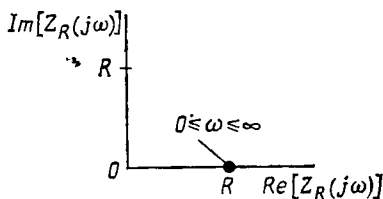


Рис. 3.5. Годограф  $Z_R(j\omega)$

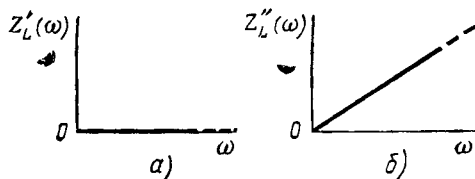


Рис. 3.6. Зависимости от частоты вещественной (а) и мнимой (б) составляющих  $Z_L(j\omega)$

Из амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик входного сопротивления индуктивности (рис. 3.7) видно, что модуль входного сопротивления индуктивности линейно возрастает с ростом частоты, а аргумент равен  $\pi/2$  и не зависит от частоты. Так как комплексное

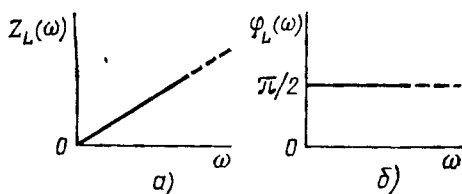


Рис. 3.7. АЧХ (а) и ФЧХ (б) комплексного сопротивления индуктивности

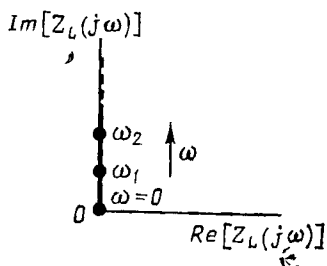


Рис. 3.8. Годограф  $Z_L(j\omega)$

входное сопротивление индуктивности является чисто мнимой величиной, то при изменении частоты конец вектора  $Z_L(j\omega)$  перемещается вдоль мнимой оси (рис. 3.8).

**Емкость.** Комплексное входное сопротивление емкости, как известно, определяется выражением

$$Z_C(j\omega) = \underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j \frac{\pi}{2}}$$

Отсюда можно определить модуль  $Z_C(\omega) = 1/(\omega C)$  и аргумент  $\varphi_C(\omega) = -\pi/2$  комплексного входного сопротивления емкости, а также его вещественную  $Z'_C(\omega) = 0$  и мнимую  $Z''_C(\omega) = -1/(\omega C)$  составляющие.



Как видно из рис. 3.9, с увеличением частоты модуль входного сопротивления уменьшается и равен нулю при  $\omega = \infty$ . Аргумент комплексного входного сопротивления емкости равен  $-\pi/2$  и от частоты не зависит. Зависимости  $Z_c'(\omega)$  и  $Z_c''(\omega)$  от частоты приведены на рис. 3.10, годограф  $Z_c(j\omega)$  изображен на рис. 3.11.

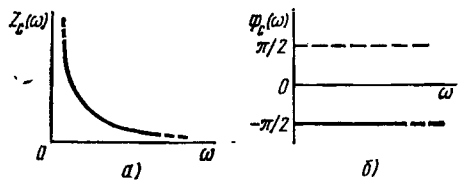


Рис. 3.9. АЧХ (а) и ФЧХ (б) комплексного сопротивления емкости

Аналогичным образом можно построить и частотные характеристики комплексной входной проводимости идеализированных пассивных элементов, причем в связи с тем, что емкость и индуктивность являются дуальными элементами, КЧХ входной проводимости индуктивности

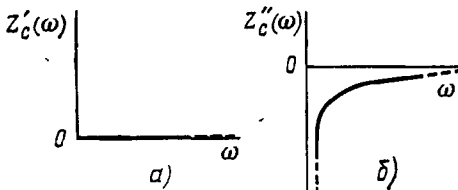


Рис. 3.10. Зависимости от частоты вещественной (а) и мнимой (б) составляющих  $Z_c(j\omega)$

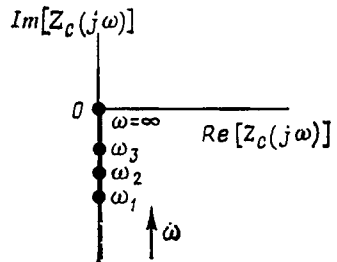


Рис. 3.11. Годограф  $Z_c(j\omega)$

имеют такой же вид, что и КЧХ входного сопротивления емкости (см. рис. 3.9 — 3.11), а КЧХ входной проводимости емкости — такой же вид, как и КЧХ входного сопротивления индуктивности (см. рис. 3.6 — 3.8).

### Комплексные частотные характеристики цепей с одним энергоемким элементом

Рассмотрим комплексные частотные характеристики простейших цепей (рис. 3.12, а, б), являющихся двусторонними и поэтому обладающими как входными, так и передаточными характеристиками. Обоб-

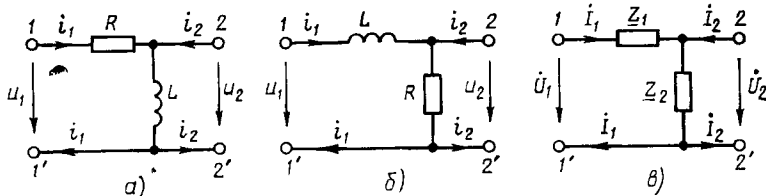


Рис. 3.12. Простейшие двусторонние  $RL$ -цепи (а, б) и их обобщенная комплексная схема замещения (в)

щенная комплексная схема замещения этих цепей приведена на рис. 3.12, в.

Комплексное входное сопротивление цепей со стороны зажимов  $1-1'$  ( $2-2'$ ) зависит от сопротивления нагрузки, подключенного к зажимам  $2-2'$  ( $1-1'$ ). Наиболее интересны случаи, когда сопротивление нагрузки равно нулю (режим короткого замыкания) или когда сопротивление нагрузки бесконечно велико (режим холостого хода).

При холостом ходе на зажимах  $2-2'$  ( $\dot{I}_2 = 0$ ) входное сопротивление цепей со стороны зажимов  $1-1'$

$$Z_{11x}(j\omega) = [Z_{11}(j\omega)]_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2, \quad (3.7)$$

при коротком замыкании ( $\dot{U}_2 = 0$ )

$$Z_{11k}(j\omega) = [Z_{11}(j\omega)]_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \Big|_{\dot{U}_2=0} = \underline{Z}_1. \quad (3.8)$$

При холостом ходе со стороны зажимов  $1-1'$  ( $\dot{I}_1 = 0$ ) входное сопротивление со стороны зажимов  $2-2'$

$$Z_{22x}(j\omega) = [Z_{22}(j\omega)]_{\dot{I}_1=0} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{I}_1=0} = \underline{Z}_2,$$

при коротком замыкании ( $\dot{U}_1 = 0$ )

$$Z_{22k}(j\omega) = [Z_{22}(j\omega)]_{\dot{U}_1=0} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \Big|_{\dot{U}_1=0} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению от зажимов  $1-1'$  к зажимам  $2-2'$  зависит от сопротивления нагрузки со стороны зажимов  $2-2'$ . В режиме холостого хода на зажимах  $2-2'$  через сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  протекает один и тот же ток

$$\dot{I}_1|_{\dot{I}_2=0} = \dot{U}_1 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2).$$

Напряжение, приложенное к зажимам  $1-1'$ , распределяется между сопротивлениями  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  пропорционально значениям  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ ; напряжение на зажимах  $2-2'$  при этом

$$\dot{U}_2|_{\dot{I}_2=0} = \underline{Z}_2 \dot{I}_1|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \dot{U}_1. \quad (3.9)$$

Цепи такого типа получили название делителей напряжения. Используя выражение (3.9), найдем коэффициент передачи цепей по напряжению от зажимов  $1-1'$  к зажимам  $2-2'$  в режиме холостого хода ( $\dot{I}_2 = 0$ ):

$$K_{21v}(j\omega) = [K_{21}(j\omega)]_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\dot{I}_2=0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}. \quad (3.10)$$

В режиме холостого хода на зажимах  $1 - 1'$  коэффициент передачи рассматриваемых цепей по напряжению от зажимов  $2 - 2'$  к зажимам  $1 - 1'$

$$K_{12x}(j\omega) = [K_{12}(j\omega)]_{I_1=0} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{I_1=0} = 1 \quad (3.11)$$

и не зависит от частоты внешнего воздействия. Подставляя в полученные выражения значения сопротивлений плеч делителя  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$ , можно построить АЧХ и ФЧХ рассматриваемых цепей.

Определим в качестве примера комплексное входное сопротивление со стороны зажимов  $1 - 1'$  и комплексный коэффициент передачи от зажимов  $1 - 1'$  к зажимам  $2 - 2'$  в режиме холостого хода на выходе цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а. Подставляя в выражение (3.7)  $\underline{Z}_1 = R$ ,  $\underline{Z}_2 = j\omega L$  и выполняя преобразования

$$Z_{11x}(j\omega) = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg(\omega L/R)}, \quad (3.12)$$

найдем аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ входного сопротивления:

$$Z_{11x}(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi_{11x}(\omega) = \arctg(\omega L/R). \quad (3.13)$$

Непосредственное использование выражений (3.13) для построения АЧХ и ФЧХ весьма неудобно, так как для каждой пары значений параметров  $R$  и  $L$  необходимо строить отдельную кривую. Построение существенно упрощается при замене абсолютных значений частоты  $\omega$ , комплексного сопротивления  $Z_{11x}(j\omega)$  и полного сопротивления  $Z_{11x}(\omega)$  относительными (н о р м и р о в а н н ы м и ) значениями

$$\bar{\omega} = \omega L/R; \quad \bar{Z}_{11x}(j\bar{\omega}) = Z_{11x}(j\bar{\omega})/R; \quad \bar{Z}_{11x}(\bar{\omega}) = Z_{11x}(\bar{\omega})/R. \quad (3.14)$$

Из выражений (3.14) видно, что нормированная частота  $\bar{\omega}$ , нормированное комплексное сопротивление  $\bar{Z}_{11x}(j\bar{\omega})$  и нормированное полное сопротивление  $\bar{Z}_{11x}(\bar{\omega})$  являются безразмерными величинами. С учетом (3.14) найдем выражения для нормированных АЧХ и ФЧХ входного сопротивления рассматриваемой цепи (рис. 3.13):

$$\bar{Z}_{11x}(\bar{\omega}) = \sqrt{1 + \bar{\omega}^2}; \quad \varphi_{11x}(\bar{\omega}) = \arctg \bar{\omega}. \quad (3.15)$$

Годограф нормированного комплексного сопротивления этой цепи изображен на рис. 3.14.

Аналогичный вид имеют нормированные частотные характеристики входного сопротивления цепи, схема которой изображена на рис. 3.12, б.

Анализ полученных результатов показывает, что в области сравнительно низких частот, когда полное сопротивление индуктивности мало по сравнению с  $R$  ( $\omega L \ll R$  или  $\bar{\omega} \ll 1$ ), входные сопротивления цепей (см. рис. 3.12, а, б) определяются только значением  $R$ . Сопротивление индуктивности постоянному току равно нулю, поэтому на нулевой частоте входное сопротивление цепей имеет чисто резистивный характер

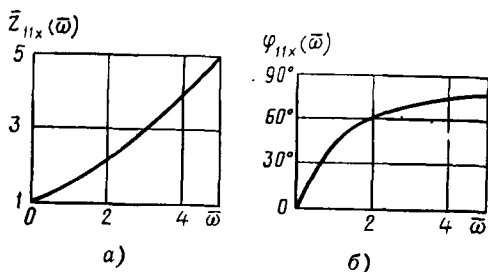


Рис. 3.13. Нормированные АЧХ (а) и ФЧХ (б) входного сопротивления цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а

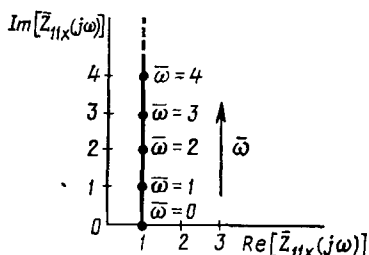


Рис. 3.14. Годограф  $Z_{11x}(j\omega)$

$[Z_{11x}(\omega) = R, \varphi_{11x}(\omega) = 0]$ . С ростом частоты модуль и аргумент входного сопротивления плавно увеличиваются, причем на достаточно высоких частотах  $\omega \gg 1$ , входное сопротивление цепи определяется только сопротивлением индуктивности  $[Z_{11x}(\omega = \infty) = \omega L = \infty, \varphi_{11x}(\omega = \infty) = \pi/2]$ .

Рассмотрим частотные характеристики коэффициента передачи по напряжению  $K_{21x}(j\omega)$  цепи, схема которой изображена на рис. 3.12, а. Подставляя в (3.10)  $Z_1 = R$  и  $Z_2 = j\omega L$ , получаем

$$K_{21x}(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - jR/(\omega L)}. \quad (3.16)$$

Переходя в (3.16) к показательной форме записи, находим аналитические выражения для АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи цепи по напряжению (рис. 3.15):

$$K_{21x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + [R/(\omega L)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^{-2}}};$$

$$\psi_{21x}(\omega) = \arctg [R/(\omega L)] = \arctg \bar{\omega}. \quad (3.17)$$

Годограф комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению изображен на рис. 3.16.

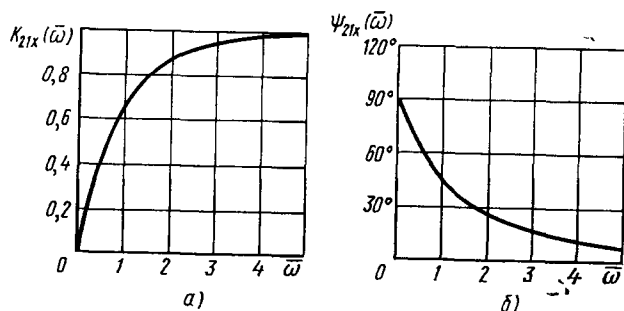


Рис. 3.15. АЧХ (а) и ФЧХ (б) коэффициента передачи по напряжению цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а

На сравнительно низких частотах ( $\bar{\omega} \ll 1$ ), когда полное сопротивление индуктивности существенно меньше  $R$ , входное сопротивление цепи имеет характер, близкий к чисто резистивному, а входной ток цепи  $\dot{I}_1$  совпадает по фазе с напряжением  $\dot{U}_1$ . Распределение напряжения между плечами делителя напряжения пропорционально сопротивлению этих плеч, поэтому падение напряжения на индуктивности  $\dot{U}_2$  весьма мало, т. е. модуль коэффициента передачи по напряжению близок к нулю. Напряжение на индуктивности  $\dot{U}_2$  опережает по фазе ток индуктивности  $\dot{I}_1$ , а следовательно, и входное напряжение  $\dot{U}_1$  на угол, близкий к  $\pi/2$ . С ростом частоты сопротивление индуктивности увеличивается и вследствие этого распределение напряжений между плечами делителя изменяется. На достаточно высоких частотах ( $\bar{\omega} \gg 1$ ) практически все входное напряжение оказывается приложенным к индуктивности, поэтому модуль коэффициента передачи по напряжению  $K_{21x}(\omega)$  в этом случае близок к единице, а аргумент  $\psi_{21x}(\omega)$  — к нулю.

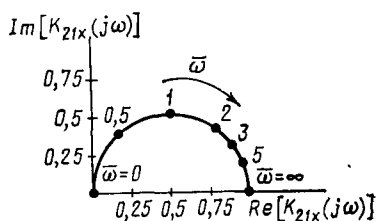


Рис. 3.16. Годограф  $K_{21x}(j\omega)$

### Понятие о резонансе в электрических цепях

Амплитудно-частотные характеристики пассивных линейных цепей с одним реактивным элементом имеют вид монотонно изменяющихся кривых, поэтому амплитуда отклика таких цепей также монотонно изменяется при увеличении или уменьшении частоты внешнего воздействия. Более сложный характер имеют процессы в электрических цепях, содержащих реактивные элементы различных типов. Амплитуда отклика таких цепей может резко изменяться, когда частота внешнего воздействия достигает некоторых определенных значений. Явление резкого возрастания амплитуды отклика цепи при приближении частоты внешнего воздействия к определенному значению называется **р е з о н а н с о м**. Такое определение резонанса заимствовано из механики и справедливо только для цепей с малыми потерями. Резонанс, отвечающий этому определению, условно называется **а м п л и т у д н ы м**.

В теории цепей обычно используют другое определение резонанса, которое применяется как для цепей с малыми, так и для цепей с большими потерями. Под **р е з о н а н с о м** понимают такой режим работы электрической цепи, содержащей емкости и индуктивности, при котором реактивные составляющие входных сопротивления и проводимости цепи равны нулю. Резонанс, отвечающий данному определению, условно называется **ф а з о в ы м**. Можно показать, что резонансные частоты, соответствующие амплитудному и фазовому резонансам, совпадают только в идеализированном случае, когда потери в цепи равны

нулю. В дальнейшем под термином резонанс будем понимать только фазовый резонанс, а под резонансной частотой—только частоту внешнего воздействия, соответствующую фазовому резонансу. Как следует из определения резонанса, на резонансной частоте входные сопротивление и проводимость электрической цепи имеют чисто резистивный характер, а входной ток цепи совпадает по фазе с приложенным напряжением.

Простейшей электрической цепью, в которой наблюдается явление резонанса, является одиночный колебательный контур, представляющий собой замкнутую цепь, состоящую из конденсатора и индуктивной катушки. В зависимости от способа подключения источника энергии, различают «последовательный» колебательный контур (источник энергии включен последовательно с конденсатором и индуктивной катушкой) и «параллельный» колебательный контур (источник энергии подключен параллельно реактивным элементам). Ранее, при изучении последовательной  $RLC$ -цепи, было установлено, что ее входное сопротивление может иметь чисто резистивный характер, когда мнимая составляющая входного сопротивления емкости по абсолютному значению равна мнимой составляющей входного сопротивления индуктивности ( $x_L = |x_C|$ ). В этом случае напряжение на емкости равно по амплитуде и противоположно по фазе напряжению на индуктивности ( $\dot{U}_C = -\dot{U}_L$ ), а напряжение на входе цепи  $\dot{U}$  равно напряжению на сопротивлении  $\dot{U}_R$  и совпадает по фазе с входным током  $\dot{I}$  (см. рис. 2.21, в). Такая разновидность резонанса получила название резонанса напряжений.

В параллельной  $RLC$ -цепи входная проводимость может иметь чисто резистивный характер, когда мнимые составляющие входных проводимостей емкости и индуктивности равны по абсолютному значению ( $b_C = |b_L|$ ). В этом случае ток индуктивности равен по амплитуде и противоположен по фазе току емкости ( $\dot{I}_L = -\dot{I}_C$ ), а входной ток цепи  $\dot{I}$  равен току через сопротивление  $\dot{I}_R$  и совпадает по фазе с входным напряжением  $\dot{U}$  (см. рис. 2.23, в). Такая разновидность резонанса называется резонансом токов.

## § 3.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

### Параметры элементов контура и их схемы замещения. Эквивалентная схема последовательного колебательного контура

Последовательный колебательный контур представляет собой электрическую цепь, содержащую индуктивную катушку и конденсатор, включенные последовательно с источником энергии (рис. 3.17, а). Для анализа процессов, протекающих в контуре, необходимо перейти от его принципиальной схемы к эквивалентной путем замены каждого реального элемента его эквивалентной схемой.

Воспользуемся простейшими последовательной и параллельной схемами замещения индуктивной катушки (см. рис. 2.38, в и 2.39, в) и

конденсатора (см. рис. 2.38, б и 2.39, б), содержащими наряду с индуктивностью  $L_{\text{пос}}$ ,  $L_{\text{пар}}$  или емкостью  $C_{\text{пос}}$ ,  $C_{\text{пар}}$  только сопротивления  $R_{L\text{пос}}$  и  $R_{C\text{пос}}$  или  $R_{L\text{пар}}$  и  $R_{C\text{пар}}$ , учитывающие все виды потерь в индуктивной катушке и конденсаторе соответственно. Соотношения между параметрами элементов таких схем приведены в табл. 2.1.

Рассмотрим векторные диаграммы, иллюстрирующие фазовые соотношения между токами и напряжениями последовательных  $RL$ - и  $RC$ -цепей, моделирующих индуктивную катушку и конденсатор (см. рис. 2.18, г, д; 2.19, г, д). Из диаграмм видно, что вследствие потерь

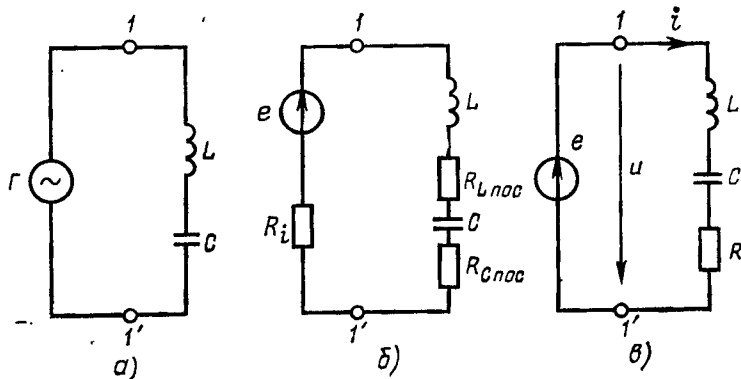


Рис. 3.17. Схемы последовательного колебательного контура: а — принципиальная; б — эквивалентная; в — упрощенная эквивалентная

сдвиг фаз между током и напряжением на зажимах индуктивной катушки и конденсатора меньше  $\pi/2$ . Очевидно, что чем ближе к  $\pi/2$  будет сдвиг фаз  $|\varphi|$  между током и напряжением, тем ближе будут свойства этих реальных элементов к свойствам индуктивности и емкости. Количественно степень приближения свойств реальных элементов к свойствам идеализированных элементов оценивается их добротностью, которая определяется как модуль тангенса сдвига фаз между током и напряжением на зажимах соответствующего элемента:

$$Q = |\operatorname{tg}\varphi| = \operatorname{tg}|\varphi|.$$

Из рис. 2.18, г и 2.19, г видно, что добротность индуктивной катушки

$$Q_L = x_L/R_{L\text{пос}} = \omega L_{\text{пос}}/R_{L\text{пос}}, \quad (3.18)$$

а добротность конденсатора

$$Q_C = |x_C|/R_{C\text{пос}} = 1/(\omega R_{C\text{пос}} C_{\text{пос}}). \quad (3.19)$$

Обычно в колебательных контурах радиотехнических устройств стремятся использовать элементы с высокой добротностью, причем добротность индуктивных катушек лежит в пределах от нескольких десятков до нескольких сотен, а добротность конденсаторов — от нескольких сотен до нескольких тысяч. Таким образом, между параметрами

рами рассматриваемых элементов последовательных схем замещения выполняются соотношения

$$\omega L_{\text{пос}}/R_{L \text{ пос}} \gg 1; \quad \omega C_{\text{пос}} R_{C \text{ пос}} \ll 1. \quad (3.20)$$

Экспериментально установлено, что  $L_{\text{пос}}$  и  $R_{L \text{ пос}}$  в достаточно широком диапазоне частот можно приближенно считать независимыми от частоты.

В соответствии с формулами, приведенными в табл. 2.1, параметры параллельной схемы замещения индуктивной катушки могут быть выражены через параметры элементов последовательной схемы замещения:

$$L_{\text{пар}} = L_{\text{пос}} \left[ 1 + \left( \frac{R_{L \text{ пос}}}{\omega L_{\text{пос}}} \right)^2 \right]; \quad R_{L \text{ пар}} = R_{L \text{ пос}} \left[ 1 + \left( \frac{\omega L_{\text{пос}}}{R_{L \text{ пос}}} \right)^2 \right].$$

С учетом соотношений (3.20) эти выражения можно упростить:

$$L_{\text{пар}} \approx L_{\text{пос}} = L; \quad R_{L \text{ пар}} \approx \omega^2 L^2 / R_{L \text{ пос}}. \quad (3.21)$$

Таким образом, у индуктивных катушек с высокой добротностью значения индуктивностей параллельной и последовательной схем замещения приблизительно одинаковы и могут считаться не зависящими от частоты; значение сопротивления в параллельной схеме замещения обратно пропорционально значению сопротивления последовательной схемы замещения и сильно зависит от частоты.

Аналогичным образом найдем соотношения между параметрами элементов параллельной и последовательной схем замещения конденсатора:

$$C_{\text{пар}} = C_{\text{пос}} / [1 + (\omega C_{\text{пос}} R_{C \text{ пос}})^2] \approx C_{\text{пос}} = C; \quad (3.22)$$

$$R_{C \text{ пар}} = R_{C \text{ пос}} [1 + 1/(\omega C_{\text{пос}} R_{C \text{ пос}})^2] \approx 1/(\omega^2 C^2 R_{C \text{ пос}}).$$

Экспериментально установлено, что параметры  $R_{C \text{ пар}}$  и  $C_{\text{пар}}$  можно приближенно считать не зависящими от частоты. Из соотношений (3.22) следует, что у конденсаторов с высокой добротностью значения емкостей в последовательной и параллельной схемах замещения приблизительно одинаковы и могут считаться не зависящими от частоты; сопротивление  $R_{C \text{ пос}}$  обратно пропорционально сопротивлению  $R_{C \text{ пар}}$ :

$$R_{C \text{ пос}} \approx 1/(\omega^2 C^2 R_{C \text{ пар}}) \quad (3.23)$$

и зависит от частоты.

Между параметрами сопротивлений потерь индуктивной катушки  $R_L$  и конденсатора  $R_C$ , как правило, выполняются соотношения

$$R_{L \text{ пос}} \gg R_{C \text{ пос}}; \quad R_{L \text{ пар}} \ll R_{C \text{ пар}}. \quad (3.24)$$

Для анализа процессов в последовательном колебательном контуре удобно воспользоваться последовательными схемами замещения индуктивной катушки, конденсатора и источника энергии. Представляя каждый из этих элементов его последовательной схемой замещения, получим эквивалентную схему последовательного колебательного контура (рис. 3.17, б). Эта схема может быть несколько упрощена, если



пренебречь внутренним сопротивлением источника (далее будет рассмотрено влияние внутреннего сопротивления источника на характеристики контура) и заменить сопротивления потерь конденсатора  $R_{C\text{пос}}$  и индуктивной катушки  $R_{L\text{пос}}$  сопротивлением

$$R = R_{L\text{пос}} + R_{C\text{пос}} \approx R_{L\text{пос}}, \quad (3.25)$$

которое считается практически не зависящим от частоты (рис. 3.17, в).

Итак, с учетом принятых допущений исследование процессов в последовательном колебательном контуре сводится к исследованию последовательной  $RLC$ -цепи, к зажимам которой подключен идеальный источник напряжения. Ток, отдаваемый этим источником, назовем  $I$  —  $I'$ , — напряжением контура. Под входным сопротивлением контура будем понимать входное сопротивление последовательной  $RLC$ -цепи относительно зажимов  $I$  —  $I'$ , определяемое выражением (2.96).

### Резонансная частота, характеристическое сопротивление и добротность контура

По определению, мнимая составляющая входного сопротивления последовательного колебательного контура

$$\text{Im} \{ Z \} = \text{Im} \{ R + j[\omega L - 1/(\omega C)] \} = \omega L - 1/(\omega C) = x_L + x_C \quad (3.26)$$

должна быть равна нулю, когда угловая частота внешнего воздействия  $\omega$  равна резонансной частоте контура  $\omega_0$ . Полагая в выражении (3.26)  $\omega = \omega_0$ , получаем уравнение для определения резонансной частоты последовательного колебательного контура:

$$\text{Im} \{ Z \}_{\omega=\omega_0} = [x_L + x_C]_{\omega=\omega_0} = \omega_0 L - 1/(\omega_0 C) = 0, \quad (3.27)$$

откуда

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}; \quad f_0 = \omega_0/(2\pi) = 1/(2\pi\sqrt{LC}). \quad (3.28)$$

На резонансной частоте полное сопротивление емкости

$$z_C |_{\omega=\omega_0} = |x_C |_{\omega=\omega_0} = 1/(\omega_0 C) = \rho \quad (3.29)$$

равно полному сопротивлению индуктивности

$$z_L |_{\omega=\omega_0} = |x_L |_{\omega=\omega_0} = \omega_0 L = \rho. \quad (3.30)$$

Величина  $\rho$ , равная полному сопротивлению емкости или индуктивности контура на резонансной частоте, получила название характеристического сопротивления контура. Подставляя в (3.29) и (3.30) выражение для резонансной частоты контура, убеждаемся, что значение  $\rho$  не зависит от частоты и определяется только параметрами реактивных элементов контура:

$$\rho = \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) = \sqrt{L/C}. \quad (3.31)$$

На резонансной частоте входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и равно сопротивлению потерь контура

$$Z|_{\omega=\omega_0} = R.$$

Действующее значение тока контура на резонансной частоте

$$I = U/R, \quad (3.32)$$

где  $U$  — действующее значение напряжения на контуре. Действующие значения напряжений на реактивных элементах контура на резонансной частоте определяются произведением характеристического сопротивления на действующее значение тока:

$$U_C|_{\omega=\omega_0} = U_L|_{\omega=\omega_0} = \rho I.$$

Отношение действующего значения напряжения на реактивном элементе контура к действующему значению напряжения на контуре на резонансной частоте называется добротностью контура

$$Q = U_L/U|_{\omega=\omega_0} = U_C/U|_{\omega=\omega_0} = \rho/R. \quad (3.33)$$

Ис пользуя выражение (3.31), добротность колебательного контура  $Q$  можно выразить через параметры его элементов

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.34)$$

Как правило, добротность колебательных контуров современной радиотехнической аппаратуры лежит в пределах от нескольких десятков до нескольких сотен, поэтому в режиме резонанса напряжение на реактивных элементах контура может во много раз превышать приложенное к контуру напряжение. Как следует из выражения (3.34), при неизменной резонансной частоте  $\omega_0$  добротность контура растет с увеличением характеристического сопротивления контура и с уменьшением сопротивления потерь.

Добротность колебательного контура может быть выражена через добротности его элементов. Действительно, рассматривая величину

$$1/Q = R/\rho$$

и учитывая, что сопротивление потерь контура равно сумме сопротивлений потерь индуктивной катушки и конденсатора в последовательных схемах замещения, находим

$$1/Q = R_{\text{Л.Пос}}/(\omega_0 L) + \omega_0 C R_{\text{С.Пос}}. \quad (3.35)$$

Сравнивая полученное выражение с соотношениями (3.18), (3.19), устанавливаем, что величины  $\omega_0 L/R_{\text{Л.Пос}}$  и  $1/(\omega_0 C R_{\text{С.Пос}})$  равны добротностям индуктивной катушки и конденсатора на резонансной частоте:

$$Q_{L0} = \omega_0 L/R_{\text{Л.Пос}}; \quad Q_{C0} = 1/(\omega_0 C R_{\text{С.Пос}}). \quad (3.36)$$

Подставляя (3.36) в (3.35), получаем простое выражение, связывающее добротность контура с добротностями элементов контура на резонансной частоте:

$$1/Q = 1/Q_{L0} + 1/Q_{C0}. \quad (3.37)$$

Анализ выражения (3.37) показывает, что добротность контура не может превышать добротности его элементов на резонансной частоте. Как правило,  $Q_{C0} \gg Q_{L0}$ , поэтому добротность контура в основном определяется добротностью индуктивной катушки на резонансной частоте. Величина  $d$ , обратная добротности контура, называется его затуханием.

### Энергетические процессы в последовательном колебательном контуре

Пусть последовательный колебательный контур настроен на частоту источника энергии, т. е. параметры реактивных элементов контура выбраны таким образом, что резонансная частота  $\omega_0$  совпадает с частотой внешнего воздействия  $\omega$ . Определим мгновенные значения энергии, запасаемой реактивными элементами контура, и энергию, потребляемую им от источника.

Как было установлено ранее, на резонансной частоте напряжение и ток контура совпадают по фазе (рис. 3.18, а):  $u = \sqrt{2} U \cos(\omega_0 t + \psi)$ ;  $i = \sqrt{2} I \cos(\omega_0 t + \psi)$ , а их действующие значения связаны между собой соотношением (3.32). Мгновенное значение энергии, запасаемой в индуктивности, определяется током индуктивности

$$i_L = i = \sqrt{2} I \cos(\omega_0 t + \psi), \quad (3.38)$$

а мгновенное значение энергии, запасаемой в емкости, — напряжением на емкости (рис. 3.18, б)

$$\begin{aligned} u_C &= \sqrt{2} I \frac{1}{\omega_0 C} \cos\left(\omega_0 t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \sqrt{2} I \rho \sin(\omega_0 t + \psi). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Подставляя (3.38), (3.39) в выражения (1.25) и (1.18), получаем

$$\omega_L = Li_L^2/2 = LI^2 \cos^2(\omega_0 t + \psi) = LI^2 [1 + \cos 2(\omega_0 t + \psi)]/2; \quad (3.40)$$

$$\omega_C = Cu_C^2/2 = CI^2 \rho^2 \sin^2(\omega_0 t + \psi) = LI^2 [1 - \cos 2(\omega_0 t + \psi)]/2.$$

Зависимости мгновенных значений энергии, запасаемой в реактивных элементах контура, от времени приведены на рис. 3.18, в. Как видно из временных диаграмм и выражений (3.40), энергия, запасаемая в емкости и индуктивности, имеет две составляющие: постоянную  $LI^2/2$

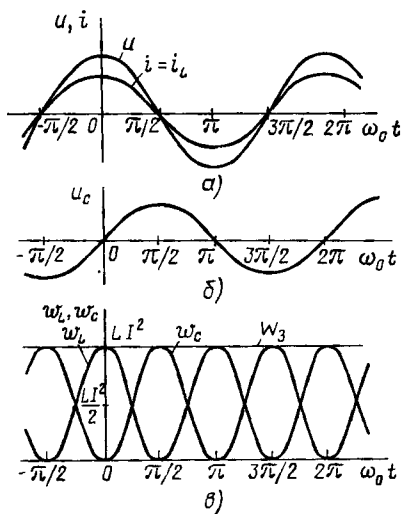


Рис 3.18. Временные диаграммы последовательного колебательного контура:

а — тока и напряжения на входе; б — напряжения на емкости; в — энергии, запасенной в реактивных элементах

и переменную, изменяющуюся во времени по гармоническому закону с частотой  $2\omega_0$ . Переменные составляющие энергий емкости и индуктивности находятся в противофазе так, что максимальным значениям энергии, запасаемой в емкости, соответствуют нулевые значения энергии, запасенной в индуктивности, и наоборот. Несмотря на то что  $\omega_C$  и  $\omega_L$  являются функциями времени, *суммарная энергия, запасенная в реактивных элементах цепи, постоянна:*

$$W_{\text{зап}} = \omega_L + \omega_C = LI^2 = \text{const.} \quad (3.41)$$

Емкость и индуктивность контура при резонансе непрерывно обмениваются энергией. Обмен энергией происходит без участия источника энергии: сдвиг фаз между током и напряжением в этом режиме равен нулю, поэтому реактивная мощность, отдаваемая источником, также равна нулю, и обмена энергией между контуром и источником не происходит.

Найдем энергию, потребляемую контуром от источника за промежуток времени, равный периоду внешнего гармонического воздействия  $T$ :

$$W_{\text{п}} = \int_0^T u i dt = RI^2 T. \quad (3.42)$$

Из выражения (3.42) видно, что энергия, потребляемая контуром от источника, равна энергии, необратимо теряемой в сопротивлении потерь контура  $R$ . В идеальном случае, при отсутствии потерь в контуре ( $R=0$ ), энергия, потребляемая контуром от источника, равна нулю. Колебательный процесс в таком контуре будет продолжаться неограниченно долго и при отключении контура от источника (при закорачивании зажимов  $1-1'$ ). Таким образом, *колебательный процесс в контуре без потерь должен иметь незатухающий характер*. На практике при отключении контура от источника колебательный процесс в нем затухает, так как при каждом цикле колебаний часть электрической энергии, запасенной в контуре, необратимо преобразуется в другие виды энергии. Если контур с потерями подключить к источнику энергии, то амплитуда колебаний в установившемся режиме будет неизменной, так как потери энергии в контуре будут компенсироваться поступлением энергии от источника, и суммарная энергия, связанная с контуром, будет сохранять неизменное значение.

Найдем отношение энергии, запасаемой в реактивных элементах контура, к энергии, потребляемой контуром от источника за период  $T$ :

$$W_{\text{зап}}/W_{\text{п}} = LI^2/(RI^2T) = L/(RT).$$

Принимая во внимание, что при резонансе период внешнего гармонического воздействия

$$T = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0,$$

получаем

$$W_{\text{зап}}/W_{\text{п}} = \omega_0 L / (2\pi R) = Q / (2\pi),$$

откуда

$$Q = 2\pi W_{\text{зап}}/W_{\text{п}}. \quad (3.43)$$

Таким образом, добротность последовательного контура равна отношению энергии, запасаемой в контуре, к энергии, потребляемой им за период колебаний, умноженному на  $2\pi$ . Выражение (3.43) носит общий характер и может применяться для оценки добротности колебательных систем самых различных типов (в том числе и неэлектрических).

### Входные характеристики последовательного колебательного контура

При рассмотрении комплексных частотных характеристик последовательный колебательный контур удобно представлять в виде многополюсника с тремя парами выводов (рис. 3.19, а, б). Внешнее воздействие на контур обычно задают в виде напряжения  $u_1 \doteq \dot{U}_1$ , приложенного к зажимам 1 — 1', в качестве отклика цепи рассматривают входной ток цепи  $i_1 \doteq \dot{I}_1$ , напряжение на емкости  $u_2 \doteq \dot{U}_2$  или напряжение на индуктивности  $u_3 \doteq \dot{U}_3$ . Таким образом, последовательный колебательный контур обладает как входными, так и передаточными характе-

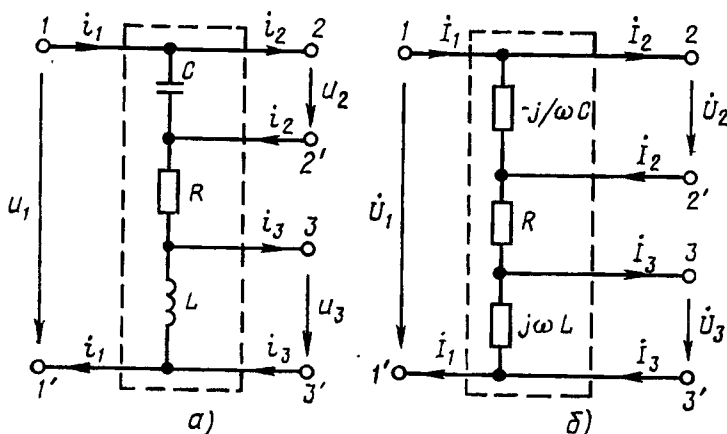


Рис. 3.19. К определению входных и передаточных характеристик последовательного колебательного контура

ристиками. В качестве входной характеристики контура будем рассматривать его комплексную входную проводимость в режиме холостого хода на зажимах 2—2' и 3—3':

$$Y(j\omega) = [Y_{11}(j\omega)]_{i_2=i_3=0} = \frac{i_1}{\dot{U}_1} \Big|_{i_2=i_3=0}, \quad (3.44)$$

в качестве передаточных — комплексный коэффициент передачи по напряжению для случаев, когда напряжение снимается с емкости:

$$K_C(j\omega) = [K_{21}(j\omega)]_{i_2=i_3=0} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{i_2=i_3=0} \quad (3.45)$$

или с индуктивности

$$K_L(j\omega) = [K_{31}(j\omega)]_{i_2=i_3=0} = \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_1} \Big|_{i_2=i_3=0} \quad (3.46)$$

Рассмотрим амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики входной проводимости  $Y(j\omega)$  последовательного колебательного контура:

$$Y(j\omega) = 1/Z = 1 / \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]. \quad (3.47)$$

Представляя  $Y(j\omega)$  в показательной форме

$$Y(j\omega) = Y(\omega) e^{j\vartheta(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{-j \arctg \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R \right]}, \quad (3.48)$$

найдем аналитические выражения для АЧХ (рис. 3.20, а) и ФЧХ (рис. 3.20, б) входной проводимости:

$$Y(\omega) = \frac{1}{R \sqrt{1 + \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R \right]^2}} = \frac{1}{R \sqrt{1 + Q^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}}, \quad (3.49)$$

$$\vartheta(\omega) = -\arctg \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R \right] = -\arctg [Q (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]. \quad (3.50)$$

Для удобства приведем также амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики входного сопротивления контура (рис. 3.21), построенные в соответствии с выражениями:

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= 1/Y(\omega) = R \sqrt{1 + Q^2 (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}; \\ \varphi(\omega) &= -\vartheta(\omega) = \arctg [Q (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Если контур настроен на частоту источника, то мнимые составляющие входного сопротивления емкости  $x_C = -1/(\omega_0 C)$  и индуктивности  $x_L = \omega_0 L$  взаимно компенсируются, входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и минимально по модулю, а полная входная проводимость  $Y(\omega)$  достигает максимального значения и равна  $1/R$ . Векторные диаграммы, соответствующие этому случаю, изображены на рис. 2.20, е. Всякое отклонение частоты внешнего воздействия от резонансной приводит к нарушению баланса между мнимыми составляющими входного сопротивления емкости и индуктивности, что в свою очередь вызывает увеличение модуля входного сопротивления  $Z(\omega)$ , уменьшение модуля входной проводимости  $Y(\omega)$  и отклонение аргумента входной проводимости  $\vartheta(\omega)$  от нулевого значения. Из рис. 3.20 видно, что чем выше добротность контура  $Q$ , тем более заметно выражен максимум  $Y(\omega)$  на резонансной частоте и более резко изменяется  $\vartheta(\omega)$  вблизи  $\omega_0$ .

При частоте внешнего воздействия  $\omega$  ниже резонансной мнимая составляющая входного сопротивления емкости по абсолютному значению превышает мнимую составляющую входного сопротивления индук-

тивности ( $|x_C| > x_L$ ) и входное сопротивление контура имеет резистивно-емкостной характер ( $-\pi/2 < \varphi < 0$ ). В пределе, при  $\omega = 0$ , входное сопротивление контура будет иметь чисто емкостной характер ( $\varphi = -\pi/2$ ), полное сопротивление контура  $Z(\omega)$  бесконечно велико, а модуль входной проводимости  $Y(\omega)$  равен нулю. Векторные диаграммы для  $\omega < \omega_0$  и  $|x_C| > x_L$  приведены на рис. 2.20, з.

На частоте выше резонансной ( $\omega > \omega_0$ ) мнимая составляющая входного сопротивления емкости по абсолютному значению меньше, чем мнимая составляющая входного сопротивления индуктивности ( $|x_C| < x_L$ ), входное сопротивление контура имеет резистивно-индуктив-

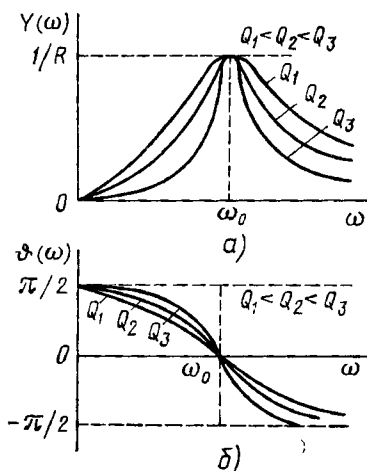


Рис. 3.20. АЧХ (а) и ФЧХ (б) входной проводимости последовательного колебательного контура

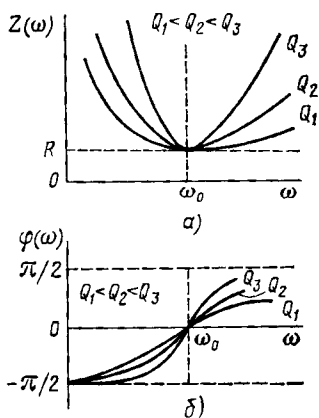


Рис. 3.21. АЧХ (а) и ФЧХ (б) входного сопротивления последовательного колебательного контура

ный характер ( $0 < \varphi < \pi/2$ ). С увеличением частоты аргумент входного сопротивления контура  $\varphi(\omega)$  будет стремиться к  $\pi/2$  (аргумент входной проводимости  $\vartheta(\omega)$  будет стремиться к  $-\pi/2$ ), модуль входного сопротивления контура  $Z(\omega)$  неограниченно возрастать, а модуль входной проводимости  $Y(\omega)$  — стремиться к нулю.

Комплексные частотные характеристики входной проводимости  $Y(j\omega)$ , приведенные на рис. 3.20, имеют чисто качественный характер и неудобны для практического использования, так как содержат большое число параметров, причем для каждого сочетания  $R$ ,  $Q$  и  $\omega_0$  необходимо строить отдельные кривые. Поэтому на практике обычно применяют нормированные входные характеристики, которые позволяют в обобщенной форме построить кривые для всех возможных сочетаний значений параметров. В качестве аргумента нормированных характеристик удобно использовать так называемую обобщенную частоту  $\xi$ , которая определяется выражением

$$\xi = x/r = \frac{\omega L \cdot 1/(\omega C)}{R} = Q \left[ \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]. \quad (3.52)$$

На резонансной частоте  $\xi = 0$ , на частотах ниже резонансной  $\xi < 0$ , причем нулевому значению  $\omega$  соответствует  $\xi = -\infty$ . На частотах выше резонансной  $\xi > 0$ , а при  $\omega = \infty$  значение обобщенной расстройки также равно бесконечности. В ряде случаев в качестве аргумента нормированных частотных характеристик удобно использовать  $a$  б с о-

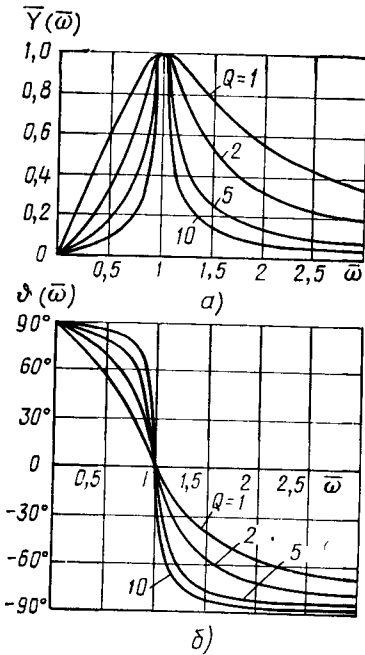


Рис. 3.22. Нормированные АЧХ (а) и ФЧХ (б) входной проводимости последовательного колебательного контура

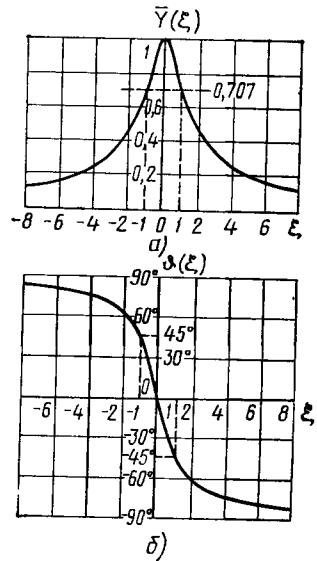


Рис. 3.23. Обобщенные АЧХ (а) и ФЧХ (б) входной проводимости последовательного колебательного контура

лютную расстройку  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ , относительную расстройку  $\delta = \Delta\omega/\omega_0 = (\omega - \omega_0)/\omega_0$  или нормированную частоту  $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ .

Комплексная входная проводимость  $Y(j\omega)$  и ее модуль  $Y(\omega)$  обычно нормируются по значению, которое они принимают на резонансной частоте  $[Y(j\omega_0) = Y(\omega_0) = 1/R]$ :

$$\bar{Y}(j\omega) = Y(j\omega)/Y(j\omega_0) = RY(j\omega);$$

$$\bar{Y}(\omega) = Y(\omega)/Y(\omega_0) = RY(\omega). \quad (3.53)$$

С использованием (3.52), (3.53) выражения (3.47), (3.49) (3.50) преобразуются к виду

$$\bar{Y}(j\omega) = \bar{Y}(j\xi) = \bar{Y}(\xi) e^{j\vartheta(\xi)} = 1/(1 + j\xi);$$

$$\bar{Y}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}} = \bar{Y}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad (3.54)$$

$$\vartheta(\omega) = -\text{arctg}[Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)] = \vartheta(\xi) = -\text{arctg} \xi.$$



Нормированные амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики входной проводимости последовательного колебательного контура приведены на рис. 3.22 и 3.23 (в последнем случае комплексные частотные характеристики цепи называют обобщенными). Годограф нормированной комплексной входной проводимости последовательного колебательного контура  $\bar{Y}(j\xi)$  имеет вид окружности (рис. 3.24).

Используя входные характеристики, найдем зависимость входного контура от частоты. Пусть к зажимам  $I-I'$  контура (см. рис. 3.17, в) подключен идеальный источник напряжения  $e(t) \doteq E = Ee^{j\psi_e}$ , частота которого может изменяться в широких пределах, а действующее значение  $E$  и начальная фаза  $\psi_e$  — постоянны. Комплексный ток контура  $\dot{I}_1$  определяется произведением комплексной входной проводимости контура на комплексное действующее значение э. д. с.:

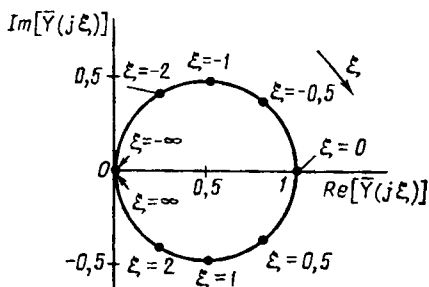


Рис. 3.24. Годограф нормированной комплексной проводимости последовательного колебательного контура

$$\dot{I}_1 = Y(j\omega) \dot{E} = Y(\omega) e^{j\theta(\omega)} E e^{j\psi_e} = EY(\omega) e^{j[\theta(\omega) + \psi_e]} = I_1 e^{j\psi_i}. \quad (3.55)$$

Из выражения (3.55) находим действующее значение входного тока контура и его начальную фазу как функции круговой частоты  $\omega$ :

$$I_1 = EY(\omega) = \frac{E}{R \sqrt{1 + [Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)]^2}};$$

$$\psi_i = \theta(\omega) + \psi_e = \psi_e - \arctg [Q(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)].$$

Нормируя ток  $I_1$ , по его максимальному значению  $I_0 = E/R$ , которое достигается, когда  $\omega = \omega_0$ , и переходя от круговой частоты  $\omega$  к обобщенной расстройке  $\xi$ , окончательно получаем

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 = I_1/I_0 = \bar{Y}(\omega) = \bar{Y}(\xi) &= 1/\sqrt{1 + \xi^2}; \\ \psi_i = \psi_e - \arctg \xi. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Таким образом, зависимость нормированного входного тока контура  $\bar{I}_1$  от частоты совпадает с нормированной амплитудно-частотной характеристикой входной проводимости контура, а зависимость начальной фазы  $\psi_i$  от частоты совпадает с нормированной фазо-частотной характеристикой контура, смещенной на  $\psi_e$ .

## Передаточные характеристики последовательного колебательного контура

Найдем коэффициент передачи контура по напряжению  $K_C(j\omega)$  для случая, когда напряжение снимают с емкости (см. рис. 3.19). При холостом ходе на зажимах 2—2' и 3—3' через все элементы контура протекает один и тот же ток  $\dot{I}_1 = Y(j\omega) \dot{U}_1$ , где  $Y(j\omega)$  — комплексная входная проводимость контура, определяемая выражениями (3.47) и (3.48). Выходное напряжение контура

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_C \dot{I}_1 = -jY(j\omega) \dot{U}_1 / (\omega C). \quad (3.57)$$

Поставляя (3.57) в (3.45), находим выражение для коэффициента передачи контура по напряжению

$$K_C(j\omega) = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{i_s = i_s = 0} = -j \frac{1}{\omega C} Y(j\omega). \quad (3.58)$$

Умножая числитель и знаменатель (3.58) на  $\omega_0$  и используя соотношения (3.34), (3.53), преобразуем (3.58) к виду

$$K_C(j\omega) = K_C(\omega) e^{j\psi_C(\omega)} = Q \frac{\omega_0}{\omega} \bar{Y}(\omega) e^{j[\vartheta(\omega) - \pi/2]},$$

Рис. 3.25. АЧХ (а) и ФЧХ (б) коэффициента передачи по напряжению последовательного колебательного контура

откуда можно определить модуль (рис. 3.25, а) и аргумент (рис. 3.25, б) комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению:

$$K_C(\omega) = \omega_0 Q \bar{Y}(\omega) / \omega; \quad \psi_C(\omega) = \vartheta(\omega) - \pi/2. \quad (3.59)$$

Здесь  $\bar{Y}(\omega)$  и  $\vartheta(\omega)$  — нормированные АЧХ и ФЧХ входной проводимости последовательного колебательного контура, определяемые выражениями (3.54).

Используя аналогичный подход, находим модуль (рис. 3.25, а) и аргумент (рис. 3.25, б) комплексного коэффициента передачи цепи по напряжению

$$K_L(j\omega) = K_L(\omega) e^{j\psi_L(\omega)},$$

для случая, когда напряжение снимают с индуктивности,

$$K_L(\omega) = Q \omega \bar{Y}(\omega) / \omega_0; \quad \psi_L(\omega) = \vartheta(\omega) + \pi/2. \quad (3.60)$$

Как следует из определения добротности, на резонансной частоте ( $\omega = \omega_0$ ) действующее значение напряжения на емкости равно действующему значению напряжения на индуктивности и в  $Q$  раз превышает напряжение на входе контура, поэтому  $K_L(\omega_0) = K_C(\omega_0) =$

$= Q$ . При  $\omega = 0$  сопротивление емкости бесконечно велико, напряжение на емкости  $\dot{U}_2 = \dot{U}_1$ , напряжение на индуктивности равно нулю. Поэтому  $K_L(\omega = 0) = 0$ ,  $K_C(\omega = 0) = 1$ . На высоких частотах  $\omega = \infty$  сопротивление индуктивности бесконечно велико, поэтому напряжение  $\dot{U}_1$  оказывается практически полностью приложенным к индуктивности, а напряжение на емкости равно нулю. Таким образом,  $K_L(\omega = \infty) = 1$ ,  $K_C(\omega = \infty) = 0$ .

Максимум зависимости  $K_C(\omega)$  соответствует частоте, несколько более низкой, а максимум  $K_L(\omega)$  — частоте, несколько более высокой, чем резонансная. Однако эти смещения максимумов  $K_C(\omega)$  и  $K_L(\omega)$  относительно резонансной частоты очень малы и на практике ими всегда можно пренебречь. Действительно, исследуя кривые  $K_C(\omega)$  и  $K_L(\omega)$  на экстремум, легко установить, что функция  $K_C(\omega)$  имеет максимум на частоте

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q)^2}, \quad (3.61)$$

а функция  $K_L(\omega)$  — на частоте

$$\omega_L = \omega_0 / \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (3.62)$$

Подставляя (3.61) и (3.62) соответственно в выражения (3.59) и (3.60), находим, что максимальные значения обеих функций одинаковы:

$$K_L(\omega_L) = K_C(\omega_C) = Q / \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = K_{\max}. \quad (3.63)$$

Рассматривая выражения (3.61)—(3.63), нетрудно прийти к заключению, что при  $Q \geq 5$  отличие  $\omega_L$  и  $\omega_C$  от  $\omega_0$  не превышает  $0,01\omega_0$ , а  $K_{\max} - Q < 0,005Q$ , поэтому во всех практически важных случаях можно считать, что  $K_L(\omega)$  и  $K_C(\omega)$  имеют максимум на резонансной частоте, причем  $K_{\max} = Q$ .

На рис. 3.25, а, который носит чисто качественный характер, смещение кривых  $K_L(\omega)$  и  $K_C(\omega)$  относительно друг друга преувеличено с тем, чтобы показать, что максимумы кривых  $K_L(\omega)$  и  $K_C(\omega)$  находятся на разных частотах. В действительности в узком диапазоне частот, близких к резонансной, когда можно положить  $\omega/\omega_0 \approx 1$ , эти зависимости почти совпадают друг с другом и с зависимостью  $Q\bar{Y}(\omega)$ , т. е.  $K_L(\omega) \approx K_C(\omega) \approx Q\bar{Y}(\omega)$ .

Если к входу последовательного колебательного контура подключить источник напряжения  $e(t) \doteq \dot{E} = Ee^{i\psi_e}$ , частота  $\omega$  которого изменяется в широких пределах, а действующее значение э. д. с.  $\dot{E}$  и начальная фаза  $\psi_e$  сохраняют неизменное значение, то зависимость нормированного выходного напряжения  $\bar{U}$  от частоты будет совпадать с нормированной АЧХ входной проводимости контура:

$$\bar{U} = U_2/(EQ) = U_3/(EQ) = \bar{Y}(\omega).$$

Напомним, что такой же вид имеет зависимость нормированного входного тока контура  $\bar{I}_1$  от частоты (3.56).

Таким образом, нормированную входную проводимость контура  $\bar{Y}(\omega)$  можно рассматривать как нормированную реакцию последовательного колебательного контура на воздействие в виде источника э. д. с. с изменяющейся частотой и неизменной амплитудой в режиме холостого хода на зажимах 2—2' и 3—3'.

## Избирательные свойства последовательного колебательного контура

Важнейшая особенность последовательного колебательного контура заключается в том, что амплитуда реакции контура на гармоническое воздействие существенно зависит от частоты. На резонансной частоте и в узком диапазоне частот около нее амплитуда отклика достигает наибольшего значения; на частотах, значительно отличающихся от резонансной, амплитуда отклика во много раз меньше максимального значения. Если на вход такого контура подать сумму гармонических колебаний различных частот, имеющих одинаковую амплитуду, то на выходе можно обнаружить, что амплитуда колебаний, частота которых близка к резонансной, значительно превышает амплитуду колебаний, частота которых отличается от резонансной. Контур как бы «пропускает» колебания одних частот и «не пропускает» колебания других частот.

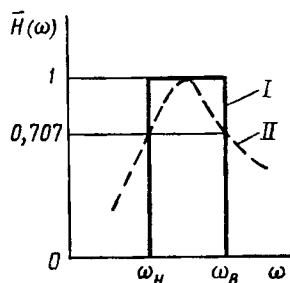


Рис. 3.26. Нормированные АЧХ избирательной цепи:

I — идеальной; II — реальной

В идеальном случае отклик избирательной цепи должен иметь постоянное значение в пределах определенного диапазона частот, называемого полосой пропускания цепи, и быть равным нулю за пределами этого диапазона. Нормированная АЧХ идеальной избирательной цепи должна иметь прямоугольную форму (рис. 3.26, кривая I). АЧХ реальных избирательных цепей, в том числе и АЧХ последовательного колебательного контура, отличаются от характеристик идеальной избирательной цепи (рис. 3.26, кривая II) отсутствием резкой границы между диапазонами пропускаемых и задерживаемых (подавляемых) частот. Очевидно, избирательные свойства реальных цепей будут тем выше, чем ближе к прямоугольной будет форма их нормированной АЧХ.

Полоса пропускания реальных избирательных устройств условно определяется как диапазон частот, в пределах которого амплитуда отклика цепи не падает ниже уровня  $1/\sqrt{2} = 0,707$  от максимального значения. На частотах, соответствующих границам полосы пропускания, амплитуда отклика составляет  $1/\sqrt{2}$  от максимального значения, а потребляемая цепью активная мощность  $P_A = I^2 R$  в 2 раза меньше максимальной.

Избирательные свойства последовательного колебательного контура определяются формой нормированной АЧХ входной проводимости контура  $\bar{Y}(\omega)$ . На резонансной частоте нормированная входная проводимость контура равна единице. Определим значения обобщенной расстройки  $\xi_{гр}$  и угловой частоты  $\omega_{гр}$ , соответствующие границам полосы пропускания контура. Полагая в выражении (3.54)  $\xi = \xi_{гр}$ ,  $\bar{Y}(\xi_{гр}) = 1/\sqrt{2}$ , получим  $1/\sqrt{1 + \xi_{гр}^2} = 1/\sqrt{2}$ , откуда  $\xi_{н} = \xi_{гр1} = -1$ ,  $\xi_{в} = \xi_{гр2} = 1$ .

Меньшее значение обобщенной расстройки  $\xi_{н} = -1$  соответствует нижней границе полосы пропускания, большее  $\xi_{в} = 1$  — верхней. Из выражений (3.54) следует, что на границах полосы пропускания аргумент входной проводимости контура равен  $\pm\pi/4$  (см. рис. 3.23, б), а реактивная составляющая входного сопротивления  $\chi = \omega L - 1/(\omega C)$  равна по абсолютному значению сопротивлению потерь контура  $R$ .

Полагая в выражении (3.52)  $\xi = -1$ ,  $\omega = \omega_{н}$  и  $\xi = 1$ ,  $\omega = \omega_{в}$ , запишем систему уравнений для определения нижней  $\omega_{н} = \omega_{гр1}$  и верхней  $\omega_{в} = \omega_{гр2}$  граничных частот:

$$-1 = Q \left[ \frac{\omega_{н}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{н}} \right]; \quad 1 = Q \left[ \frac{\omega_{в}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{в}} \right]. \quad (3.64)$$

Решая (3.64), найдем

$$\begin{aligned} \omega_{в} &= \omega_0 \left[ (d/2) + \sqrt{1 + d^2/4} \right]; \\ \omega_{н} &= \omega_0 \left[ (-d/2) + \sqrt{1 + d^2/4} \right], \end{aligned} \quad (3.65)$$

где  $d = 1/Q$  — затухание контура.

Ширина полосы пропускания пропорциональна резонансной частоте контура

$$2\Delta\omega_0 = \omega_{в} - \omega_{н} = \omega_0 d = \omega_c/Q, \quad (3.66)$$

а относительная ширина полосы пропускания

$$2\Delta\omega_0/\omega_0 = 1/Q = d \quad (3.67)$$

равна его затуханию.

Таким образом, избирательные свойства последовательного колебательного контура зависят от его добротности: чем выше добротность контура, тем меньше ширина полосы пропускания (см. рис. 3.22, а).

В связи с тем что  $\bar{Y}(\omega)$  — это нормированный отклик цепи в режиме холостого хода на зажимах 2—2' и 3—3' на внешнее гармоническое воздействие, задаваемое источником напряжения, подключенным к зажимам 1—1', из выражений (3.65)—(3.67) можно определить избирательность колебательного контура только в случае, когда внутреннее сопротивление источника энергии равно нулю, а входное сопротивление нагрузки, подключенной к зажимам 2—2' или 3—3', бесконечно велико. Рассмотрим влияние внутреннего сопротивления источника энергии и сопротивления нагрузки на избирательные свойства последовательного колебательного контура.

Пусть контур питается от источника энергии с конечным внутренним сопротивлением  $R_i$  (рис. 3.27, а). Очевидно, что включенные последовательно сопротивления  $R_i$  и  $R$  можно заменить сопротивлением  $R_{\text{ЭК}} = R_i + R$ . При этом рассматриваемая схема преобразуется в схему, приведенную на рис. 3.17, в, и может быть описана соотношениями, полученными на основании анализа этой схемы при замене  $R$  на  $R_{\text{ЭК}}$ .

В частности, добротность такого контура определяется выражением

$$Q_{\text{ЭК}} = \rho / R_{\text{ЭК}} = \rho / (R + R_i) = Q / \left(1 + \frac{R_i}{R}\right), \quad (3.68)$$

где  $Q = \rho / R$  — добротность контура без учета сопротивления источника.

Ширина полосы пропускания контура с учетом внутреннего сопротивления источника энергии может быть найдена из выражения (3.66) при замене  $Q$  на  $Q_{\text{ЭК}}$ :

$$2\Delta\omega_0 = \omega_0 / Q_{\text{ЭК}} = \omega_0 \left(1 + \frac{R_i}{R}\right) / Q. \quad (3.69)$$

Как видно из выражений (3.68), (3.69), наличие внутреннего сопротивления источника энергии уменьшает эквивалентную добротность

контура и снижает его избирательность. Поэтому с целью повышения избирательных свойств контура желательно, чтобы источник энергии, к которому подключен контур, имел как можно меньшее внутреннее сопротивление, т. е. по свойствам приближался к идеальному источнику напряжения.

Пусть к зажимам 2—2' или 3—3' последовательного колебательного контура подключено сопротивление нагрузки (рис. 3.17, б, в) так, что ток  $I_2$  или  $I_3$  не равен нулю. Очевидно, что сопротивление нагрузки, подключенное параллельно емкости или индуктивности, влияет на работу контура таким же образом, как сопротивления  $R_{\text{Спар}}$  и  $R_{\text{Lпар}}$ , входящие в параллельные схемы замещения конденсатора и индуктивной катушки. Ранее отмечалось, что параллельные схемы замещения элементов могут быть заменены последовательными, причем при высокой добротности элементов  $C_{\text{пар}} \approx C_{\text{пос}} = C$ ,  $L_{\text{пар}} \approx L_{\text{пос}} = L$ , а сопротивления  $R_{\text{Спос}}$  и  $R_{\text{Lпос}}$  обратно пропорциональны сопротивлениям  $R_{\text{Спар}}$  (3.23) и  $R_{\text{Lпар}}$  (3.21). Таким образом, сопротивление нагрузки  $R_{\text{Н2}}$ , подключенное параллельно емкости, и  $R_{\text{Н3}}$ , подключенное параллельно индуктивности, могут быть заменены последовательно включенными сопротивлениями

$$R'_{\text{Н2}} \approx 1/(\omega^2 C^2 R_{\text{Н2}}); \quad R'_{\text{Н3}} \approx \omega^2 L^2 / R_{\text{Н3}}.$$

Сопротивления  $R'_{н2}$  и  $R'_{н3}$ , учитывающие влияние нагрузки на работу контура, назовем внесенными в контур сопротивлениями нагрузки. Если  $R_{н2} = R_{н3} = R_{н}$ , то на частотах, близких к резонансной ( $\omega \approx \omega_0$ ), внесенные в контур сопротивления нагрузок

$$R'_{н2} \approx R'_{н3} \approx \rho^2/R_{н} \approx R_{н}. \quad (3.70)$$

Влияние  $R_{н}$  на параметры контура аналогично влиянию внутреннего сопротивления источника  $R_1$ , т. е. с увеличением  $R_{н}$  снижается эквивалентная добротность контура и ухудшается его избирательность. Используя (3.70), найдем выражения для эквивалентной добротности контура и ширины полосы пропускания:

$$Q_{эк2} = \frac{\rho}{R + R'_{н}} = \frac{\rho}{R + \rho^2/R_{н}} = \frac{Q}{1 + Q\rho/R_{н}};$$

$$2\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q_{эк2}} = \frac{\omega_0}{Q} \left( 1 + \frac{Q\rho}{R_{н}} \right). \quad (3.71)$$

Из выражений (3.71) следует, что для увеличения эквивалентной добротности контура и улучшения его избирательности необходимо, чтобы сопротивление нагрузки контура  $R_{н}$  было бы как можно большим, т. е. чтобы на зажимах 2—2' и 3—3' был обеспечен режим работы, близкий к режиму холостого хода.

### § 3.3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

#### Виды параллельных колебательных контуров.

##### Схемы замещения

Параллельным колебательным контуром называется электрическая цепь, в которой индуктивные катушки и конденсаторы размещены в двух ветвях, подключенных параллельно источнику энергии. Принципиальные электрические схемы параллельных колебательных контуров различных видов приведены на рис. 3.28.

В простейшем случае параллельный колебательный контур содержит индуктивную катушку в одной из параллельных ветвей, а конденсатор — в другой (рис. 3.28, а). Такой контур называется параллельным колебательным контуром 1-го (основного) вида. Параллельный колебательный контур 2-го (неполным включением)

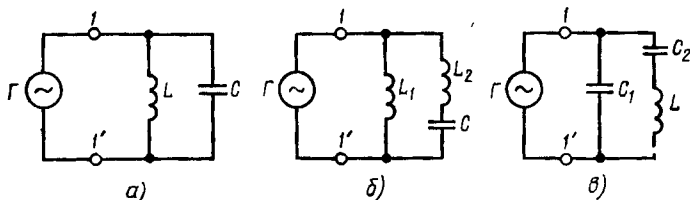


Рис. 3.28. Принципиальные электрические схемы параллельных колебательных контуров:

а — основного вида; б — второго вида; в — третьего вида

ем индуктивности) вида содержит в одной ветви индуктивную катушку  $L_1$ , а в другой ветви конденсатор  $C$  и индуктивную катушку  $L_2$  (рис. 3.28, б); параллельный колебательный контур 3-го (с неполным включением емкости) вида содержит в одной ветви индуктивную катушку  $L$  и конденсатор  $C_2$ , а в другой — только конденсатор  $C_1$  (рис. 3.28, в)\*).

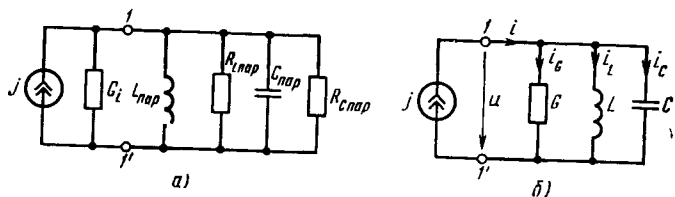


Рис. 3.29. Эквивалентные схемы параллельного колебательного контура основного вида, полученные при использовании параллельных схем замещения элементов

Рассмотрим контур 1-го вида. В соответствии с основным методом теории цепей реальные элементы заменим упрощенными моделирующими цепями, а принципиальную электрическую схему контура его эквивалентной схемой. Используя параллельные схемы замещения

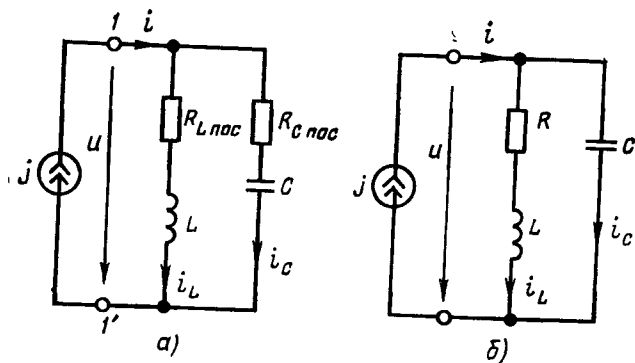


Рис. 3.30. Эквивалентные схемы параллельного колебательного контура основного вида, полученные при использовании последовательных схем замещения элементов

источника энергии, индуктивной катушки и конденсатора, получим один из вариантов эквивалентной схемы контура (рис. 3.29, а). Ограничим рассмотрение случаем, когда элементы контура имеют высокую добротность, при этом зависимостью  $L_{\text{нар}}$  от частоты можно пренебречь и в соответствии с (3.21), (3.22) считать, что параметры реак-

\*) Широко используемые на практике термины «контур с неполным включением индуктивности» и «контур с неполным включением емкости» являются несколько неточными, так как соответствующие реактивные элементы полностью включены не в контур, а в одну из ветвей.



тивных элементов параллельной и последовательной схем замещения индуктивной катушки и конденсатора одинаковы:

$$L_{\text{пар}} = L_{\text{пос}} = L; C_{\text{пар}} = C_{\text{пос}} = C. \quad (3.72)$$

Заменяя сопротивления потерь одним элементом

$$G = 1/R_{C \text{ пар}} + 1/R_{L \text{ пар}} \quad (3.73)$$

и пренебрегая внутренней проводимостью источника энергии, преобразуем рассмотренную схему в простейшую схему замещения (рис. 3.29, б).

Если каждый из пассивных элементов контура заменить последовательной схемой замещения, то при тех же допущениях получим несколько более сложную эквивалентную схему контура 1-го вида (рис. 3.30, а). В теории цепей в зависимости от характера решаемой задачи нашли применение оба варианта схем замещения.

### Параллельный колебательный контур основного вида

Ранее было установлено, что идеализированные цепи, схемы которых приведены на рис. 3.29, б и 3.17, в, являются дуальными, поэтому при рассмотрении процессов в параллельном колебательном контуре основного типа с помощью простейшей схемы замещения, изображенной на рис. 3.29, б, можно воспользоваться всеми выражениями полученными для последовательного колебательного контура, производя в них взаимные замены токов и напряжений, сопротивлений и проводимостей, емкостей и индуктивностей. Действительно, выражения для комплексной входной проводимости параллельной  $RLC$ -цепи (2.100) и комплексного входного сопротивления последовательной  $RLC$ -цепи (2.96) имеют одинаковую структуру и могут быть получены одно из другого путем упомянутых ранее замен. На резонансной частоте мнимая составляющая входной проводимости параллельной  $RLC$ -цепи должна быть равна нулю:

$$\text{Im} [Y]_{\omega=\omega_p} = \text{Im} \{G + j[\omega C - 1/(\omega L)]\}_{\omega=\omega_p} = \omega_p C - 1/(\omega_p L) = 0. \quad (3.74)$$

Решая уравнение (3.74), находим, что резонансная частота параллельного колебательного контура  $\omega_p$  совпадает с резонансной частотой последовательного контура  $\omega_0$ , составленного из тех же элементов:

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

На резонансной частоте полные проводимости емкости

$$y_C |_{\omega=\omega_p} = b_C |_{\omega=\omega_p} = \omega_p C = \sqrt{C/L} = \rho^{-1} = \sigma$$

и индуктивности

$$y_L |_{\omega=\omega_p} = |b_L |_{\omega=\omega_p} = 1/(\omega_p L) = \sqrt{C/L} = \rho^{-1} = \sigma$$

равны характеристической проводимости параллельного колебательного контура  $\sigma$ , которая является величиной, обратной характеристическому сопротивлению контура  $\rho$  (выражения для характеристиче-

ских сопротивлений параллельного и последовательного колебательных контуров совпадают). Как видно из векторных диаграмм параллельной  $RLC$ -цепи (см. рис. 2.23, в) при  $\omega = \omega_p$  действующее значение тока емкости равно действующему значению тока индуктивности:  $I_C = I_L = \sigma U$ , а входной ток контура (ток неразветвленной части параллельной  $RLC$ -цепи) равен току проводимости  $G$ :  $I = I_G = GU$ .

Отношение действующего значения тока реактивного элемента к входному току параллельного колебательного контура на резонансной частоте называется добротностью параллельного колебательного контура:

$$Q = I_C/I |_{\omega=\omega_p} = I_L/I |_{\omega=\omega_p} = \sigma/G. \quad (3.75)$$

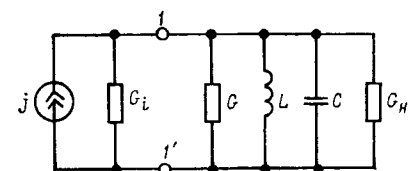


Рис. 3.31. К определению эквивалентной добротности параллельного колебательного контура

Выражение (3.75) имеет такую же структуру, как и выражение (3.33), и может быть получено из него заменой сопротивления потерь  $R$  и характеристического сопротивления

$\rho$  последовательного контура на проводимость потерь  $G$  и характеристическую проводимость  $\sigma$  параллельного контура.

Из выражения (3.75) видно, что с увеличением проводимости потерь добротность параллельного колебательного контура падает. Таким же образом на добротность контура влияют внутренняя проводимость источника энергии  $G_i$  и проводимость нагрузки  $G_n$ , подключенная к зажимам контура  $1-1'$  (рис. 3.31). Добротность параллельного колебательного контура с учетом внутренней проводимости источника  $G_i$  и проводимости нагрузки  $G_n$  определяется выражением

$$Q_{\text{эк}} = \frac{\sigma}{G + G_i + G_n} = \frac{Q}{1 + G_i/G + G_n/G}, \quad (3.76)$$

где  $Q$  — добротность параллельного контура без учета  $G_i$  и  $G_n$ . Таким образом, для повышения эквивалентной добротности параллельного колебательного контура желательно, чтобы проводимости источника энергии и нагрузки были бы близки к нулю, т. е. чтобы свойства источника энергии, к которому подключен контур, приближались к свойствам идеального источника тока, а сопротивление нагрузки контура было бы бесконечно большим.

При исследовании комплексных частотных характеристик параллельного контура внешнее воздействие на контур обычно задают в виде тока идеального источника тока, подключенного к зажимам  $1-1'$ , а в качестве реакции контура рассматривают напряжение  $u \doteq \dot{U}$  на этих же зажимах (см. рис. 3.29, б). В ряде случаев в качестве реакции контура рассматривают ток емкости  $i_C \doteq \dot{I}_C$  или ток индуктивности  $i_L \doteq \dot{I}_L$ . Следовательно, параллельному колебательному контуру, подобно последовательному, можно привести в соответствие как входные, так и передаточные характеристики.

К входным характеристикам параллельного колебательного контура относится его комплексное входное сопротивление в режиме холостого хода ( $G_n = 0$ )

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}}{i} \Big|_{I_n=0} = \frac{1}{G + j[\omega C - 1/(\omega L)]} = Z(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (3.77)$$

Выражения для нормированного модуля и аргумента комплексного входного сопротивления параллельного колебательного контура

$$\bar{Z}(\omega) = \bar{Z}(\xi) = GZ(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + [Q(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad (3.78)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi(\xi) = -\arctg [Q(\omega/\omega_p - \omega_p/\omega)] = -\arctg \xi$$

полностью совпадают с выражениями (3.54) для нормированного модуля и аргумента комплексной входной проводимости последовательного колебательного контура. Следовательно, нормированные АЧХ и ФЧХ входного сопротивления параллельного колебательного контура совпадают с соответствующими характеристиками входной проводимости последовательного колебательного контура (см. рис. 3.22, 3.23).

На частоте резонанса токов  $\omega = \omega_p$  входное сопротивление параллельного колебательного контура имеет чисто резистивный характер ( $\varphi = 0$ ), а модуль входного сопротивления достигает максимального значения:

$$R_0 = Z(\omega_p) = 1/G. \quad (3.79)$$

На частотах ниже резонансной входное сопротивление контура имеет резистивно-индуктивный характер ( $0 < \varphi < \pi/2$ ), а на частотах выше резонансной — резистивно-емкостной ( $-\pi/2 < \varphi < 0$ ).

Можно показать, что выражения для коэффициентов передачи параллельного колебательного контура по току  $G_C(\omega)$  и  $G_L(\omega)$  совпадают с выражениями для коэффициентов передачи последовательного контура по напряжению  $K_L(\omega)$  и  $K_C(\omega)$ :

$$G_C(\omega) = I_C/I = Q\omega\bar{Z}(\omega)/\omega_p;$$

$$G_L(\omega) = I_L/I = Q\omega_p\bar{Z}(\omega)/\omega$$

и иллюстрируются теми же кривыми (см. рис. 3.25, а).

О передаточных характеристиках параллельного колебательного контура можно сказать все то, что ранее говорилось о передаточных характеристиках последовательного колебательного контура. В частности, при высокой добротности контура на частотах, близких к резонансной,  $G_L(\omega) \approx G_C(\omega) \approx Q\bar{Z}(\omega)$ .

В связи с тем что нормированные входные и передаточные характеристики последовательного и параллельного колебательных контуров совпадают, избирательные свойства этих контуров одинаковы. Ши-

рина полосы пропускания параллельного колебательного контура, если пренебречь внутренней проводимостью источника и проводимостью нагрузки, определяется выражением (3.66). Если необходимо учесть влияние проводимости нагрузки и внутренней проводимости источника энергии на избирательные свойства контура, то вместо  $Q$  в выражение (3.66) подставляют эквивалентную добротность  $Q_{\text{эк}}$ , рассчитываемую с помощью выражения (3.76).

Таким образом, применение простейшей схемы замещения параллельного колебательного контура позволяет существенно упростить процесс рассмотрения свойств параллельного колебательного контура путем использования соответствующих выражений, полученных при исследовании последовательного колебательного контура. Однако непосредственное использование этих выражений на практике, в частности выражений (3.75), (3.76) и (3.79), в значительной степени затруднено в связи с тем, что в них входит проводимость потерь контура  $G$ , которая зависит от частоты.

При практическом использовании более удобными являются выражения для сопротивления на резонансной частоте и для добротности параллельного колебательного контура, полученные с помощью эквивалентной схемы контура, в которой катушка индуктивности и конденсатор представлены их последовательными схемами замещения.

Найдем комплексное входное сопротивление параллельного колебательного контура, используя эквивалентную схему, приведенную на рис. 3.30, а:

$$Z(j\omega) = (R_{L\text{пос}} + j\omega L) \left( R_{C\text{пос}} - j \frac{1}{\omega C} \right) / \left[ (R_{L\text{пос}} + j\omega L) + \left( R_{C\text{пос}} - j \frac{1}{\omega C} \right) \right]. \quad (3.80)$$

Ограничимся, как и ранее, случаем, когда элементы контура имеют высокую добротность ( $\omega_p L \gg R_{L\text{пос}}$ ,  $1/(\omega_p C) \gg R_{C\text{пос}}$ ), а частота внешнего воздействия ненамного отличается от резонансной. Тогда выражение (3.80) можно преобразовать:

$$Z(j\omega) \approx \rho^2 / \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]. \quad (3.81)$$

Здесь  $\rho = \sqrt{L/C}$  и  $R = R_{L\text{пос}} + R_{C\text{пос}}$  соответственно характеристическое сопротивление и сопротивление потерь последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов, что и рассматриваемый параллельный колебательный контур. С учетом соотношений (3.24) можно считать, что  $R$  практически равно  $R_{L\text{пос}}$  и не зависит от частоты. Таким образом, эквивалентная схема, приведенная на рис. 3.30, а, в большинстве важных для практического использования случаев может быть заменена более простой схемой (см. рис. 3.30, б), в которую входят те же элементы, что и в эквивалентную схему последовательного колебательного контура, параметры которых можно считать не зависящими от частоты.

На резонансной частоте мнимая составляющая комплексного входного сопротивления контура должна быть равна нулю, что возможно только тогда, когда мнимая составляющая знаменателя выражения (3.81) равна нулю:

$$[\omega L - 1/(\omega C)]_{\omega=\omega_p} = (x_C + x_L)_{\omega=\omega_p} = 0. \quad (3.82)$$

Из выражения (3.82) следует, что условие резонанса токов в параллельном колебательном контуре, при высокой добротности элементов, имеет такой же вид, как условие резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре (3.27), и, следовательно, частота резонанса токов совпадает с резонансной частотой последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов:

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (3.83)$$

Если элементы контура имеют невысокую добротность, для определения частоты резонанса токов необходимо приравнять нулю мнимую составляющую входного сопротивления контура, определяемую из выражения (3.80). При этом частота резонанса токов будет несколько отличаться от резонансной частоты последовательного контура:

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{(\rho^2 - R_{L \text{ пос}}^2)/(\rho^2 - R_C^2 \text{ пос})},$$

однако при  $\rho \gg R_{L \text{ пос}}$  и  $\rho \gg R_C \text{ пос}$  этим различием можно пренебречь.

Как отмечалось ранее, характеристическое сопротивление параллельного колебательного контура, равное абсолютному значению мнимых составляющих сопротивлений ветвей контура на резонансной частоте, определяется тем же выражением, что и характеристическое сопротивление последовательного контура:

$$\rho = |x_C|_{\omega=\omega_p} = x_L|_{\omega=\omega_p} = \omega_p L = 1/(\omega_p C) = \sqrt{L/C}.$$

Входное сопротивление параллельного колебательного контура на резонансной частоте (резонансное сопротивление контура) имеет чисто резистивный характер и, как следует из (3.81), определяется выражением

$$R_0 = [Z(j\omega)]_{\omega=\omega_p} = \rho^2/R, \quad (3.84)$$

следовательно, ток  $i$  и напряжение  $u$  на зажимах  $I-I'$  (см. рис. 3.30, б) на резонансной частоте совпадают по фазе, а их действующие значения  $I_0 = I|_{\omega=\omega_p}$ ,  $U_0 = U|_{\omega=\omega_p}$  связаны между собой соотношением  $U_0 = R_0 I_0 = \rho^2 I_0/R$ .

Действующие значения токов ветвей контура на резонансной частоте одинаковы

$$I_C|_{\omega=\omega_p} \approx I_L|_{\omega=\omega_p} \approx U_0/\rho = \rho I_0/R. \quad (3.85)$$

Используя выражение (3.85), найдем добротность параллельного колебательного контура:

$$Q = \left[ \frac{I_C}{I_0} \right]_{\omega=\omega_p} = \left[ \frac{I_L}{I_0} \right]_{\omega=\omega_p} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.86)$$

Таким образом, добротность параллельного колебательного контура основного вида совпадает с добротностью последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов.

Аналогичный результат может быть получен и из соотношения (3.43), пригодного для определения добротности любых колебательных систем.

Используя выражения (3.84), (3.86), представим комплексное сопротивление параллельного колебательного контура в следующей форме:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{R_0}{1 + j \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}} = \frac{R_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)} = \frac{R_0}{1 + j\xi} = \\ &= \frac{R_0}{\sqrt{1 + \xi^2}} e^{-j \arctg \xi} = R_0 \bar{Y}(\xi) e^{j\vartheta(\xi)}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Из сравнения выражений (3.54), (3.77), (3.78), (3.87) следует, что как при использовании параллельных схем замещения элементов (см. рис. 3.29), так и при использовании последовательных схем замещения (см. рис. 3.30) зависимость комплексного входного сопротивления параллельного колебательного контура от частоты определяется обобщенными АЧХ и ФЧХ входной проводимости последовательного колебательного контура  $\bar{Y}(\xi)$  и  $\vartheta(\xi)$ , составленного из тех же элементов, что и рассматриваемый параллельный контур.

Применение последовательных схем замещения элементов позволяет получать более удобные выражения для добротности и резонансного сопротивления параллельного колебательного контура, не содержащие частотно-зависимых членов.

### Параллельный колебательный контур второго вида

Конструктивной особенностью колебательного контура этого вида является наличие в нем индуктивной катушки с отводом или со скользящим контактом, разделяющим катушку на две секции (рис. 3.32); секция с индуктивностью  $L_1$  образует одну ветвь колебательного контура (см. рис. 3.28, б), а секция с индуктивностью  $L_2$  и конденсатор  $C$  — другую (для упрощения анализа пренебрегаем взаимной индуктивностью между секциями катушки). Таким образом, индуктивная катушка не полностью входит в первую ветвь контура. При перемещении скользящего контакта вдоль катушки или при изменении места расположения отвода изменяется коэффициент включения индуктивности, определяющий, какая часть суммарной индуктивности катушки  $L = L_1 + L_2$  включена в первую ветвь:

$$\rho_L = L_1 / (L_1 + L_2) = L_1 / L. \quad (3.88)$$

Коэффициент включения индуктивности может изменяться в пределах от нуля (на рисунке при крайнем нижнем положении подвижного контакта) до единицы (при крайнем верхнем положении). В последнем случае рассматриваемый колебательный контур вырождается в параллельный колебательный контур основного вида.

В связи с тем что одна из ветвей параллельного колебательного контура с неполным включением индуктивности представляет собой последовательное включение конденсатора  $C$  и индуктивной катушки  $L_2$ , в контуре этого вида наряду с резонансом токов имеет место резонанс напряжений. Очевидно, что частота резонанса напряжений  $\omega_{рн}$  должна быть выше, чем частота резонанса токов  $\omega_{рТ}$ , так как для выполнения условия резонанса токов необходимо, чтобы сопротивление ветви, содержащей  $L_2$  и  $C$ , носило емкостной характер, что, как известно, имеет место только на частотах ниже частоты резонанса напряжений.

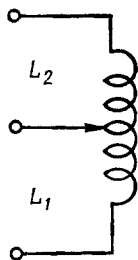


Рис. 3.32. Упрощенная конструкция катушки индуктивности с отводом

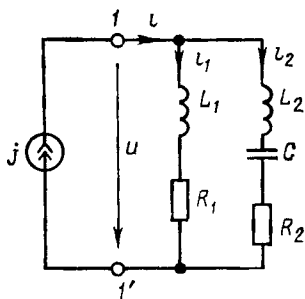


Рис. 3.33. Эквивалентная схема параллельного колебательного контура второго вида

Рассмотрим особенности частотных характеристик параллельного колебательного контура с неполным включением индуктивности и влияние коэффициента включения индуктивности  $p_L$  на параметры контура. Для анализа используем эквивалентную схему контура, в которой индуктивные катушки и конденсатор представлены их последовательными схемами замещения (рис. 3.33). Сопротивления  $R_1 = R_{L1 \text{ пос}}$  и  $R_2 = R_{L2 \text{ пос}} + R_{C \text{ пос}}$  представляют собой соответственно сопротивление потерь индуктивной катушки  $L_1$ , а также суммарное сопротивление потерь индуктивной катушки  $L_2$  и конденсатора  $C$ .

Комплексное входное сопротивление рассматриваемого контура в точках  $1-1'$  определяется выражением

$$Z(j\omega) = \frac{(R_1 + j\omega L_1) [R_2 + j\omega L_2 + 1/(j\omega C)]}{(R_1 + j\omega L_1) + [R_2 + j\omega L_2 + 1/(j\omega C)]}. \quad (3.89)$$

Когда элементы контура обладают высокой добротностью, а частота внешнего воздействия близка к частоте резонанса токов, выражение (3.89) можно привести к более простому виду:

$$Z(j\omega) = \frac{\omega L_1 [1/(\omega C) - \omega L_2]}{(R_1 + R_2) + j[\omega L_1 + \omega L_2 - 1/(\omega C)]}. \quad (3.90)$$

На частоте резонанса токов мнимая составляющая  $Z(j\omega)$  должна равняться нулю, что возможно только при выполнении условия

$$[\omega L_1 + \omega L_2 - 1/(\omega C)]_{\omega = \omega_{pT}} = 0 \quad (3.91)$$

или

$$\omega_{pT} L_1 = 1/(\omega_{pT} C) - (\omega_{pT} L_2). \quad (3.92)$$

Решая уравнение (3.91), находим выражение для частоты резонанса токов:

$$\omega_{pT} = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)C} = 1/\sqrt{LC} = \omega_0.$$

Таким образом, частота резонанса токов параллельного колебательного контура 2-го вида не зависит от коэффициента включения индуктивности и совпадает с резонансной частотой последовательного колебательного контура, построенного из тех же элементов, что и рассматриваемый колебательный контур.

В то время как частота резонанса токов  $\omega_{pT}$  зависит от суммарной индуктивности контура  $L = L_1 + L_2$ , частота резонанса напряжений  $\omega_{pH}$  определяется только индуктивностью второй ветви  $L_2$  и, следовательно, зависит от коэффициента включения индуктивности:

$$\omega_{pH} = 1/\sqrt{L_2 C} = 1 / \sqrt{LC \left( \frac{L - L_1}{L} \right)} = \omega_0 / \sqrt{1 - p_L}$$

С уменьшением коэффициента включения индуктивности частота  $\omega_{pH}$  уменьшается, оставаясь большей, чем  $\omega_{pT} = \omega_0$ .

Подставляя (3.92) в (3.90), найдем сопротивление рассматриваемого контура на частоте резонанса токов:

$$R_0(p_L) = Z(\omega_{pT}) = \frac{(\omega_{pT} L_1)^2}{R_1 + R_2} = \frac{(\omega_0 L)^2}{R} \left( \frac{L_1}{L} \right)^2 = \frac{\rho^2 p_L^2}{R} = R_0 p_L^2.$$

Здесь  $R = R_1 + R_2$  и  $\rho = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$  — суммарное сопротивление потерь и характеристическое сопротивление рассматриваемого контура, равные соответственно сопротивлению потерь и характеристическому сопротивлению последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов;  $R_0 = \rho^2/R$  — резонансное сопротивление параллельного контура основного вида. Таким образом, резонансное сопротивление контура с неполным включением индуктивности  $R_0(p_L)$  меньше, чем резонансное сопротивление контура основного типа  $R_0$ , причем при  $p_L \rightarrow 1$ ,  $R_0(p_L) \rightarrow R_0$ .

Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики параллельного колебательного контура рассматриваемого типа приведены на рис. 3.34. На частотах ниже  $\omega_{pT}$  входное сопротивление контура определяется в основном сопротивлением ветви 1 и имеет резистивно-индуктивный характер. На частоте резонанса токов сопротивление контура достигает максимального значения  $R_0(p_L)$  и имеет чисто резистивный характер. На частотах выше  $\omega_{pT}$  сопротивление контура определяется в основном параметрами ветви 2, причем при  $\omega_{pT} < \omega < \omega_{pH}$  сопротивление контура имеет резистивно-емкостной характер,



а на частотах выше частоты резонанса напряжений — резистивно-индуктивный. На частоте резонанса напряжений входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и достигает минимального значения, определяемого сопротивлением потерь второй ветви.

Покажем, что добротность параллельного колебательного контура с неполным включением индуктивности не зависит от коэффициента включения и равна добротности последовательного колебательного контура, составленного из тех же элементов. Пусть контур настроен на частоту источника сигнала, а напряжение и ток на входе контура определяются соотношениями

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{2} I_0 \cos(\omega_0 t); \\ u &= \sqrt{2} U_0 \cos(\omega_0 t) = \\ &= \sqrt{2} R_0(\rho_L) I_0 \cos(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Токи ветвей контура  $i_1$  и  $i_2$  на резонансной частоте имеют одинаковые действующие значения

$$I_{10} = I_{20} \approx U_0/(\omega_0 L_1) \quad (3.94)$$

и отличаются по фазе на угол  $\pi$ , а напряжение на емкости  $u_C$  отстает по фазе от тока второй ветви на угол  $\pi/2$ :

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2} I_{10} \cos(\omega_0 t - \pi/2) = \sqrt{2} I_{10} \sin(\omega_0 t); \\ i_2 &= \sqrt{2} I_{20} \cos(\omega_0 t + \pi/2) = -\sqrt{2} I_{10} \sin(\omega_0 t); \\ u_C &= \sqrt{2} I_{20} \cos(\omega_0 t)/(\omega_0 C) = \sqrt{2} \rho I_{10} \cos(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Определим энергию, запасаемую реактивными элементами контура:

$$\begin{aligned} W_3 &= (L_1 i_1^2/2) + (L_2 i_2^2/2) + (C u_C^2/2) = (L_1 + L_2) I_{10}^2 \sin^2(\omega_0 t) + \\ &+ C \rho^2 I_{10}^2 \cos^2(\omega_0 t) = L I_{10}^2, \end{aligned} \quad (3.95)$$

и энергию, потребляемую контуром за период  $T$ :

$$W_n = (R_1 I_{10}^2 + R_2 I_{20}^2) T = (R_1 + R_2) I_{10}^2 T = R I_{10}^2 T. \quad (3.96)$$

Подставляя (3.95) и (3.96) в (3.43), получим выражение для добротности параллельного колебательного контура с неполным включением индуктивности:

$$Q = 2\pi W_3/W_n = 2\pi L/(RT) = \omega_0 L/R = \rho/R, \quad (3.97)$$

которое совпадает с выражением для добротности параллельного контура основного типа и соответственно с выражением для добротности последовательного колебательного контура, построенного из тех же элементов. Далее, используя (3.93), (3.94) и (3.97), найдем, что

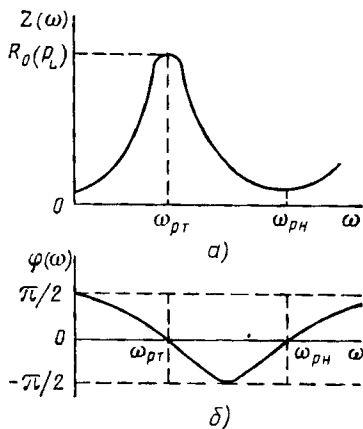


Рис. 3.34. АЧХ (а) и ФЧХ (б) входного сопротивления параллельного колебательного контура второго вида

на резонансной частоте действующие значения токов ветвей контура превышают действующее значение входного тока контура в  $p_L Q$  раз

$$I_{10}/I_0 = I_{20}/I_0 = R_0(p_L)/(\omega_0 L_1) = \rho^2 p_L^2 L / (R \omega_0 L L_1) = p_L Q.$$

Итак, важнейшие параметры параллельного колебательного контура 2-го вида (частота резонанса токов, характеристическое сопротивление и добротность) не зависят от коэффициента включения индуктивности  $p_L$ . В то же время резонансное сопротивление контура является функцией  $p_L$ .

Указанная особенность параллельного колебательного контура широко используется на практике при согласовании его с источником энергии. Согласование осуществляют путем надлежащего выбора значения коэффициента включения, причем при изменении  $p_L$  настройка контура и ширина его полосы пропускания, определяемая эффективной добротностью, не изменяются.

Наличие ярко выраженного минимума в АЧХ контура с неполным включением индуктивности может быть использовано для подавления колебаний, частота которых близка к  $\omega_{pH}$  рассматриваемого контура.

### Параллельный колебательный контур третьего вида

Колебательный контур этого типа по своим свойствам в значительной степени подобен параллельному колебательному контуру второго вида. Используя эквивалентную схему контура, приведенную на рис. 3.35, нетрудно показать, что частота резонанса токов  $\omega_{pH}$ , характеристическое сопротивление  $\rho$  и добротность  $Q$  параллельного колебательного контура с неполным включением емкости совпадают с резонансной частотой, характеристическим сопротивлением и добротностью последовательного колебательного контура, построенного из тех же элементов и, следовательно, обладающего теми же суммарной емкостью  $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$  и суммарным сопротивлением  $R = R_1 + R_2$ .

Частота резонанса напряжений  $\omega_{pH}$  рассматриваемого контура определяется параметрами элементов второй ветви

$$\omega_{pH} = 1/\sqrt{LC_2} = \omega_0 \sqrt{C/C_2} = \omega_0 \sqrt{1 - p_C}$$

и зависит от коэффициента включения емкости

$$p_C = C/C_1 = C_2/(C_1 + C_2).$$

Резонансное сопротивление контура с неполным включением емкости так же, как и резонансное сопротивление контура с неполным включением индуктивности, пропорционально квадрату коэффициента включения

$$R_0(p_C) = \rho^2 p_C^2 / R = R_0 p_C^2.$$

Здесь  $R_0 = \rho^2 / R$  — резонансное сопротивление параллельного контура основного вида, обладающего той же индуктивностью  $L$ , суммарной емкостью  $C$  и суммарным сопротивлением  $R$ , что и рассматриваемый контур

АЧХ и ФЧХ входного сопротивления параллельного колебательного контура с неполным включением емкости приведены на рис. 3.36. На частотах ниже  $\omega_{pH}$  входное сопротивление обеих ветвей контура имеет резистивно-емкостной характер; на частоте резонанса напряжений входное сопротивление контура имеет чисто резистивный характер и достигает минимального значения, определяемого в основном сопротивлением потерь второй ветви; на частотах  $\omega_{pH} < \omega < \omega_{pT}$  входное сопротивление контура имеет резистивно-индуктивный характер; при  $\omega = \omega_{pT}$  входное сопротивление контура имеет чисто резистив-

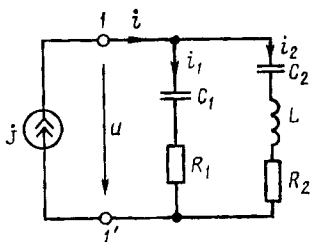
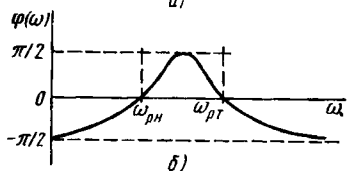
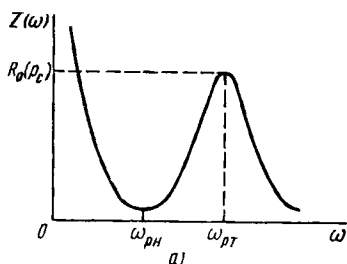


Рис. 3.35. Эквивалентная схема параллельного колебательного контура третьего вида

Рис. 3.36. АЧХ (а) и ФЧХ (б) входного сопротивления параллельного колебательного контура третьего вида



ный характер и его модуль достигает максимального значения  $R_0(p_C)$ ; на частотах выше частоты резонанса токов входное сопротивление контура определяется в основном параметрами первой ветви и имеет резистивно-емкостной характер.

### § 3.4. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

#### Общие представления о связанных контурах

Два контура электрической цепи называются **связанными**, если возбуждение колебаний в одном из них приводит к возникновению колебаний в другом. Каждый из связанных контуров может быть либо **колебательным** (если он содержит индуктивные катушки и конденсаторы), либо **аперiodическим** (если он содержит реактивные элементы только одного типа). Наибольший практический интерес представляют связанные колебательные контуры, так как их избирательные свойства лучше, чем избирательные свойства одиночных колебательных контуров.

В зависимости от типа элемента, через который осуществляется взаимодействие между контурами, различают контуры с **трансформаторной**, **индуктивной**, **емкостной** и **комбинированной** (индуктивно-емкостной) связями. По способу включения элемента связи связанные контуры подразделяют-

ся на контуры с внешней связью и контуры с внутренней связью. Принципиальные электрические схемы связанных колебательных контуров некоторых типов приведены на рис. 3.37.

Внешнее воздействие на связанные колебательные контуры обычно задается в виде напряжения источника энергии  $\Gamma$ , включенного в один из контуров, называемый первичным. В качестве реакции связанных контуров на внешнее действие рассматривают ток или напряжение одного из элементов другого контура, называемого вторичным.

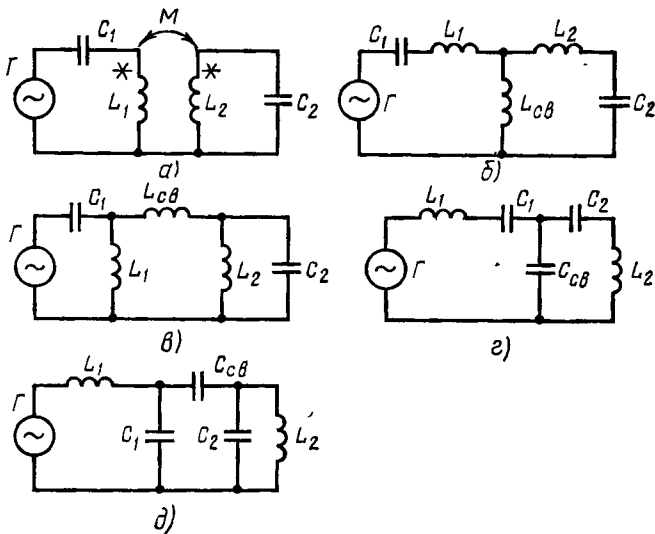


Рис. 3.37. Принципиальные электрические схемы связанных колебательных контуров:

*а* — с трансформаторной связью; *б* — с внутренней индуктивной (авто-трансформаторной) связью; *в* — с внешней индуктивной связью; *г* — с внутренней емкостной связью; *д* — с внешней емкостной связью

Каждому типу связанных колебательных контуров можно поставить в соответствие так называемый четырехполюсник связи (рис. 3.38), который получается из исходных контуров при их размыкании и устранении из контуров всех элементов, имеющих другой характер по сравнению с элементом связи.

Назовем коэффициентом передачи из первичного контура во вторичный  $K_{21}$  комплексный коэффициент передачи соответствующего четырехполюсника связи по напряжению от зажимов  $1-1'$  к зажимам  $2-2'$  (при холостом ходе на зажимах  $2-2'$ )

$$K_{21} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 |_{i_2 = 0},$$

а коэффициентом передачи из вторичного контура в первичный — комплексный коэффициент передачи четырехполюсника связи по напряжению от зажимов  $2-2'$  к зажимам  $1-1'$  (при холостом ходе на зажимах  $1-1'$ )

$$K_{12} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 |_{i_1 = 0}.$$

Можно убедиться, что коэффициенты передачи  $K_{21}$  и  $K_{12}$  связанных контуров, схемы которых приведены на рис. 3.37, *a—д*, а соответствующие четырехполюсники связи — на рис. 3.38, *a—д*, являются действительными числами и не зависят от частоты.

Среднее геометрическое из коэффициентов передачи  $K_{12}$  и  $K_{21}$  называется коэффициентом связи между контурами

$$k_{св} = \sqrt{K_{12}K_{21}}. \quad (3.98)$$

Коэффициент связи не зависит от частоты и используется для количественной оценки степени связи между контурами.

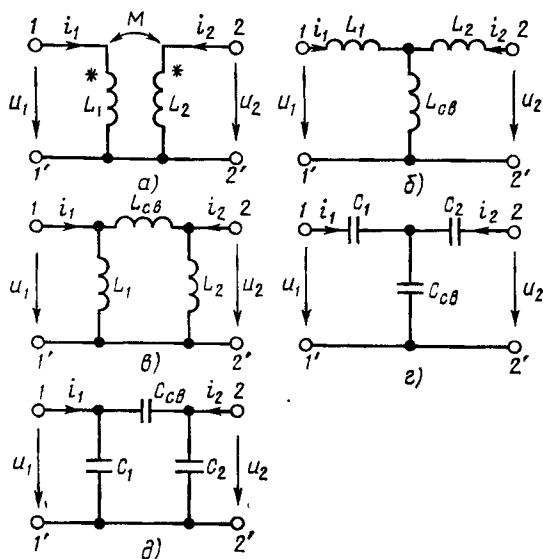


Рис. 3.38. Четырехполюсники связи, соответствующие контурам, приведенным на рис. 3.37

Для контуров с трансформаторной связью (см. рис. 3.37, *a*) при определении коэффициентов передачи  $K_{12}$  и  $K_{21}$  можно воспользоваться компонентным уравнением связанных индуктивностей (2.165)

$$K_{12} = j\omega M / (j\omega L_1) = M/L_1; \quad K_{21} = j\omega M / (j\omega L_2) = M/L_2. \quad (3.99)$$

Подставляя (3.99) в (3.98), можно установить, что коэффициент связи между контурами с трансформаторной связью равен коэффициенту связи между входящими в эти контуры индуктивностями:

$$k_{св} = M / \sqrt{L_1 L_2} = k_M. \quad (3.100)$$

Анализируя четырехполюсники связи, найдем выражения для коэффициентов связи между контурами с внутренней индуктивной (автотрансформаторной) связью (см. рис. 3.37, *б*)

$$k_{св} = L_{св} / \sqrt{(L_1 + L_{св})(L_2 + L_{св})}, \quad (3.101)$$

с внешней индуктивной связью (см. рис. 3.37, в)

$$k_{св} = \sqrt{L_1 L_2 / (L_1 + L_{св})(L_2 + L_{св})}, \quad (3.102)$$

с внутренней емкостной связью (см. рис. 3.37, г)

$$k_{св} = \frac{1/C_{св}}{\sqrt{(1/C_1 + 1/C_{св})(1/C_2 + 1/C_{св})}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + C_{св}/C_1)(1 + C_{св}/C_2)}} \quad (3.103)$$

и с внешней емкостной связью (см. рис. 3.37, д)

$$k_{св} = \sqrt{\frac{1/(C_1 C_2)}{(1/C_1 + 1/C_{св})(1/C_2 + 1/C_{св})}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + C_1/C_{св})(1 + C_2/C_{св})}}. \quad (3.104)$$

Из выражений (3.100)—(3.104) видно, что значение коэффициента связи между контурами  $k_{св}$  не может превышать единицы, причем с увеличением параметра элемента связи ( $M$ ,  $L_{св}$ ,  $C_{св}$ ) происходит увеличение  $k_{св}$  между контурами с трансформаторной, автотрансформаторной и внешней емкостной связями и уменьшение коэффициента связи между контурами с внешней индуктивной и внутренней емкостной связями.

### Схемы замещения связанных контуров

Для изучения процессов в связанных контурах различных типов воспользуемся их обобщенной комплексной схемой замещения (рис. 3.39), на которой  $\underline{Z}_1$  — комплексное сопротивление элементов, входящих только в первичный контур;  $\underline{Z}_2$  — комплексное сопротивление элементов, входящих только во вторичный контур;  $\underline{Z}_{12}$  — комплексное сопротивление связи.

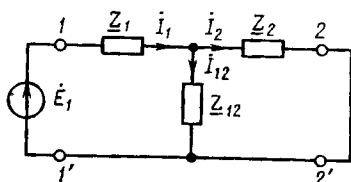


Рис. 3.39. Обобщенная комплексная схема замещения связанных контуров

Соответствие между элементами обобщенной схемы замещения и элементами контуров с внутренней индуктивной и внутренней емкостной связями устанавливается из сравнения рис. 3.39 с рис. 3.37, б, г; сопротивление  $\underline{Z}_1$  включает в себя внутреннее сопротивление источника энергии  $\Gamma$ , а также комплексные сопротивления индуктивной катушки  $L_1$  и конденсатора  $C_1$ ; сопротивление  $\underline{Z}_2$  равно сумме комплексных сопротивлений индуктивной катушки  $L_2$  и конденсатора  $C_2$ , а сопротивление  $\underline{Z}_{12}$  представляет собой комплексное сопротивление элемента связи индуктивной катушки  $L_{св}$  или конденсатора  $C_{св}$ .

Чтобы обобщенную схему замещения можно было применять для анализа контуров с внешней индуктивной или емкостной связями, эти контуры должны быть (с помощью преобразования треугольник—звезда) заменены эквивалентными контурами с внутренней индуктивной или емкостной связями. Контуры с трансформаторной связью также можно преобразовать в эквивалентные им контуры с внутренней индуктивной связью, используя рассмотренную ранее схему замещения связанных индуктивностей (см. рис. 2.49, в).

Воспользуемся обобщенной схемой замещения (рис. 3.39) для определения токов первичного и вторичного контуров. Уравнения баланса токов и напряжений рассматриваемой цепи имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_{12} \dot{I}_{12} &= \dot{E}_1; \\ \underline{Z}_2 \dot{I}_2 - \underline{Z}_{12} \dot{I}_{12} &= 0; \\ \dot{I}_{12} - \dot{I}_1 + \dot{I}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Исключая из уравнений (3.105) ток сопротивления связи  $\dot{I}_{12}$ , преобразуем их к более удобному виду

$$\underline{Z}_{11} \dot{I}_1 - \underline{Z}_{12} \dot{I}_2 = \dot{E}_1; \quad \underline{Z}_{22} \dot{I}_2 - \underline{Z}_{12} \dot{I}_1 = 0, \quad (3.106)$$

где  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{12}$ ;  $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_{12}$  — соответственно собственные сопротивления первичного и вторичного контуров, равные сумме всех сопротивлений, входящих в каждый из контуров. Решая уравнения (3.106) относительно токов первичного и вторичного контуров, получаем

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}^2 / \underline{Z}_{22}}; \quad (3.107)$$

$$\dot{I}_2 = \underline{Z}_{12} \dot{I}_1 / \underline{Z}_{22} = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{22} \dot{E}_1 / (\underline{Z}_{22} \underline{Z}_{11})}{(\underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}^2 / \underline{Z}_{22}) \underline{Z}_{22} / \underline{Z}_{11}} = \frac{\underline{Z}_{12} \dot{E}_1 / \underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}^2 / \underline{Z}_{11}}. \quad (3.108)$$

Рассмотрим более подробно структуру полученных выражений. Величина, стоящая в знаменателе выражения (3.107), имеет физический смысл входного сопротивления системы связанных контуров относительно точек  $I-I'$ . Эта величина отличается от собственного сопротивления первичного контура  $\underline{Z}_{11}$  на некоторую добавку  $-\underline{Z}_{12}^2 / \underline{Z}_{22}$ , учитывающую влияние вторичного контура на процессы, протекающие в первичном. Нетрудно убедиться, что при размыкании вторичного контура  $-\underline{Z}_{12}^2 / \underline{Z}_{22}$  будет равно нулю и ток первичного контура будет равен  $\dot{E}_1 / \underline{Z}_{11}$ . Аналогичным образом, величина  $-\underline{Z}_{12}^2 / \underline{Z}_{11}$ , стоящая в знаменателе выражения (3.108), отражает влияние первичного контура на процессы, протекающие во вторичном контуре. Величины

$$-\underline{Z}_{12}^2 / \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{\text{вн}1}; \quad -\underline{Z}_{12}^2 / \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{\text{вн}2}. \quad (3.109)$$

получили название вносимых сопротивлений.

Влияние первичного контура на процессы во вторичном контуре отражается не только введением в него некоторого дополнительного сопротивления  $\underline{Z}_{\text{вн}2}$ . По аналогии с величиной, стоящей в числителе выражения (3.107), числитель выражения (3.108) может рассматривать как э. д. с. некоторого источника

$$\dot{E}_{\text{вн}2} = \underline{Z}_{12} \dot{E}_1 / \underline{Z}_{11}, \quad (3.110)$$

внесенного во вторичный контур под влиянием первичного. Напряжение вносимого источника  $\dot{E}_{вн2}$  численно равно напряжению на сопротивлении связи  $\underline{Z}_{12}$  при разомкнутом вторичном контуре.

С учетом (3.109), (3.110) выражения для токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  могут быть записаны в единообразной форме

$$\dot{I}_1 = \dot{E}_1 / (\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{вн1}); \quad \dot{I}_2 = \dot{E}_{вн2} / (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{вн2}), \quad (3.111)$$

им можно поставить в соответствие эквивалентные схемы первичного и вторичного контуров, изображенные на рис. 3.40.

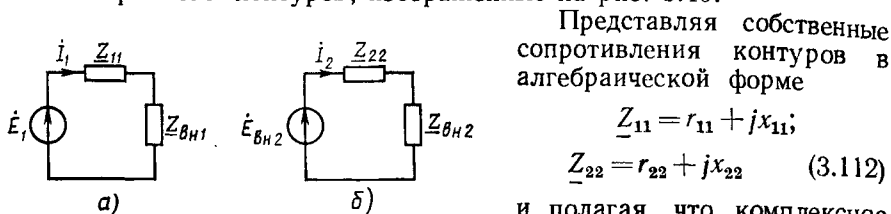


Рис. 3.40. Эквивалентные схемы первичного (а) и вторичного (б) контуров

Представляя собственные сопротивления контуров в алгебраической форме

$$\underline{Z}_{11} = r_{11} + jx_{11};$$

$$\underline{Z}_{22} = r_{22} + jx_{22} \quad (3.112)$$

и полагая, что комплексное сопротивление связи имеет чисто реактивный характер

$$\underline{Z}_{12} = jx_{12}, \quad (3.113)$$

преобразуем выражения (3.109) к виду

$$\underline{Z}_{вн1} = x_{12}^2 / (r_{22} + jx_{22}) = (x_{12}^2 r_{22} - jx_{12}^2 x_{22}) / (r_{22}^2 + x_{22}^2) = r_{вн1} + jx_{вн1}; \quad (3.114)$$

$$\underline{Z}_{вн2} = x_{12}^2 / (r_{11} + jx_{11}) = (x_{12}^2 r_{11} - jx_{12}^2 x_{11}) / (r_{11}^2 + x_{11}^2) = r_{вн2} + jx_{вн2},$$

откуда

$$r_{вн1} = x_{12}^2 r_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2); \quad r_{вн2} = x_{12}^2 r_{11} / (r_{11}^2 + x_{11}^2); \quad (3.115)$$

$$x_{вн1} = -x_{12}^2 x_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2); \quad x_{вн2} = -x_{12}^2 x_{11} / (r_{11}^2 + x_{11}^2).$$

Из выражений (3.115) видно, что вещественные составляющие вносимых сопротивлений всегда положительны, а знаки реактивных составляющих вносимых сопротивлений  $x_{вн1}$  и  $x_{вн2}$  противоположны знакам реактивных составляющих собственных сопротивлений вторичного и первичного контуров  $x_{22}$  и  $x_{11}$ . Если, например, при каком-то значении частоты внешнего воздействия собственное сопротивление первичного контура  $\underline{Z}_{11}$  имеет резистивно-емкостной характер, то на этой же частоте сопротивление, вносимое во вторичный контур  $\underline{Z}_{вн2}$  будет иметь резистивно-индуктивный характер.

Используя (3.112)—(3.114), выразим токи первичного и вторичного контуров через вещественные и мнимые составляющие сопротивлений элементов обобщенной схемы замещения связанных контуров:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{[r_{11} + x_{12}^2 r_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2)] + j[x_{11} - x_{12}^2 x_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2)]}; \quad (3.116)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{jx_{12} \dot{E}_1 / (r_{11} + jx_{11})}{[r_{22} + x_{12}^2 r_{11} / (r_{11}^2 + x_{11}^2)] + j[x_{22} - x_{12}^2 x_{11} / (r_{11}^2 + x_{11}^2)]}. \quad (3.117)$$



## Настройка связанных контуров

Настройка системы связанных колебательных контуров заключается в выборе таких значений параметров элементов контуров, при которых ток вторичного контура достигает максимального значения при заданных частоте и действующем значении напряжения источника энергии. Настройку связанных контуров можно осуществлять как за счет изменения параметров реактивных элементов, входящих в один или в разные контуры, так и за счет совместного изменения параметров реактивных элементов контуров и параметров элементов связи. Рассмотрим основные способы настройки связанных контуров.

Настройку на первый частный резонанс осуществляют путем изменения параметров реактивных элементов, входящих только в первичный контур. Параметры элементов, входящих только во вторичный контур, и параметры элементов связи при настройке на первый частный резонанс не изменяются. Значение индуктивности  $L_1$  или емкости  $C_1$  выбирают таким образом, чтобы сумма реактивной составляющей собственного сопротивления первичного контура  $x_{11}$  и реактивной составляющей сопротивления, вносимого в первый контур  $x_{вн1}$ , была равна нулю:

$$x_{11} + x_{вн1} = x_{11} - x_{12}^2 x_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2) = 0. \quad (3.118)$$

Этот способ настройки соответствует настройке на резонансную частоту контура, эквивалентного первичному (рис. 3.40, а). Входное сопротивление такого контура относительно зажимов, к которым подключен источник энергии, имеет чисто резистивный характер, а действующее значение тока первичного контура — максимально:

$$I_{1\max} = \frac{E_1}{r_{11} + x_{12}^2 r_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2)}.$$

Как видно из выражения (3.108), ток вторичного контура прямо пропорционален току первичного контура, поэтому максимуму тока  $I_{1\max}$  соответствует максимум тока  $I_2$ :

$$I_{2\max}^{(1)} = \left| \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \right| I_{1\max} = \frac{|x_{12}| E_1}{\sqrt{r_{22}^2 + x_{22}^2} [r_{11} + x_{12}^2 r_{22} / (r_{22}^2 + x_{22}^2)]}.$$

При настройке на второй частный резонанс максимальное значение тока вторичного контура получают путем изменения параметров реактивных элементов, входящих только во вторичный контур. Значение индуктивности  $L_2$  или емкости  $C_2$  выбирают таким образом, чтобы обеспечить равенство нулю суммы реактивных составляющих собственного и вносимого сопротивлений вторичного контура:

$$x_{22} + x_{вн2} = x_{22} - x_{12}^2 x_{11} / (r_{11}^2 + x_{11}^2) = 0, \quad (3.119)$$

что соответствует настройке на частоту источника контура, эквивалентного вторичному. Действующее значение тока вторичного контура в этом случае

$$I_{2 \max}^{(2)} = \frac{|x_{12}| E_1}{\sqrt{r_{11}^2 + x_{11}^2 [r_{22} + x_{12}^2 r_{11} / (r_{11}^2 + x_{11}^2)]}}$$

Настройку связанных контуров на первый или второй частные резонансы обычно выполняют только в тех случаях, когда конструкция устройства позволяет производить изменение параметров реактивных элементов только одного из контуров. Если можно изменять параметры реактивных элементов, входящих в разные контуры, при фиксированном значении сопротивления связи, то производят настройку контуров на индивидуальный резонанс. Параметры реактивных элементов в этом случае выбирают так, чтобы обеспечить равенство нулю мнимой составляющей собственного сопротивления каждого из контуров при разомкнутом другом контуре:

$$x_{11} = x_{22} = 0. \quad (3.120)$$

Из выражений (3.115) видно, что выполнение условия (3.120) обеспечивает равенство нулю мнимых составляющих сопротивлений, вносимых в каждый из контуров:

$$x_{вн1} = x_{вн2} = 0. \quad (3.121)$$

Таким образом, при настройке связанных колебательных контуров на индивидуальный резонанс одновременно выполняются условия настройки контуров на первый и второй частные резонансы (3.118), (3.119).

Подставляя (3.120), (3.121) в выражение (3.117), найдем действующее значение тока вторичного контура при настройке на индивидуальный резонанс:

$$I_{2 \max}^{(2)} = \frac{|x_{12}| E_1 / r_{11}}{r_{22} + x_{12}^2 / r_{11}} = \frac{|x_{12}| E_1}{r_{11} r_{22} + x_{12}^2}. \quad (3.122)$$

Настройка связанных контуров на первый и второй частные или на индивидуальный резонансы позволяет получить максимальное значение тока вторичного контура, соответствующее некоторому заданному значению сопротивления связи, однако не позволяет достигнуть наибольшего возможного (максимум максиморум) значения тока  $I_2$ .

Если настройка связанных контуров на первый или второй частные резонансы сопровождается последующим выбором оптимального сопротивления связи, то говорят о настройке контуров на сложный резонанс. Определим оптимальное сопротивление связи при сложном резонансе  $x_{12 \text{opt}}^{(1)}$ , соответствующее случаю, когда связанные контуры предварительно настроены на первый частный резонанс. Приравнивая нулю первую производную по  $|x_{12}|$  тока вторичного контура, настроенного на первый частный резонанс, получаем

$$\frac{dI_{2 \max}^{(1)}}{d|x_{12}|} = \frac{r_{11} + x_{12}^2 r_{22} / (r_{22}^2 + x_{12}^2) - 2x_{12}^2 r_{22} / (r_{22}^2 + x_{12}^2)}{\sqrt{r_{22}^2 + x_{12}^2 [r_{11} + x_{12}^2 r_{22} / (r_{22}^2 + x_{12}^2)]}} E_1 = 0,$$

откуда

$$r_{11}(r_{22}^2 + x_{22}^2) - x_{12}^2 r_{22} = 0. \quad (3.123)$$

Решая уравнение (3.123), находим оптимальное сопротивление связи

$$|x_{12}^{(1)}|_{\text{opt}} = \sqrt{(r_{22}^2 + x_{22}^2) r_{11}/r_{22}} \quad (3.124)$$

и соответствующее ему действующее значение тока вторичного контура

$$I_{2 \text{ max max}}^{(1)} = E_1 / (2 \sqrt{r_{11} r_{22}}). \quad (3.125)$$

Если связанные контуры были предварительно настроены на второй частный резонанс, то оптимальное сопротивление связи  $|x_{12}^{(2)}|_{\text{opt}}$  и действующее значение тока вторичного контура  $I_{2 \text{ max max}}^{(2)}$  при настройке на сложный резонанс определяются выражениями:

$$|x_{12}^{(2)}|_{\text{opt}} = \sqrt{(r_{11}^2 + x_{11}^2) r_{22}/r_{11}}; \quad (3.126)$$

$$I_{2 \text{ max max}}^{(2)} = E_1 / (2 \sqrt{r_{11} r_{22}}) = I_{2 \text{ max max}}^{(1)} = I_{2 \text{ max max}}. \quad (3.127)$$

Итак, наибольшее возможное значение тока вторичного контура при настройке на сложный резонанс не зависит от того, какой из контуров был предварительно настроен на частный резонанс.

Наибольший практический интерес представляет настройка связанных колебательных контуров на полный резонанс, которая выполняется в два этапа: на первом этапе связанные контуры настраивают на индивидуальный резонанс, а затем выбирают оптимальное сопротивление связи между ними. Анализируя выражение (3.122), найдем  $|x_{12}^{(3)}|_{\text{opt}}$  и действующее значение тока вторичного контура, соответствующие настройке контура на полный резонанс:

$$|x_{12}^{(3)}|_{\text{opt}} = \sqrt{r_{11} r_{22}}; \quad (3.128)$$

$$I_{2 \text{ max max}}^{(3)} = E_1 / (2 \sqrt{r_{11} r_{22}}) = I_{2 \text{ max max}} \quad (3.129)$$

Из выражений (3.124)—(3.129) следует, что как при настройке на сложный резонанс, так и при настройке на полный резонанс во вторичном контуре достигается одно и то же значение тока  $I_{2 \text{ max max}}$ , однако в последнем случае это имеет место при меньшем значении сопротивления связи.

Зависимость тока вторичного контура от абсолютного значения сопротивления связи при настройке на полный или сложный резонансы иллюстрируется кривыми, приведенными на рис. 3.41, в. Как следует из выражений (3.110), (3.115), с ростом сопротивления связи э. д. с., вносимая во вторичный контур, возрастает по линейному закону (рис. 3.41, а), а вещественная составляющая вносимого во вторичный контур сопротивления — по квадратичному (рис. 3.41, б). При сопротивлении связи, меньшем оптимального, суммарное сопротивление вторичного контура  $r_{22} + r_{\text{вн}2}$  определяется в основном собственным сопротивлением вторичного контура  $r_{22}$ , поэтому с ростом

сопротивления связи происходит увеличение тока вторичного контура (рис. 3.41, в). При сопротивлении связи, большем оптимального, суммарное сопротивление вторичного контура определяется в основном сопротивлением, вносимым во вторичный контур  $r_{вн2}$ , которое с увеличением  $|x_{12}|$  растет быстрее, чем вносимая в контур э. д. с. Вследствие этого при сопротивлении связи, большем  $|x_{12opt}|$ , дальнейший рост  $|x_{12}|$  приводит к уменьшению тока вторичного контура.

Найдем значение коэффициента связи между контурами  $k_{свopt}$ , соответствующее настройке контуров на полный резонанс. Анализ выражений (3.101) и (3.103) показывает, что для контуров с внутренней емкостной и индуктивной связями коэффициент связи между контурами равен отношению сопротивления связи к среднему геометрическому реактивных сопротивлений того же типа обоих контуров. Если связанные контуры настроены на индивидуальный резонанс, то с учетом (3.120) сопротивление емкостных элементов каждого из них равно по абсолютному значению сопротивлению индуктивных элементов и приблизительно равно характеристическому сопротивлению контура. Таким образом, для контуров с внутренней емкостной и индуктивной связями можно записать

$$k_{св} = |x_{12}| / \sqrt{\rho_1 \rho_2}. \quad (3.130)$$

Выражение (3.130) можно использовать и при расчетах связанных контуров других типов, предварительно преобразовав их в эквивалентные контуры с внутренней связью. При настройке связанных контуров на полный резонанс (3.130) принимает вид

$$k_{свopt} = |x_{12opt}| / \sqrt{\rho_1 \rho_2} = \sqrt{r_1 r_2 / (\rho_1 \rho_2)} = 1 / \sqrt{Q_1 Q_2} = \sqrt{d_1 d_2}.$$

Если первичный и вторичный контуры имеют одинаковую добротность  $Q_1 = Q_2 = Q = 1/d$ , то оптимальный коэффициент связи между контурами, соответствующий настройке на полный резонанс, равен затуханию контура  $d$ :

$$k_{свopt} = 1/Q = d. \quad (3.131)$$

Величина

$$A = Qk_{св} \quad (3.132)$$

получила название параметра связи. Как видно из выражения (3.131), при настройке связанных контуров на полный резонанс  $A = 1$ .

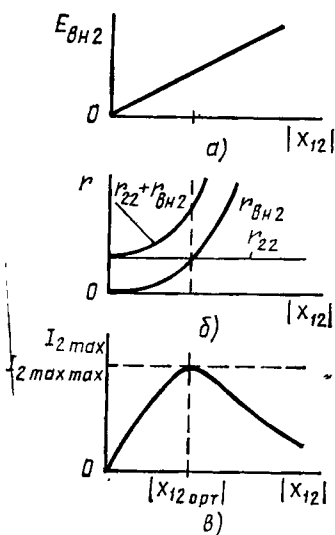


Рис. 3.41. Зависимость вносимой э. д. с. (а), резистивной составляющей вносимого сопротивления, суммарного сопротивления (б) и тока (в) вторичного контура от сопротивления связи

разовав их в эквивалентные контуры с внутренней связью. При настройке связанных контуров на полный резонанс (3.130) принимает вид

## Частотные характеристики связанных контуров

Рассмотрим зависимость тока вторичного контура от частоты для случая, когда параметры обоих контуров одинаковы:

$$x_{11} = x_{22} = x; r_{11} = r_{22} = r; \\ \omega_{c1} = \omega_{c2} = \omega_0; \rho_1 = \rho_2 = \rho; Q_1 = Q_2 = Q.$$

Собственные сопротивления первичного и вторичного контуров в этом случае могут быть представлены в следующей форме:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = r + jx = r(1 + j\xi), \quad (3.133)$$

где  $\xi = x/r$  — обобщенная расстройка.

Подставляя (3.113), (3.133) в (3.108), найдем выражения для комплексного действующего значения

$$\dot{I}_2 = \frac{jx_{12}\dot{E}_1}{r^2(1+j\xi)^2 + x_{12}^2} = \frac{jx_{12}\dot{E}_1/r^2}{[1-\xi^2 + (x_{12}/r)^2] + 2j\xi}$$

и действующего значения

$$I_2 = \frac{2|x_{12}|/r}{\sqrt{[1-\xi^2 + (x_{12}/r)^2]^2 + 4\xi^2}} \frac{E_1}{2r} \quad (3.134)$$

тока вторичного контура. Принимая во внимание, что  $E_1/(2r)$  есть наибольшее возможное значение тока вторичного контура

$$I_{2 \max \max} = E_1/(2\sqrt{r_{11}r_{22}}) = E_1/(2r),$$

а  $|x_{12}|/r$  с учетом соотношений (3.130) и (3.132) приблизительно равно параметру связи

$$|x_{12}|/r = |x_{12}| \rho / (\rho r) \approx k_{св} Q = A,$$

выражение (3.134) можно записать в более компактной форме

$$I_2 = 2AI_{2 \max \max} / \sqrt{(1-\xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}. \quad (3.135)$$

Очевидно, что экстремумы функции  $I_2 = I_2(\xi)$  совпадают с экстремумами знаменателя выражения (3.135). Приравнивая нулю первую производную знаменателя по  $\xi$ , получим  $-4\xi(1-\xi^2+A^2) + 8\xi = 0$  или

$$\xi(\xi^2 + 1 - A^2) = 0. \quad (3.136)$$

Уравнение (3.136) имеет три решения:

$$\xi_1 = 0; \xi_2 = -\sqrt{A^2 - 1}; \xi_3 = \sqrt{A^2 - 1}.$$

Первое из них соответствует случаю, когда  $\omega = \omega_0$ . Второе и третье решения имеют физический смысл только при  $A^2 - 1 \geq 0$ , т. е. когда параметр связи не меньше некоторого критического значения  $A_{кр} = 1$ .

Таким образом, при больших значениях параметра связи ( $A > A_{кр}$ ) функция  $I_2 = I_2(\xi)$  имеет три экстремума, а при малых значениях параметра связи ( $A < A_{кр}$ ) — один. При  $A = A_{кр}$  все три решения уравнения (3.136) совпадают и функция  $I_2 = I_2(\xi)$  имеет один экстре-

мум. Отметим, что критическое значение параметра связи соответствует оптимальной связи между контурами при настройке на полный резонанс.

Зависимость нормированного тока вторичного контура

$$\bar{I}_2 = I_2 / I_{2 \max \max} = 2A / \sqrt{(1 - \xi^2 + A^2)^2 + 4\xi^2}$$

от обобщенной расстройки  $\xi$  показана на рис. 3.42. При слабой связи между контурами ( $A < A_{кр}$ ) частотные характеристики  $\bar{I}_2$  имеют вид «одногогорбых» кривых, причем максимальное значение тока вторичного контура, достигаемое на резонансной частоте ( $\xi = 0$ ), меньше, чем  $I_{2 \max \max}$ . С увеличением параметра связи вплоть до  $A = A_{кр} = 1$  значения тока  $\bar{I}_2$  в максимуме увеличиваются, а кривые остаются «одногогорбыми». При  $A = A_{кр}$  ток вторичного контура на резонансной частоте ( $\xi = 0$ ) равен  $I_{2 \max \max}$ . При дальнейшем увеличении связи между контурами ток вторичного контура на резонансной частоте ( $\xi = 0$ ) начнет уменьшаться и частотные характеристики  $I_2$  приобретут вид «двугорбых» кривых. Максимальное значение тока  $I_2 = I_{2 \max \max}$  достигается на частотах связи, соответствующих обобщенным расстройкам  $\xi = \pm \sqrt{A^2 - 1}$ . Физически существование максимумов

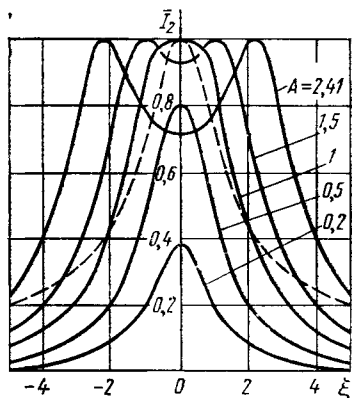


Рис 3.42. Зависимость нормированного тока вторичного контура от обобщенной расстройки при различных значениях параметра связи:

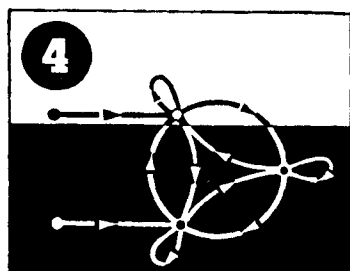
пунктир — частотная характеристика одиночного колебательного контура

тока  $\bar{I}_2$  на частотах связи объясняется тем, что на них реактивная составляющая собственного сопротивления каждого из контуров компенсируется реактивной составляющей вносимого сопротивления. С увеличением параметра связи  $A$  при сильной связи между контурами ( $A > A_{кр}$ ) максимальное значение тока вторичного контура, достигаемое на частотах связи, остается равным  $I_{2 \max \max}$ , расстояние между максимумами увеличивается, а значение тока  $\bar{I}_2$  на резонансной частоте ( $\xi = 0$ ) в соответствии с кривой, изображенной на рис. 3.41, в, уменьшается. При  $A > 2,41$  значение  $\bar{I}_2$  на резонансной частоте упадет ниже  $0,707 I_{2 \max \max}$ , при этом полоса пропускания связанных контуров распадется на два участка.

По сравнению с одиночными колебательными контурами связанные контуры обладают существенно лучшими избирательными свойствами. форма их нормированных АЧХ намного ближе к прямоугольной и имеет большую крутизну склонов на границах полосы пропускания.

Дополнительное удобство состоит в возможности плавно изменять ширину полосы пропускания за счет изменения коэффициента связи между контурами. Это обусловило широкое применение связанных контуров в различных радиотехнических устройствах.

# Анализ линейных электрических цепей с постоянными параметрами при гармоническом воздействии



## § 4.1. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПИ

### Общие представления о методах формирования уравнений электрического равновесия сложных цепей

До сих пор рассматривались только простейшие, одноконтурные и двухузловые цепи, а также цепи, которые приводятся к простейшим с помощью элементарных преобразований. Для анализа таких цепей использовалась основная система уравнений электрического равновесия, включающая в себя  $p - p_{ит} - p_{ин}$  компонентных и  $p$  топологических уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа. С помощью основной системы уравнений электрического равновесия, в принципе, можно производить анализ и сложных цепей, однако с ростом числа ветвей цепи анализ усложняется, так как для определения токов и напряжений цепи, содержащей  $p$  ветвей, приходится решать систему из  $2p - p_{ин} - p_{ит}$  уравнений. Число одновременно решаемых уравнений может быть уменьшено, если учесть, что не все  $2p - p_{ин} - p_{ит}$  неизвестных токов и напряжений ветвей являются независимыми.

Для каждой электрической цепи можно выделить совокупность независимых токов и (или) напряжений ветвей, зная которые, можно определить все остальные (зависимые) токи и напряжения. Значения независимых токов и напряжений находят путем решения сокращенной системы уравнений электрического равновесия, содержащей меньшее, чем  $2p - p_{ин} - p_{ит}$ , число уравнений. В связи с тем что выбор независимых токов и напряжений неоднозначен, а число независимых токов и напряжений определяется тем, какие именно величины выбраны в качестве независимых, трудоемкость анализа цепи определяется рациональностью выбора системы независимых токов и напряжений.

## Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа

К методам формирования уравнений электрического равновесия цепей, основанным на непосредственном применении законов Кирхгофа, относятся метод токов ветвей и метод напряжений ветвей. В методе токов ветвей в качестве независимых переменных, относительно которых составляется сокращенная система уравнений электрического равновесия, используют токи ветвей исследуемой цепи. Этот метод основан на том, что ток и напряжение каждой ветви, за исключением ветвей, содержащих идеализированные источники тока, а также ветвей, составленных только из идеализированных источников напряжения, связаны между собой однозначной зависимостью, которая определяется компонентным уравнением данной ветви. Таким образом, зная токи всех ветвей электрической цепи, можно определить напряжения этих ветвей.

Пусть линейная электрическая цепь состоит только из идеализированных двухполюсных пассивных элементов: сопротивлений, емкостей, индуктивностей, а также неуправляемых источников напряжений. Основная система уравнений электрического равновесия такой цепи будет содержать  $q - 1$  уравнений баланса токов,  $p - q + 1$  уравнений баланса напряжений и  $p - p_{ин}$  компонентных уравнений для определения  $p$  неизвестных токов и  $p - p_{ин}$  неизвестных напряжений ветвей (напряжения  $p_{ин}$  ветвей, состоящих только из источников напряжения, заданы). Если каким-либо образом определить токи всех ветвей, то неизвестные напряжения могут быть найдены с помощью  $p - p_{ин}$  компонентных уравнений. Для определения  $p$  неизвестных токов ветвей можно воспользоваться  $q - 1$  уравнениями баланса токов и  $p - q + 1$  уравнениями баланса напряжений, выразив в последних напряжения ветвей через соответствующие токи. Таким образом, для цепи, не содержащей источников тока, применение метода тока ветвей позволяет уменьшить число уравнений, входящих в систему уравнений электрического равновесия от  $2p - p_{ин}$  до  $p$ .



**Пример 4.1.** Составим систему уравнений электрического равновесия по методу токов ветвей для электрической цепи, схема которой приведена на рис. 4.1, а. Граф этой цепи, соответствующий сокращенному топологическому описанию, изображен на рис. 4.1, б. Как видно из рисунка, для данного топологического описания число ветвей  $p = 6$ , число узлов  $q = 4$ , причем ни одна из ветвей не содержит источников тока ( $p_{ит} = 0$ ) и не составлена только из источников напряжения ( $p_{ин} = 0$ ). Выбирая дерево графа и систему независимых контуров в соответствии с рис. 4.1, в — д, составим основную систему уравнений электрического равновесия, которая будет включать в себя 12 уравнений, в том числе  $q - 1 = 3$  уравнений баланса токов:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 &= 0; \\ -\dot{I}_4 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 &= 0; \\ -\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_5 &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$



$p - q + 1 = 3$  уравнения баланса напряжений:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 + \dot{U}_4 + \dot{U}_6 &= 0; \\ \dot{U}_2 + \dot{U}_5 + \dot{U}_6 &= 0; \\ \dot{U}_1 - \dot{U}_2 + \dot{U}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

и  $p = 6$  компонентных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_1 \dot{I}_1 - \dot{E}_1; & \dot{U}_4 &= \underline{Z}_4 \dot{I}_4; \\ \dot{U}_2 &= \underline{Z}_2 \dot{I}_2 - \dot{E}_2; & \dot{U}_5 &= \underline{Z}_5 \dot{I}_5; \\ \dot{U}_3 &= \underline{Z}_3 \dot{I}_3; & \dot{U}_6 &= \underline{Z}_6 \dot{I}_6. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставляя уравнения (4.3) в (4.2), получим в сочетании с уравнениями (4.1) сокращенную систему уравнений электрического равновесия рассматриваемой цепи

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 &= 0; & \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_4 \dot{I}_4 + \underline{Z}_6 \dot{I}_6 &= \dot{E}_1; \\ -\dot{I}_4 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 &= 0; & \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_5 \dot{I}_5 + \underline{Z}_6 \dot{I}_6 &= \dot{E}_2; \\ -\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_5 &= 0; & \underline{Z}_1 \dot{I}_1 - \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3 &= \dot{E}_1 - \dot{E}_2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таким образом, число одновременно решаемых уравнений уменьшилось от 12 до 6.

Рассмотрим более общий случай, когда исследуемая цепь помимо указанных ранее элементов включает в себя  $p_{ит}$  ветвей, содержащих неуправляемые источники тока (ток этих ветвей задан, а напря-

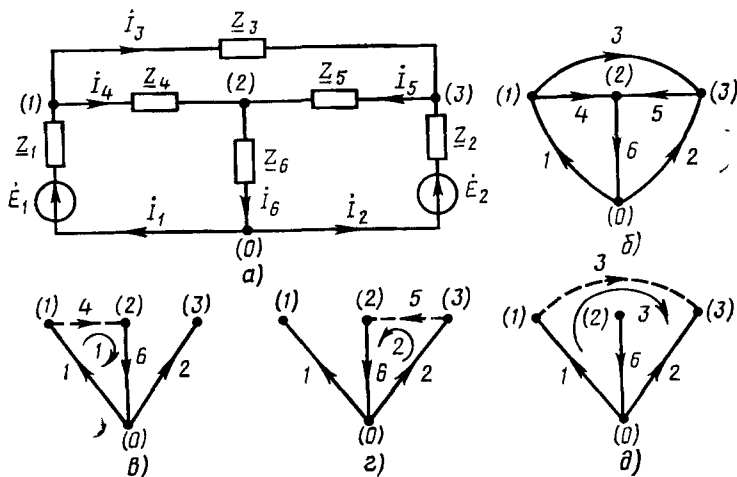


Рис. 4.1. К примеру 4.1

жение неизвестно). Выберем дерево графа цепи таким образом, чтобы ветви, содержащие источники тока, не входили бы в число ветвей дерева, т. е. являлись бы главными ветвями. Тогда напряжения этих ветвей будут фигурировать только в  $p_{ит}$  уравнениях баланса напряжений, составленных для главных контуров, замыкаемых ветвями, со-

держателями источников тока. Выражая в остальных  $p - p_{ит} - q + 1$  уравнениях, составленных на основании второго закона Кирхгофа, напряжения ветвей через токи этих же ветвей, получим в сочетании с  $q - 1$  уравнениями, составленными на основании первого закона Кирхгофа,  $p - p_{ит}$  уравнений для определения  $p - p_{ит}$  неизвестных токов ветвей.



**Пример 4.2.** Используя метод токов ветвей, составим систему уравнений электрического равновесия цепи, эквивалентная схема которой для мгновенных значений приведена на рис. 1.39, а комплексная схема замещения — на рис. 4.2, а.

Как было показано в примере 1.7, основная система уравнений электрического равновесия этой цепи включает в себя 4 компонентных уравнения и 6 уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа. Если дерево графа выбрано таким образом, что ветвь, содержащая источник тока, вошла в число главных ветвей (рис. 4.2, б), то напряжение этой ветви будет фигурировать только в одном уравнении, составленном на основании второго закона Кирхгофа.

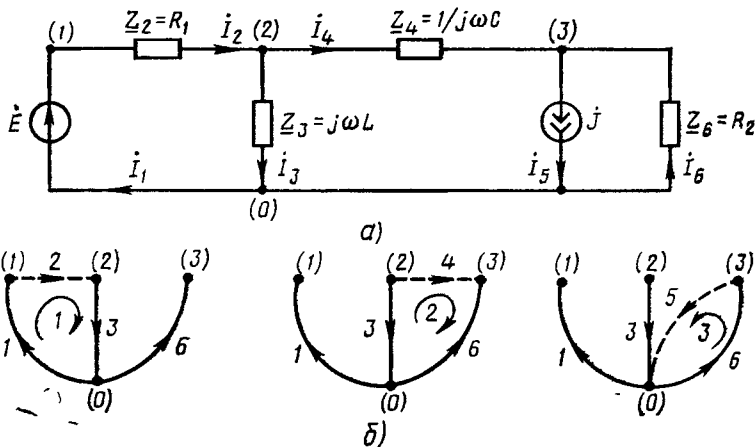


Рис 4.2. К примеру 4.2

Это уравнение, после нахождения токов всех ветвей, можно использовать для определения неизвестного напряжения на источнике тока. Выражая в оставшихся уравнениях напряжения всех ветвей через соответствующие токи, получим систему уравнений для определения пяти неизвестных токов ветвей:

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 &= 0; & \underline{Z}_2 i_2 + \underline{Z}_3 i_3 &= \dot{E}; \\ -i_2 + i_3 + i_4 &= 0; & -\underline{Z}_3 i_3 + \underline{Z}_4 i_4 - \underline{Z}_6 i_6 &= 0; \\ -i_4 + j - i_6 &= 0; \end{aligned}$$

Далее будет показано, что число ветвей цепи, токи которых могут быть заданы независимо, не может превышать числа главных контуров цепи  $p - q + 1$ . Когда  $p_{ит} = p - q + 1$ , число неизвестных токов ветвей будет равно  $q - 1$  и они могут быть определены из  $q - 1$  уравнения баланса токов.

В связи с тем что напряжения на связанных индуктивностях выражаются через токи этих индуктивностей, метод токов ветвей может быть применен и для составления уравнений электрического равновесия цепей со связанными индуктивностями (см. пример 2.13).

Дуальным по отношению к методу токов ветвей является метод напряжений ветвей. При составлении системы уравнений электрического равновесия цепи с помощью этого метода в качестве независимых переменных используют неизвестные напряжения  $p - p_{ин}$  ветвей. Система уравнений электрического равновесия в этом случае включает в себя  $p - q + 1$  уравнений баланса напряжений и  $q - p_{ин} - 1$  уравнений баланса токов, причем неизвестные токи всех ветвей, входящие в эти уравнения, должны быть выражены через напряжения этих же ветвей. Число ветвей, напряжения которых могут быть заданы независимо, не может превышать числа независимых узлов  $q - 1$ . Когда число ветвей, составленных только из независимых источников напряжения, равно числу независимых узлов ( $p_{ин} = q - 1$ ), число неизвестных напряжений ветвей равно числу независимых контуров  $p - q + 1$  и они могут быть определены из  $p - q + 1$  уравнений баланса напряжений.

Метод напряжений ветвей в общем случае нельзя использовать для формирования уравнений электрического равновесия цепей со связанными индуктивностями. Это связано с тем, что токи таких индуктивностей могут быть выражены через соответствующие напряжения только при коэффициенте связи между индуктивностями, меньшем единицы. Это следует из соотношений, полученных для токов связанных индуктивностей, выраженных через напряжения с использованием (2.165):

$$I_1 = (L_2 \dot{U}_1 \mp M \dot{U}_2) / [j\omega (L_1 L_2 - M^2)]; \quad I_2 = (L_1 \dot{U}_2 \mp M \dot{U}_1) / [j\omega (L_1 L_2 - M^2)].$$

Полученные выражения имеют смысл только при  $M \neq \sqrt{L_1 L_2}$ , т. е. при  $k_M < 1$ . Таким образом, метод напряжений ветвей является менее общим, чем метод токов ветвей.

Итак, методы формирования уравнений электрического равновесия цепи, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа, позволяют уменьшить число одновременно решаемых уравнений от  $2p - p_{ит} - p_{ин}$  до  $p - p_{ит}$  или  $p - p_{ин}$ .

## Метод контурных токов

Метод контурных токов основан на важной топологической особенности электрических цепей, вытекающей из первого закона Кирхгофа и заключающейся в том, что токи всех ветвей цепи могут быть выражены через токи главных ветвей. Для определения токов главных ветвей (контурных токов) составляют систему из  $p - p_{ит} - q + 1$  уравнений, называемых контурными уравнениями. Рассмотрим методику формирования контурных уравнений на примере простой цепи, не содержащей источников тока, схема которой приведена на рис. 4.1, а. Выбирая произвольно дерево графа этой цепи, убеждаем-

ся, что токи ветвей дерева однозначно выражаются через токи главных ветвей. В частности, используя дерево графа и соответствующую ему систему контуров, изображенных на рис. 4.1,  $\sigma-\partial$ , находим на основании первого закона Кирхгофа, что токи ветвей дерева  $I_1, I_2, I_6$  могут быть выражены через токи главных ветвей  $I_3, I_4, I_5$ :

$$I_1 = I_3 + I_4; I_2 = I_5 - I_3; I_6 = I_4 + I_5. \quad (4.5)$$

Таким образом, если каким-либо образом определить токи главных ветвей, то далее, используя соотношения (4.5), можно найти токи остальных ветвей цепи, а затем найти неизвестные напряжения ветвей. Следовательно, для полного описания процессов в цепи достаточно определить только токи главных ветвей исследуемой цепи. Из соотношения (4.5) также следует, что максимальное количество токов ветвей, которые могут быть заданы независимо, не может превышать числа главных ветвей.

Для определения токов главных ветвей цепи (см. рис. 4.1) воспользуемся уравнениями, составленными на основании второго закона Кирхгофа, выразив входящие в них напряжения ветвей через токи главных ветвей. Подставляя (4.3), (4.5) в уравнение (4.2), получаем

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) I_4 + \underline{Z}_6 I_5 + \underline{Z}_1 I_3 &= \underline{E}_1; \\ \underline{Z}_6 I_4 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) I_5 - \underline{Z}_2 I_3 &= \underline{E}_2; \\ \underline{Z}_1 I_4 - \underline{Z}_2 I_5 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) I_3 &= \underline{E}_1 - \underline{E}_2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Разумеется, решить контурные уравнения (4.6), легче, чем основную систему уравнений электрического равновесия цепи (4.1)—(4.3) или систему уравнений (4.4).

На практике контурные уравнения формируют с помощью простого алгоритма, не прибегая к составлению основной системы уравнений электрического равновесия, поэтому применение этого метода позволяет упростить и составление, и решение уравнений электрического равновесия цепи. Для того чтобы сформулировать правила составления контурных уравнений, введем ряд новых понятий.

Собственным сопротивлением  $\underline{Z}_{(ii)}$   $i$ -го контура назовем сумму сопротивлений всех ветвей, входящих в этот контур. В цепи (см. рис. 4.1, а) выделено три независимых контура (см. рис. 4.1,  $\sigma-\partial$ ); их собственные сопротивления

$$\underline{Z}_{(11)} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6; \underline{Z}_{(22)} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6; \underline{Z}_{(33)} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3. \quad (4.7)$$

В каждом из уравнений (4.6) имеется член, равный произведению собственного сопротивления  $i$ -го контура на ток главной ветви, входящей в данный контур. Этот член можно рассматривать как падение напряжения на собственном сопротивлении  $i$ -го контура, вызванное током главной ветви, если бы он протекал через все ветви, входящие в

данный контур, т. е. замыкался бы в  $i$ -м контуре. Такой ток называется контурным током. Таким образом, контурный ток  $i$ -го контура  $\dot{I}_{ii}$  равен току главной ветви, входящей в данный контур. Направление контурного тока во всех элементах контура совпадает с направлением его обхода, т. е. с направлением соответствующей главной ветви. Для цепи, схема которой представлена на рис. 4.1, имеем

$$\dot{I}_{11} = \dot{I}_4; \dot{I}_{22} = \dot{I}_5; \dot{I}_{33} = \dot{I}_3. \quad (4.8)$$

Как следует из (4.5) и (4.8), токи всех ветвей цепи могут быть выражены через контурные токи этой цепи.

Взаимным, или общим, сопротивлением  $i$ -го и  $j$ -го контуров называется сопротивление  $\underline{Z}_{(ij)}$ , равное сумме сопротивлений ветвей, общих для этих контуров. Взаимное сопротивление  $\underline{Z}_{(ij)}$  берется со знаком плюс, если контурные токи рассматриваемых контуров протекают через общие для этих контуров ветви в одинаковом направлении; если контурные токи в общих ветвях имеют противоположные направления, то взаимное сопротивление берут со знаком минус. Если рассматриваемые контуры не имеют общих ветвей, то их взаимное сопротивление равно нулю. Взаимные сопротивления контуров цепи (см. рис. 4.1)

$$\underline{Z}_{(12)} = \underline{Z}_{(21)} = \underline{Z}_6; \underline{Z}_{(23)} = \underline{Z}_{(32)} = -\underline{Z}_2; \underline{Z}_{(13)} = \underline{Z}_{(31)} = \underline{Z}_1. \quad (4.9)$$

Контурной э. д. с.  $\dot{E}_{ii}$   $i$ -го контура называется алгебраическая сумма э. д. с. всех идеализированных источников напряжения, входящих в данный контур. Если направление э. д. с. какого-либо источника, входящего в  $i$ -й контур, совпадает с направлением контурного тока этого контура, то соответствующая э. д. с. входит в  $\dot{E}_{ii}$  со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус. Контурные э. д. с. рассматриваемой цепи

$$\dot{E}_{11} = \dot{E}_1; \dot{E}_{22} = \dot{E}_2; \dot{E}_{33} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2. \quad (4.10)$$

Используя обозначения (4.7)—(4.10), представим контурные уравнения (4.6) в канонической форме записи:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(11)} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{(12)} \dot{I}_{22} + \underline{Z}_{(13)} \dot{I}_{33} &= \dot{E}_{11}; \\ \underline{Z}_{(21)} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{(22)} \dot{I}_{22} + \underline{Z}_{(23)} \dot{I}_{33} &= \dot{E}_{22}; \\ \underline{Z}_{(31)} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{(32)} \dot{I}_{22} + \underline{Z}_{(33)} \dot{I}_{33} &= \dot{E}_{33}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Анализируя (4.11), нетрудно установить, что все контурные уравнения имеют одинаковую структуру: левая часть контурного уравнения есть сумма членов, один из которых равен произведению контурного тока соответствующего контура на собственное сопротивление этого контура, а остальные — произведениям контурных токов других контуров на взаимные сопротивления этого контура и других контуров; правая часть контурного уравнения содержит только один член — контурную э. д. с. рассматриваемого контура.



где  $\Delta$  — определитель системы уравнений (4.13);  $\Delta_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $Z_{(ik)}$  этого определителя. В аналогичной форме могут быть записаны выражения для контурных токов всех остальных контуров. Следует отметить, что формулы Крамера, позволяющие получить в явной форме аналитические выражения для контурных токов, нашли применение лишь при теоретическом исследовании свойств электрических цепей. Вычисление значений контурных токов при  $n > 3$  с помощью формулы Крамера является весьма трудоемким. Поэтому на практике обычно используют более экономичные методы, такие, например, как метод исключения Гаусса или  $LU$ -образование [4, 5].

Если электрическая цепь помимо сопротивлений, емкостей, индуктивностей и независимых источников напряжения содержит также независимые источники тока, то последние с помощью рассмотренных в § 2.6 преобразований можно заменить независимыми источниками напряжения. Однако систему контурных уравнений такой цепи можно составить и не прибегая к преобразованию источников.

Пусть в состав исследуемой цепи входит  $p_{нт}$  ветвей, включающих независимые источники тока. Выберем дерево цепи таким образом, чтобы ветви с источниками тока вошли в состав главных ветвей. Очевидно, что контурные токи контуров, которые замыкаются главными ветвями, содержащими источники тока, равны токам соответствующих независимых источников. Эти токи заданы и не требуют определения. Таким образом, число неизвестных контурных токов меньше числа независимых контуров  $n = p - q + 1$  на  $p_{нт}$ . Для определения неизвестных контурных токов необходимо составить систему из  $p - p_{нт} - q + 1$  контурных уравнений для контуров, не содержащих ветвей с источниками тока. Контурные уравнения такой цепи могут быть записаны в такой же форме, как и контурные уравнения цепи, не содержащей источников тока (4.12), (4.13), однако матрица контурных сопротивлений в этом случае будет не квадратной: число столбцов будет равно числу независимых контуров  $n = p - q + 1$ , а число строк — числу неизвестных контурных токов  $p - p_{нт} - q + 1$ . После формирования контурных уравнений в форме (4.12), (4.13) входящие в каждое уравнение члены, содержащие известные контурные токи, переносят в правую часть соответствующих уравнений.



**Пример 4.3.** Составим систему контурных уравнений для цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а. Число ветвей этой цепи  $p = 6$ , число узлов  $q = 4$ , число ветвей, содержащих источники тока,  $p_{нт} = 1$ . Выберем дерево графа цепи таким образом, чтобы ветвь с источником тока вошла в число главных ветвей. Соответствующая выбранному дереву система независимых контуров изображена на рис. 4.2, б. В связи с тем что число независимых контуров цепи равно  $p - q + 1 = 3$ , а число неизвестных контурных токов  $p - p_{нт} - q + 1 = 2$ , система контурных уравнений имеет вид

$$\underline{Z}_{(11)} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{(12)} \dot{I}_{22} + \underline{Z}_{(13)} \dot{I}_{33} = \dot{E}_{11};$$

$$\underline{Z}_{(21)} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{(22)} \dot{I}_{22} + \underline{Z}_{(23)} \dot{I}_{33} = \dot{E}_{22},$$

где  $\underline{I}_{11} = \underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_{22} = \underline{I}_4$  — неизвестные контурные токи первого и второго контуров;  $\underline{I}_{33} = \underline{I}_5 = \underline{J}$  — известный контурный ток третьего контура;  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$ ;  $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6$  — собственные сопротивления первого и второго контуров;  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{(21)} = -\underline{Z}_3$ ,  $\underline{Z}_{(23)} = -\underline{Z}_6$ ,  $\underline{Z}_{(13)} = 0$  — взаимные сопротивления контуров;  $\underline{E}_{11} = \underline{E}$ ,  $\underline{E}_{22} = 0$  — контурные э.д.с. первого и второго контуров.

Переносим члены, содержащие известный контурный ток, в правую часть уравнений и выражая собственные и взаимные сопротивления контуров через параметры элементов рассматриваемой цепи, получаем окончательно

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{I}_{11} - \underline{Z}_3 \underline{I}_{22} &= \underline{E}; \\ -\underline{Z}_3 \underline{I}_{11} + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) \underline{I}_{22} &= \underline{Z}_6 \underline{J}. \end{aligned}$$

Таким образом, система контурных уравнений рассматриваемой цепи содержит два уравнения для определения двух неизвестных контурных токов.

Метод контурных токов можно использовать и для составления уравнений электрического равновесия цепей со связанными индуктивностями, однако алгоритм формирования матрицы контурных сопротивлений при этом усложняется. Поэтому при анализе цепей с взаимной индуктивностью целесообразно либо заменять связанные индуктивности участками цепей, не содержащими связанных индуктивностей, либо формировать уравнения электрического равновесия с помощью метода токов ветвей.

В ряде случаев при составлении контурных уравнений в качестве независимых удобно выбирать не главные контуры, а контуры, соответствующие ячейкам графа рассматриваемой цепи. Следует, однако, иметь в виду, что такой подход применим только к анализу цепей, граф которых является планарным.

## Метод узловых напряжений

При составлении уравнений электрического равновесия цепи по методу напряжений ветвей в качестве независимых переменных были использованы  $p - p_{\text{ин}}$  неизвестных напряжений. Принимая во внимание, что напряжения ветвей связаны  $p - q + 1$  уравнениями баланса напряжений, количество независимых напряжений, относительно которых формируется система уравнений электрического равновесия цепи, может быть уменьшено до  $q - p_{\text{ин}} - 1$ . Если дерево графа цепей выбрано так, что ветви, содержащие только независимые источники напряжения, вошли в число ветвей дерева, то в качестве независимых переменных можно выбрать неизвестные  $q - p_{\text{ин}} - 1$  напряжения ветвей дерева. Такой метод формирования сокращенной системы уравнений электрического равновесия цепи называется методом напряжений ветвей дерева. Этот метод не получил широкого распространения.

В качестве независимых переменных, относительно которых формируют уравнения электрического равновесия цепи, удобно использовать так называемые **узловые напряжения**, т. е. напряжения независимых узлов рассматриваемой цепи относительно базисного. Можно показать, что *напряжения всех ветвей электрической це-*



ли могут быть выражены через узловые напряжения этой цепи. Действительно, напряжение некоторой ветви, включенной между  $i$ -м и базисным узлами, равно узловому напряжению  $i$ -го узла  $\dot{U}_{i0}$ , взятого со знаком плюс или минус в зависимости от направления напряжения этой ветви, а напряжение ветви, включенной между  $i$ -м и  $j$ -м узлами (рис. 4.3), — разности узловых напряжений этих узлов  $\dot{U}_{i0} - \dot{U}_{j0}$ .

Если исследуемая цепь не содержит независимых источников напряжения, то все  $q - 1$  неизвестные узловые напряжения независимы. Если цепь содержит  $p_{\text{ин}}$  ветвей, составленных только из независимых

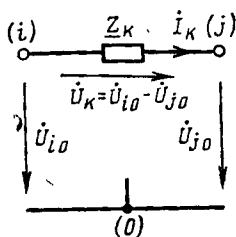


Рис. 4.3. К определению понятия узлового напряжения

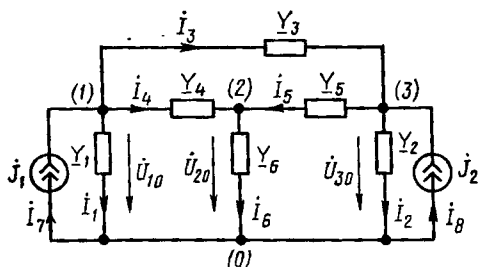


Рис. 4.4. К составлению уравнений электрического равновесия методом узловых напряжений

источников напряжения, то узловые напряжения  $p_{\text{ин}}$  узлов могут быть выражены через  $q - p_{\text{ин}} - 1$  независимых узловых напряжения, для определения которых записывают  $q - p_{\text{ин}} - 1$  уравнений электрического равновесия цепи, называемых **у з л о в ы м и**. Метод формирования уравнений электрического равновесия цепи, в котором в качестве независимых переменных используются неизвестные напряжения независимых узлов относительно базисного, называется **методом узловых напряжений**.

Рассмотрим метод формирования узловых уравнений на примере цепи, не содержащей источников напряжения (рис. 4.4). Рассматриваемая цепь получена из цепи, схема которой изображена на рис. 4.1, *a*, путем преобразования источников напряжения в источники тока и замены комплексных сопротивлений ветвей их комплексными проводимостями. Она имеет три независимых узла, для которых можно составить уравнения баланса токов

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 + I_4 - J_1 &= 0; \\ -I_4 - I_5 + I_6 &= 0; \\ I_2 - I_3 + I_5 - J_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Выразим неизвестные токи ветвей цепи через напряжения этих ветвей, а напряжения ветвей — через соответствующие узловые напряжения:

$$\begin{aligned} I_1 &= \underline{Y}_1 \dot{U}_1 = \underline{Y}_1 \dot{U}_{10}; & I_4 &= \underline{Y}_4 \dot{U}_4 = \underline{Y}_4 (\dot{U}_{10} - \dot{U}_{20}); \\ I_2 &= \underline{Y}_2 \dot{U}_2 = \underline{Y}_2 \dot{U}_{30}; & I_5 &= \underline{Y}_5 \dot{U}_5 = \underline{Y}_5 (\dot{U}_{30} - \dot{U}_{20}); \\ I_3 &= \underline{Y}_3 \dot{U}_3 = \underline{Y}_3 (\dot{U}_{10} - \dot{U}_{30}); & I_6 &= \underline{Y}_6 \dot{U}_6 = \underline{Y}_6 \dot{U}_{20}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Подставляя выражения (4.16) в (4.15), получим систему уравнений для определения трех неизвестных узловых напряжений

$$\begin{aligned} (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) \dot{U}_{10} - \underline{Y}_4 \dot{U}_{20} - \underline{Y}_3 \dot{U}_{30} &= \dot{J}_1; \\ -\underline{Y}_4 \dot{U}_{10} + (\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6) \dot{U}_{20} - \underline{Y}_5 \dot{U}_{30} &= 0; \\ -\underline{Y}_3 \dot{U}_{10} - \underline{Y}_5 \dot{U}_{20} + (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5) \dot{U}_{30} &= \dot{J}_2. \end{aligned}$$

Введем ряд новых понятий. Собственной проводимостью  $\underline{Y}_{(ii)}$   $i$ -го узла будем называть сумму проводимостей всей ветвей, подключенных к данному узлу. Для рассматриваемой цепи

$$\underline{Y}_{(11)} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4; \quad \underline{Y}_{(22)} = \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6; \quad \underline{Y}_{(33)} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_5. \quad (4.17)$$

Взаимная проводимость  $i$ -го и  $j$ -го узлов — это сумма проводимостей всех ветвей, включенных непосредственно между этими узлами, взятая с противоположным знаком. Если в цепи отсутствуют ветви, включенные непосредственно между  $i$ -м и  $j$ -м узлами, то  $\underline{Y}_{(ij)} = 0$ . Для цепи, схема которой приведена на рис. 4.4:

$$\underline{Y}_{(12)} = \underline{Y}_{(21)} = -\underline{Y}_4; \quad \underline{Y}_{(23)} = \underline{Y}_{(32)} = -\underline{Y}_5; \quad \underline{Y}_{(13)} = \underline{Y}_{(31)} = -\underline{Y}_3. \quad (4.18)$$

Узловым током  $\dot{J}_{i0}$   $i$ -го узла называется алгебраическая сумма токов всех источников тока, подключенных к данному узлу. Если ток какого-либо источника тока направлен к  $i$ -му узлу, то он входит в  $\dot{J}_{i0}$  со знаком плюс, если ток направлен от  $i$ -го узла, то он входит в  $\dot{J}_{i0}$  со знаком минус. Для рассматриваемой цепи

$$\dot{J}_{10} = \dot{J}_1; \quad \dot{J}_{20} = 0; \quad \dot{J}_{30} = \dot{J}_2. \quad (4.19)$$

Используя обозначения (4.17)—(4.19), представим узловые уравнения исследуемой цепи в канонической форме записи

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{(11)} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{(12)} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{(13)} \dot{U}_{30} &= \dot{J}_{10}; \\ \underline{Y}_{(21)} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{(22)} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{(23)} \dot{U}_{30} &= \dot{J}_{20}; \\ \underline{Y}_{(31)} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{(32)} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{(33)} \dot{U}_{30} &= \dot{J}_{30} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Итак, левая часть любого узлового уравнения, составленного для  $i$ -го независимого узла, есть сумма членов, один из которых равен произведению узлового напряжения  $i$ -го узла на его собственную проводимость, а остальные — произведениям узловых напряжений других независимых узлов на взаимные проводимости  $i$ -го узла и этих узлов. Правая часть каждого уравнения равна узловому току соответствующего узла.

Таким образом, составить узловые уравнения, как и контурные, можно непосредственно по схеме электрической цепи. Написание уравнений электрического равновесия цепи по методу узловых напряжений упрощается еще за счет того, что не возникает необходимости определять систему независимых контуров и строить дерево графа.

Для линейной электрической цепи, имеющей  $m = q - 1$  независимых узлов и состоящей только из сопротивлений, емкостей, индуктивностей и независимых источников тока, система узловых уравнений может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{(11)} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{(12)} \dot{U}_{20} + \dots + \underline{Y}_{(1m)} \dot{U}_{m0} &= \dot{J}_{10}; \\ \underline{Y}_{(21)} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{(22)} \dot{U}_{20} + \dots + \underline{Y}_{(2m)} \dot{U}_{m0} &= \dot{J}_{20}; \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\dots \dots \dots \underline{Y}_{(m1)} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{(m2)} \dot{U}_{20} + \dots + \underline{Y}_{(mm)} \dot{U}_{m0} = \dot{J}_{m0}$$

или

$$\underline{Y}_{(ij)} \dot{U}_{i0} = \dot{J}_{i0}, \quad (4.22)$$

где

$$\underline{Y}_{(ij)} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(11)} & \underline{Y}_{(12)} & \dots & \underline{Y}_{(1m)} \\ \underline{Y}_{(21)} & \underline{Y}_{(22)} & \dots & \underline{Y}_{(2m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{(m1)} & \underline{Y}_{(m2)} & \dots & \underline{Y}_{(mm)} \end{bmatrix} -$$

матрица узловых проводимостей цепи;

$$\dot{U}_{i0} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dots \\ \dot{U}_{m0} \end{bmatrix};$$

$$\dot{J}_{i0} = \begin{bmatrix} \dot{J}_{10} \\ \dot{J}_{20} \\ \dots \\ \dot{J}_{m0} \end{bmatrix} -$$

матрицы-столбцы узловых напряжений и узловых токов.

Можно убедиться, что для цепей рассматриваемого типа всегда выполняется условие  $\underline{Y}_{(ij)} = \underline{Y}_{(ji)}$ , поэтому матрица узловых проводимостей таких цепей квадратная и симметричная относительно главной диагонали.

Решая систему узловых уравнений любым из способов, определяют все неизвестные узловые напряжения. Так, используя формулы Крамера, найдем узловое напряжение  $k$ -го узла:

$$\dot{U}_{k0} = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} j_{10} + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} j_{20} + \dots + \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} j_{m0} = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} j_{i0}. \quad (4.23)$$

Здесь  $\Delta$  — определитель системы уравнений (4.22);  $\Delta_{ik}$  — алгебраическое дополнение элемента  $\underline{Y}_{(ik)}$  этого определителя.

Если цепь содержит также независимые источники напряжения, то их можно либо заменить на источники тока, либо составить для цепи систему узловых уравнений без такой замены.

Пусть в рассматриваемой цепи имеется  $p_{\text{ин}}$  независимых источников напряжения. Очевидно, что узловые напряжения двух узлов, между которыми включен независимый источник напряжения, отличаются только на э. д. с. этого источника. Поэтому число независимых узловых напряжений цепи уменьшается от  $q - 1$  до  $p - p_{\text{ин}} - 1$ , причем такие уравнения составляют только для узлов, напряжения которых выбраны в качестве независимых. Матрица узловых проводимостей цепи, содержащей независимые источники напряжения, будет не квадратной: число столбцов этой матрицы равно числу независимых узлов  $m = q - 1$ , а число строк — числу независимых узловых напряжений  $q - p_{\text{ин}} - 1$ . После формирования системы уравнений электрического равновесия цепи в виде (4.21), (4.22) члены, содержащие известные узловые напряжения, переносят в правую часть соответствующих уравнений.

В простейшем случае исследуемая цепь может содержать  $p_{\text{ин}}$  источников напряжения, имеющих общую точку. Выберем узел, к которому подключены все источники напряжения, в качестве базисного. Тогда узловые напряжения  $p_{\text{ин}}$  узлов, к которым подключены вторые полюсы источников напряжения, будут равны напряжениям этих источников, а систему узловых уравнений составляют только для узлов, к которым не подключены источники напряжения.



**Пример 4.4.** *Используя метод узловых напряжений, составим уравнения электрического равновесия цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а. Эта цепь содержит  $q - 1 = 3$  независимых узла и имеет один источник напряжения  $\dot{E}$ , включенный между базисным узлом и узлом 1. Узловое напряжение этого узла  $\dot{U}_{10}$  известно и равно  $\dot{E}$ . Для определения неизвестных узловых напряжений  $\dot{U}_{20}$  и  $\dot{U}_{30}$  составляем два узловых уравнения*

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{(21)} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{(22)} \dot{U}_{20} - \underline{Y}_{(23)} \dot{U}_{30} &= 0; \\ \underline{Y}_{(31)} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{(32)} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{(33)} \dot{U}_{30} &= -\dot{J}. \end{aligned}$$

Здесь  $\underline{Y}_{(22)} = 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3 + 1/\underline{Z}_4$ ,  $\underline{Y}_{(33)} = 1/\underline{Z}_4 + 1/\underline{Z}_6$  — собственные проводимости узлов 2 и 3;  $\underline{Y}_{(31)} = 0$ ,  $\underline{Y}_{(21)} = -1/\underline{Z}_2$ ,  $\underline{Y}_{(23)} = \underline{Y}_{(32)} = -1/\underline{Z}_4$  — взаимные проводимости узлов рассматриваемой цепи.

Переноса члены, содержащие известное узловое напряжение  $\dot{U}_{10} = \dot{E}$ , в правую часть уравнений и выражая собственные и взаимные проводимости узлов через параметры элементов цепи, получаем

$$\begin{aligned} (1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3 + 1/\underline{Z}_4) \dot{U}_{20} - \dot{U}_{30}/\underline{Z}_4 &= \dot{E}/\underline{Z}_2; \\ -\dot{U}_{20}/\underline{Z}_4 + (1/\underline{Z}_4 + 1/\underline{Z}_6) \dot{U}_{30} &= -j. \end{aligned}$$

Аналогичная система уравнений электрического равновесия цепи получается и в том случае, когда источник напряжения  $\dot{E}$  заменяют источником тока  $\dot{E}/\underline{Z}_2$ , подключенным между узлом 2 и базисным (узел 1 в этом случае устраняется).

Метод узловых напряжений можно использовать и для анализа цепей с взаимной индуктивностью (при  $k_M < 1$ ), однако алгоритм формирования узловых уравнений в этом случае значительно усложняется.

### Формирование уравнений электрического равновесия цепей с зависимыми источниками

При формировании уравнений электрического равновесия цепей с зависимыми источниками следует различать источники, управляемые током или напряжением какой-либо не вырожденной, т. е. не содержащей источников тока и не составленной только из источников напряжения, ветви и источники, у которых управляющее воздействие не является током или напряжением какой-либо невырожденной ветви. Наличие в исследуемой цепи управляемых источников первого типа не накладывает никаких ограничений на применение ранее рассмотренных методов формирования уравнений электрического равновесия цепи. Включение в цепь управляемых источников второго типа может существенно усложнить анализ и сделать невозможным применение тех или иных методов формирования уравнений электрического равновесия.

Рассмотрим методику формирования уравнений электрического равновесия цепей, содержащих зависимые источники, управляемые током или напряжением какой-либо невырожденной ветви. Для таких цепей источники, управляемые напряжением, можно преобразовать в источники, управляемые током, и наоборот. Пусть в исследуемой цепи имеются источники напряжения и тока, управляемые напряжением  $a$ -й ветви:

$$\dot{E} = \underline{K} \dot{U}_a; \quad j = \underline{S} \dot{U}_a, \quad (4.24)$$

где  $\underline{K}$  и  $\underline{S}$  — коэффициенты управления источников.

Используя компонентное уравнение  $a$ -й ветви, напряжение  $\dot{U}_a$  в соотношениях (4.24) можно выразить через ток этой ветви  $\dot{I}_a$ , при этом источник, управляемый напряжением, преобразуется в источник, управляемый током. В простейшем случае связь напряжения и тока  $a$ -й ветви описывается законом Ома в комплексной форме

$$\dot{U}_a = \underline{Z}_a \dot{I}_a. \quad (4.25)$$

Подставляя (4.25) в (4.24), получаем

$$\dot{E} = (\underline{K} \underline{Z}_a) \dot{I}_a; \quad J = (\underline{S} \underline{Z}_a) \dot{I}_a.$$

Аналогичным образом можно преобразовать источники, управляемые током какой-либо ветви, в источники, управляемые напряжением этой же ветви.

При составлении основной системы уравнений электрического равновесия цепей, содержащих зависимые источники напряжения или тока рассматриваемого типа, эти источники учитывают в уравнениях, составленных на основании законов Кирхгофа, наряду с независимыми источниками, а затем токи и э. д. с. зависимых источников выражают через соответствующие управляющие воздействия. В связи с тем что управляющие воздействия представляют собой токи и напряжения ветвей цепи, в основной системе уравнений электрического равновесия цепи не появится новых неизвестных токов или напряжений. При формировании уравнений электрического равновесия цепи по методу токов ветвей токи и э. д. с. управляемых источников должны быть выражены через неизвестные токи ветвей, а при формировании таких уравнений по методу напряжений ветвей — через неизвестные напряжения ветвей.



**Пример 4.5.** Используя метод токов ветвей, составим уравнения электрического равновесия цепи (см. рис. 4.2, а) при условии, что ток источника тока является функцией напряжения ветви, содержащей индуктивность:  $\dot{J} = \underline{S} \dot{U}_3$ .

Задача решается в два этапа. На первом — формируют систему уравнений по методу токов ветвей, в которой ток источника  $\dot{J}$  учитывается так же, как если бы это был ток независимого источника (см. пример 4.2):

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 &= 0; & \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3 &= \dot{E}; \\ -\dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 &= 0; & -\underline{Z}_3 \dot{I}_3 + \underline{Z}_4 \dot{I}_4 - \underline{Z}_6 \dot{I}_6 &= 0; \\ -\dot{I}_4 - \dot{I}_6 + \dot{J} &= 0. \end{aligned}$$

На втором — ток управляемого источника выражают через ток третьей ветви  $\dot{J} = \underline{S} \dot{U}_3 = (\underline{Z}_3 \underline{S}) \dot{I}_3$  и подставляют в полученную систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\dot{I}_1 + \dot{I}_2 &= 0; & \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_3 \dot{I}_3 &= E; \\ -\dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 &= 0; & -\underline{Z}_3 \dot{I}_3 + \underline{Z}_4 \dot{I}_4 - \underline{Z}_6 \dot{I}_6 &= 0; \\ -\dot{I}_4 + \underline{Z}_3 \underline{S} \dot{I}_3 - \dot{I}_6 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом получаем уравнения для определения пяти неизвестных токов ветвей, после решения которой и определения тока  $\dot{I}_3$  находят ток управляемого источника и напряжения всех ветвей.

Методом контурных токов можно построить систему уравнений электрического равновесия цепи, содержащей зависимые источники напряжения, управляемые током. Если цепь содержит зависимые источники других типов, то они должны быть преобразованы в источники напряжения, управляемые током. При составле-

нии контурных уравнений э. д. с. таких источников учитываются наравне с э. д. с. независимых источников, а затем переносятся в левую часть уравнений и выражаются через соответствующие контурные токи. Таким образом, наличие в исследуемой цепи источников э. д. с., управляемых током, приводит к изменению коэффициентов перед некоторыми из контурных токов и может обусловить несимметричность матрицы контурных сопротивлений относительно главной диагонали.

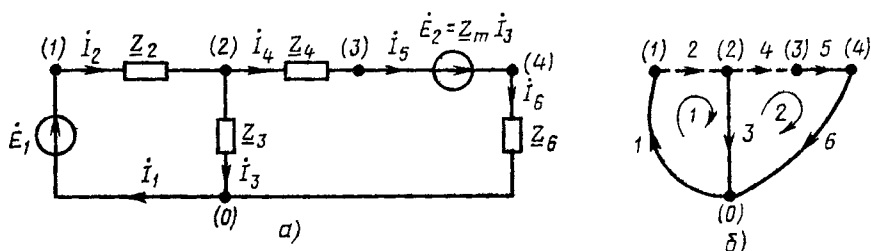


Рис. 4.5. К примеру 4.6

Пример 4.6. Составим систему контурных уравнений цепи (см. рис. 4.2) при условии, что ток источника тока является функцией напряжения на сопротивлении  $\underline{Z}_3$ :

$$j = \underline{S} \underline{U}_3.$$

Преобразуем схему рассматриваемой цепи таким образом, чтобы управляемый напряжением источник тока был заменен на управляемый током источник напряжения (рис. 4.5, а):

$$\dot{E}_2 = \underline{Z}_6 j = (\underline{Z}_6 \underline{S}) \dot{U}_3 = (\underline{Z}_6 \underline{S} \underline{Z}_3) \dot{I}_3 = \underline{Z}_m \dot{I}_3.$$

Выбрав систему независимых контуров (рис. 4.5, б), составим систему контурных уравнений цепи, в которой э. д. с.  $\dot{E}_2$  источника учтена так, как будто бы этот источник независимый:

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \dot{I}_{11} - \underline{Z}_3 \dot{I}_{22} &= \dot{E}_1; \\ -\underline{Z}_3 \dot{I}_{11} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) \dot{I}_{22} &= \dot{E}_2, \end{aligned}$$

где  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_2$ ;  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_4$ .

Далее переносим  $\dot{E}_2$  в левую часть контурных уравнений и выражая ее через контурные токи  $\dot{E}_2 = \underline{Z}_m \dot{I}_3 = \underline{Z}_m (\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22})$ , получаем

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \dot{I}_{11} - \underline{Z}_3 \dot{I}_{22} &= \dot{E}_1; \\ -(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_m) \dot{I}_{11} + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_m) \dot{I}_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Матрица контурных сопротивлений рассматриваемой цепи несимметрична относительно главной диагонали:

$$\underline{Z}_{(ij)} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3; & -\underline{Z}_3 \\ -(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_m); & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_m \end{bmatrix}.$$

Методом узловых напряжений можно составить систему уравнений электрического равновесия цепей, содержащих управляемые напряжением источники тока. Если цепь содержит зависимые источники других типов, то они должны быть заменены на источники тока, управляемые напряжением. При составлении узловых уравнений токи таких источников учитывают наравне с токами независимых источников, а затем выражают через соответствующие узловые напряжения. Наличие в рассматриваемой цепи управляемых источников, как правило, приводит к тому, что матрица узловых проводимостей цепи становится несимметричной относительно главной диагонали.

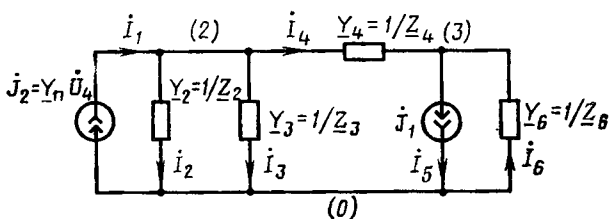


Рис. 4.6. К примеру 4.7



**Пример 4.7.** Составим узловые уравнения цепи (см. рис. 4.2, а) при условии, что э.д.с. источника напряжения является функцией тока  $\dot{E} = \underline{Z}_n \dot{I}_4$ .

Преобразуем схему рассматриваемой цепи таким образом, чтобы управляемый ток источник э.д.с. был заменен на управляемый напряжением источник тока  $\dot{J}_2$  (рис. 4.6):

$$\dot{J}_2 = \dot{E}_2 / \underline{Z}_2 = \underline{Z}_n \dot{I}_4 / \underline{Z}_2 = \underline{Z}_n \dot{U}_4 / (\underline{Z}_2 \underline{Z}_4) = \underline{Y}_n \dot{U}_4.$$

Составляем узловые уравнения преобразованной цепи, учитывая ток управляемого источника  $\dot{J}_2$  наравне с током независимого источника  $\dot{J}_1$ :

$$(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) \dot{U}_{20} - \underline{Y}_4 \dot{U}_{30} = \dot{J}_2;$$

$$-\underline{Y}_4 \dot{U}_{20} + (\underline{Y}_4 + \underline{Y}_6) \dot{U}_{30} = -\dot{J}_1.$$

Переносим ток управляемого источника  $\dot{J}_2$  в левую часть узловых уравнений и выражая его через узловые напряжения:  $\dot{J}_2 = \underline{Y}_n \dot{U}_4 = \underline{Y}_n (\dot{U}_{20} - \dot{U}_{30})$ , получаем

$$(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 - \underline{Y}_n) \dot{U}_{20} - (\underline{Y}_4 - \underline{Y}_n) \dot{U}_{30} = 0;$$

$$-\underline{Y}_4 \dot{U}_{20} + (\underline{Y}_4 + \underline{Y}_6) \dot{U}_{30} = -\dot{J}_1.$$

Из полученных уравнений видно, что матрица узловых проводимостей цепи несимметрична относительно главной диагонали:

$$\underline{Y}_{(ij)} = \begin{bmatrix} (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 - \underline{Y}_n); & -(\underline{Y}_4 - \underline{Y}_n) \\ -\underline{Y}_4; & \underline{Y}_4 + \underline{Y}_6 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим особенности формирования уравнений электрического равновесия цепей, содержащих зависимые источники, у которых управляющее воздействие не является током или напряжением какой-либо невырожденной ветви. Для таких цепей, как правило, нель-



зя выполнить преобразования, связанные с изменением вида управляющего воздействия, а при составлении уравнений электрического равновесия могут появляться дополнительные неизвестные — управляющие токи или напряжения, не являющиеся токами или напряжениями ветвей.

Чтобы получить достаточное количество уравнений для определения всех неизвестных токов и напряжений, в состав рассматриваемых цепей обычно включают дополнительные вырожденные ветви, соот-

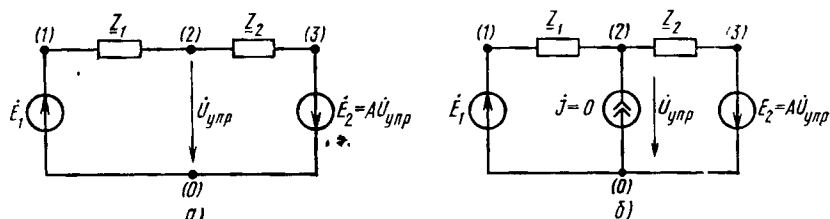


Рис. 4.7. Схема цепи, содержащей источник, управляемый напряжением, не являющимся напряжением невырожденной ветви (а), и включение в нее дополнительной вырожденной ветви (б)

ветствующие управляющим воздействиям зависимых источников. Так, если в цепи (рис. 4.7, а) имеется источник напряжения, э. д. с. которого зависит от напряжения  $\dot{U}_{ynp}$ , не являющегося напряжением какой-либо ветви, то для составления основной системы уравнений электрического равновесия эту цепь следует дополнить вырожденной

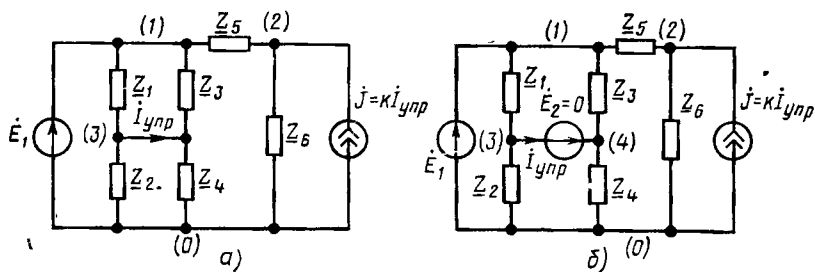


Рис. 4.8. Схема цепи, содержащей источник, управляемый током, не являющимся током невырожденной ветви (а), и включение в нее дополнительной вырожденной ветви (б)

ветвью (рис. 4.7, б), содержащей независимый источник тока  $J = 0$ , напряжение которого равно  $\dot{U}_{ynp}$ . Если электрическая цепь содержит зависимый источник тока  $\dot{J}$ , управляемый током  $\dot{I}_{ynp}$ , не являющимся током какой-либо ветви (рис. 4.8, а), то для составления основной системы уравнений электрического равновесия эту цепь следует дополнить вырожденной ветвью, содержащей независимый источник напряжения  $\dot{E}_2 = 0$  (рис. 4.8, б), ток которого равен  $\dot{I}_{ynp}$ . После вве-

дения дополнительных вырожденных ветвей основную систему уравнений электрического равновесия преобразованных цепей составляю по рассмотренным ранее правилам.

Если в цепи имеются источники, управляемые напряжением, которые не могут быть преобразованы в источники, управляемые током, то для составления уравнений электрического равновесия такой цепи нельзя воспользоваться методами токов ветвей и контурных токов; если в цепи имеются источники, управляемые током, которые не поддаются преобразованию в источники, управляемые напряжением, то для составления уравнений электрического равновесия оказываются неприменимыми методы напряжений ветвей и узловых напряжений.

На практике для формирования уравнений электрического равновесия используют тот из методов, в котором приходится определять меньшее количество независимых переменных. При  $p - p_{\text{ит}} - q + 1 > q - p_{\text{ин}} - 1$  рекомендуется применять метод узловых напряжений, в противном случае — метод контурных токов. Если количество решаемых уравнений окажется одинаковым, то предпочтение следует отдать методу узловых напряжений, в котором не требуется проведения трудоемкой (особенно для сложных, например непланарных, цепей) операции по выбору системы независимых контуров.

Использование рассмотренных методов, как правило, является целесообразным только в тех случаях, когда в результате анализа требуется определить все или значительное количество неизвестных токов или напряжений. Если надо определить реакцию цепи (ток или напряжение) только одной или небольшого количества ветвей, то упростить анализ цепи можно путем использования методов, основанных на применении важнейших теорем теории цепей (см. далее).

## § 4.2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

### Принцип наложения

Сформулированный в гл. 1 принцип наложения (суперпозиции) отражает важнейшее свойство линейных электрических цепей.

Это свойство состоит в том, что реакция таких цепей на произвольное внешнее воздействие, представляющее собой линейную комбинацию более простых воздействий, равна линейной комбинации реакций, вызванных каждым из простых воздействий в отдельности.

Из принципа наложения следует, что ток или напряжение любой ветви линейной электрической цепи, содержащей наряду с пассивными элементами зависимые и независимые источники тока и напряжения, равны сумме частных токов или напряжений, вызванных действием каждого независимого источника в отдельности.

Пусть цепь содержит независимые источники только одного типа, например источники напряжения. Контурный ток произвольного контура этой цепи может быть определен из выражения (4.14). Представляя все входящие в это выражение контурные э. д. с.  $\dot{E}_{ii}$  в виде

алгебраической суммы э. д. с. входящих в контур источников напряжений  $\dot{E}_j$  и приводя подобные члены, получаем

$$\dot{I}_{kk} = \underline{Y}_{k1} \dot{E}_1 + \underline{Y}_{k2} \dot{E}_2 + \dots + \underline{Y}_{kN} \dot{E}_N = \sum_{j=1}^N \underline{Y}_{kj} \dot{E}_j.$$

Здесь  $N$  — общее количество независимых источников э. д. с., входящих в состав цепи;  $\underline{Y}_{hj}$  — коэффициенты, представляющие собой алгебраические суммы слагаемых вида  $\Delta_{ih}/\Delta$ .

Так как  $\Delta$  и  $\Delta_{ih}$  определяются только параметрами матрицы контурных сопротивлений, т. е. параметрами пассивных элементов цепи и коэффициентами управления зависимых источников, то значения  $\underline{Y}_{hj}$  не зависят от э. д. с. независимых источников напряжения. Каждое из слагаемых вида  $\underline{Y}_{kj} \dot{E}_j$  можно рассматривать как частичный ток  $k$ -го контура, вызванный действием источника э. д. с.  $\dot{E}_j$ .

Действительно, если все входящие в цепь независимые источники э. д. с., кроме  $\dot{E}_j$ , выключены (заменены короткозамыкающими перемычками), то ток  $k$ -го контура

$$\dot{I}_{kk}^{(j)} = \underline{Y}_{kj} \dot{E}_j. \quad (4.26)$$

Следовательно, контурный ток любого контура линейной электрической цепи, содержащей независимые источники напряжения, равен сумме частичных токов, вызванных действием каждого из независимых источников напряжения в отдельности:

$$\dot{I}_{kk} = \sum_{j=1}^N \underline{Y}_{kj} \dot{E}_j = \sum_{j=1}^n \dot{I}_{kk}^{(j)}. \quad (4.27)$$

Из анализа выражений (4.26), (4.27) вытекает физический смысл коэффициентов  $\underline{Y}_{kj}$  — они представляют собой комплексные передаточные проводимости цепи от зажимов  $j-j'$ , к которым подключен независимый источник напряжения  $\dot{E}_j$ , к зажимам  $k-k'$ , к которым подключена ветвь с током  $\dot{I}_{kk}$ , причем каждая из комплексных передаточных проводимостей определяется в режиме, когда все независимые источники напряжения, кроме  $\dot{E}_j$ , выключены.

Если линейная электрическая цепь содержит независимые источники тока, то используя выражение (4.23), можно показать, что узловое напряжение каждого узла такой цепи равно сумме частичных узловых напряжений, вызванных каждым из источников тока в отдельности. При определении частичного узлового напряжения  $k$ -го узла, вызванного действием  $j$ -го источника тока, все остальные источники тока выключаются, т. е. ветви, содержащие эти источники, разрываются.

Пусть в рассматриваемой цепи имеется  $l$  независимых источников напряжения и  $m$  независимых источников тока. Присвоим ветвям, содержащим независимые источники напряжения, номера от 1 до  $l$ , а ветвям, содержащим независимые источники тока, от  $l+1$  до  $l+m$ . Составляя уравнения электрического равновесия такой цепи метода-

ми контурных токов или узловых напряжений и решая эти уравнения с помощью формул Крамера, находим ток и напряжение  $k$ -й ветви

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{j=1}^{l+m} \dot{I}_k^{(j)} = \sum_{j=1}^l \underline{Y}_{kj} \dot{E}_j + \sum_{j=l+1}^{l+m} \underline{G}_{kj} \dot{J}_j; \\ \dot{U}_k &= \sum_{j=1}^{l+m} \dot{U}_k^{(j)} = \sum_{j=1}^l \underline{K}_{kj} \dot{E}_j + \sum_{j=l+1}^{l+m} \underline{Z}_{kj} \dot{J}_j. \end{aligned}$$

Здесь  $\underline{G}_{kj} = G_{kj}(j\omega)$ ,  $\underline{K}_{kj} = K_{kj}(j\omega)$  — комплексные коэффициенты передачи цепи по току и напряжению;  $\underline{Y}_{kj} = Y_{kj}(j\omega)$ ,  $\underline{Z}_{kj} = Z_{kj}(j\omega)$  — комплексные передаточные проводимости и сопротивления. Каждая из величин  $\underline{G}_{kj}$ ,  $\underline{K}_{kj}$ ,  $\underline{Y}_{kj}$  и  $\underline{Z}_{kj}$  определяется в режиме, когда все независимые источники, кроме источника, находящегося в  $j$ -й ветви, выключены, т. е. представлены своими внутренними сопротивлениями.

На принципе наложения основан широко используемый на практике метод анализа цепей — метод наложения. Его удобно применять в тех случаях, когда по условиям задачи требуется определить ток или напряжение одной из ветвей электрической цепи, в состав которой входит несколько независимых источников. В соответствии с принципом наложения искомый ток (напряжение) представляют в виде суммы частичных токов (напряжений). Для определения частичных токов (напряжений) используют эквивалентные схемы цепи, получаемые из исходной путем выключения всех независимых источников, кроме одного, вызывающего соответствующий частичный ток (напряжение). Таким образом, задача анализа сложной цепи, содержащей несколько независимых источников энергии, заменяется рядом более простых задач по исследованию цепей с одним независимым источником. Следует обратить внимание на то, что при определении частичных токов выключаются только независимые источники тока или напряжения. Параметры зависимых источников учитываются в матрице узловых проводимостей или контурных сопротивлений и при определении частичных токов (напряжений) эти источники не выключаются.



**Пример 4.8.** Используя метод наложения, определим ток  $I_6$  электрической цепи, комплексная схема замещения которой приведена на рис. 4.2, а.

В соответствии с принципом наложения представим ток  $\dot{I}_6$  в виде суммы двух частичных токов  $\dot{I}_6^{(1)}$  и  $\dot{I}_6^{(2)}$ , вызванных действием источника напряжения  $\dot{E}$  и источника тока  $\dot{J}$  соответственно. Эквивалентные схемы для определения частичных токов приведены на рис. 4.9, а, б. Используя эквивалентные преобразования участков цепей со смешанным соединением элементов, определим частичные токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_6^{(1)} &= -\underline{Z}_3 \dot{E} / [\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)]; \\ \dot{I}_6^{(2)} &= [\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)] \dot{J} / [\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)], \end{aligned}$$

а затем, суммируя их, найдем искомый ток

$$\dot{I}_6 = \dot{I}_6^{(1)} + \dot{I}_6^{(2)} = \{[\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)] \dot{J} - \underline{Z}_3 \dot{E}\} / [\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)].$$

Из полученных выражений видно, что комплексный коэффициент передачи рассматриваемой цепи по току от зажимов 5—5' к зажимам 6—6' и комплексная передаточная проводимость этой цепи от зажимов 1—1' к зажимам 6—6' (номера зажимов совпадают с номерами ветвей) равны соответственно:

$$G_{65}(j\omega) = [\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)] / [\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)];$$

$$Y_{61}(j\omega) = -\underline{Z}_3 / [\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)].$$

Метод наложения оказывается весьма эффективным и при анализе линейных цепей, находящихся под воздействием колебаний сложной формы. В этом случае сложное внешнее воздействие представляют в

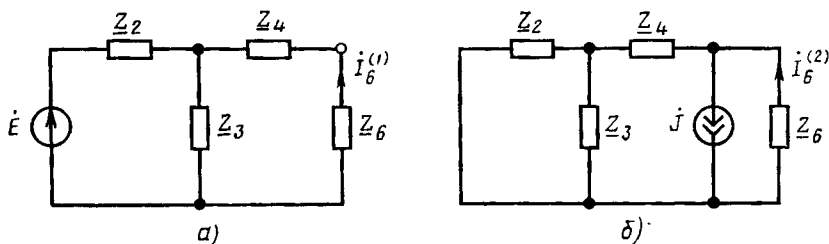


Рис. 4.9. К примеру 4.8

виде конечной или бесконечной суммы колебаний более простой формы, реакция цепи на воздействие которых может быть определена с помощью известных методов (подробнее см. гл. 6).

Необходимо отметить, что принцип наложения применим только для определения токов или напряжений линейной электрической цепи и не может быть использован для нахождения величин, которые не являются линейными функциями токов или напряжений. В частности, мощность, потребляемая каким-либо участком линейной электрической цепи, находящейся под воздействием нескольких независимых источников, не равна сумме мощностей, потребляемых этим же участком при воздействии каждого из независимых источников в отдельности.

### Теорема взаимности

При изучении методов формирования уравнений электрического равновесия было установлено, что матрицы контурных сопротивлений и узловых проводимостей линейных цепей, составленных только из сопротивлений, емкостей, индуктивностей и независимых источников тока или напряжения, являются симметричными относительно главной диагонали. Можно показать, что симметричность этих матриц не нарушится и в том случае, когда в цепи имеется произвольное количество связанных индуктивностей. На симметричности матриц узловых проводимостей и контурных сопротивлений основано важное свойство линейных пассивных электрических цепей, которое формулируется в виде теоремы взаимности, или обратимости.

Рассмотрим линейную пассивную электрическую цепь, составленную из сопротивлений, емкостей и индуктивностей (в том числе и связанных).

В соответствии с теоремой взаимности контурный ток  $k$ -го контура цепи, вызванный действием единственного независимого источника напряжения, помещенного в  $i$ -й контур, равен контурному току  $i$ -го контура, вызванному действием того же источника напряжения, перенесенного из  $i$ -го контура в  $k$ -й.

Для доказательства теоремы выделим из рассматриваемой цепи главные ветви  $k$ -го и  $i$ -го контуров, а остальную часть цепи изобразим в виде четырехполюсника. Если независимый источник напряжения

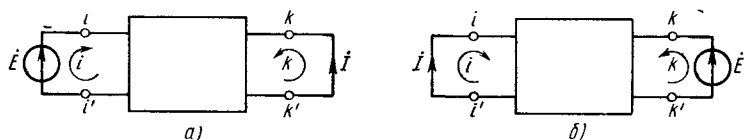


Рис. 4.10. К доказательству теоремы взаимности (внешнее воздействие задано в виде источника напряжения)

$\dot{E}$  помещен в  $i$ -й контур (рис. 4.10, а), то в соответствии с выражением (4.14) контурный ток  $k$ -го контура

$$\dot{I}_{kh} = \Delta_{ih} \dot{E}_{ii} / \Delta = \Delta_{ih} \dot{E} / \Delta. \quad (4.28)$$

Аналогичным образом находим контурный ток  $i$ -го контура, вызванный действием того же источника напряжения  $\dot{E}$ , перенесенного из  $i$ -го контура в  $k$ -й (рис. 4.10, б):

$$\dot{I}_{ii} = \Delta_{hi} \dot{E}_{kh} / \Delta = \Delta_{hi} \dot{E} / \Delta. \quad (4.29)$$

Выражения (4.28) и (4.29) отличаются только порядком индексов в алгебраических дополнениях  $\Delta_{ih}$  и  $\Delta_{hi}$ . Учитывая симметричность матрицы контурных сопротивлений рассматриваемой цепи относительно главной диагонали, нетрудно прийти к выводу, что  $\Delta_{ih} = \Delta_{hi}$ , а следовательно,  $\dot{I}_{kh} = \dot{I}_{ii}$ .

Теорема взаимности для случая, когда внешнее воздействие на цепь задается в виде независимого источника тока, может быть сформулирована следующим образом.

Если независимый источник тока  $\dot{J}$ , подключенный к какой-либо паре зажимов линейной пассивной цепи, вызывает на другой паре зажимов напряжение  $\dot{U}$  (рис. 4.11, а), то этот же источник тока, подключенный ко второй паре зажимов (рис. 4.11, б), вызовет на первой паре зажимов то же напряжение  $\dot{U}$ .

Доказательство этой теоремы взаимности производится так же, как это было сделано при питании цепи от независимого источника напряжения.

Если электрическая цепь удовлетворяет теореме взаимности (в любой формулировке), то говорят, что она обладает взаимностью (обратимостью). Электрические цепи, обладающие

взаимностью, называются взаимными (обратимыми). Если электрическая цепь не обладает взаимностью, то она является не-взаимной (необратимой). К необратимым цепям относятся, в частности, нелинейные цепи (элементы матриц контурных сопротивлений и узловых проводимостей таких цепей зависят от токов или напряжений ветвей) и цепи, содержащие зависимые источники (матрицы контурных сопротивлений и узловых проводимостей таких цепей, как правило, несимметричны относительно главных диагоналей).

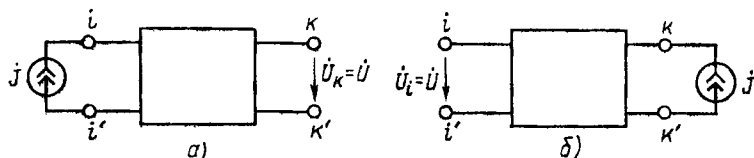


Рис. 4.11. К доказательству теоремы взаимности (внешнее воздействие задано в виде источника тока)

Применение теоремы взаимности в сочетании с принципом наложения позволяет в ряде случаев существенно упростить определение тока или напряжения какой-либо ветви электрической цепи, содержащей несколько независимых источников напряжения или тока.



**Пример 4.9.** Пусть, например, линейная электрическая цепь содержит  $N$  независимых источников напряжения  $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_i, \dots, \dot{E}_N$ , размещенных соответственно в ветвях  $1, 2, \dots, i, \dots, N$ . Определим ток  $k$ -й ветви, не содержащей источников энергии. Найдем сначала токи  $j_1^{(k)}, j_2^{(k)}, \dots, j_i^{(k)}, \dots, j_N^{(k)}$  соответственно  $1, 2, \dots, i, \dots, N$  ветвей цепи, вызванные действием некоторого дополнительного источника э.д.с.  $\dot{E}_k$ , помещенного в  $k$ -ю ветвь, при выключенных источниках  $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_i, \dots, \dot{E}_N$ . Далее, в соответствии с теоремой взаимности найдем частичные токи  $j_k^{(i)}$ , вызываемые в  $k$ -й ветви действием каждого из источников  $\dot{E}_i$  в отдельности. Если бы э.д.с. источника, расположенного в  $i$ -й ветви,  $\dot{E}_i$ , была равна  $\dot{E}_k$ , то согласно теореме взаимности частичный ток  $k$ -й ветви,  $j_k^{(i)}$ , вызванный действием источника, расположенного в  $i$ -й ветви, был бы равен  $j_i^{(k)}$ . Если  $\dot{E}_i \neq \dot{E}_k$ , то частичный ток  $k$ -й ветви  $j_k^{(i)}$ , вызванный действием э.д.с.  $\dot{E}_i$ , пропорционален  $j_i^{(k)}$ :

$$j_k^{(i)} \dots \dot{E}_i j_i^{(k)} / \dot{E}_k.$$

Суммируя частичные токи, вызванные действием всех независимых источников напряжения, находим

$$j_k \dots \sum_{i=1}^N j_k^{(i)} \dots \sum_{i=1}^N \dot{E}_i j_i^{(k)} / \dot{E}_k.$$

Таким образом, анализ сложной электрической цепи, содержащей  $N$  независимых источников напряжения, свелся к определению токов  $N$  ветвей более простой цепи, содержащей один независимый источник напряжения.

## Теорема компенсации

Теорема компенсации формулируется следующим образом: токи и напряжения произвольной электрической цепи не изменятся, если любую ветвь этой цепи заменить либо идеальным источником напряжения, э. д. с. которого равно напряжению данной ветви и направлена противоположно этому напряжению, либо идеальным источником тока, ток которого равен току рассматриваемой ветви и совпадает с ним по направлению.

Теорема компенсации базируется на общих свойствах основной системы уравнений электрического равновесия цепи и не накладывает ограничений на тип рассматриваемой цепи или характер внешнего воздействия. Рассмотрим, например, линейную электрическую цепь, находящуюся под гармоническим воздействием. Выделим в данной

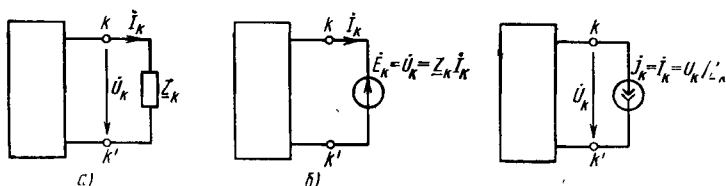


Рис. 4.12. К доказательству теоремы компенсации

цепи произвольную ветвь, комплексное сопротивление которой равно  $\underline{Z}_k$  (рис. 4.12, а). Напряжение и ток этой ветви связаны уравнением, составленным на основании закона Ома в комплексной форме  $\dot{U}_k = \underline{Z}_k \dot{I}_k$ . В соответствии с теоремой компенсации выделенную ветвь можно заменить либо идеальным источником напряжения, э. д. с. которого равно напряжению данной ветви  $\dot{E} = \dot{U}_k = \underline{Z}_k \dot{I}_k$  и направлена навстречу этому напряжению (рис. 4.12, б), либо идеальным источником тока, ток которого равен току рассматриваемой ветви  $\dot{J} = \dot{I}_k = \dot{U}_k / \underline{Z}_k$  и совпадает с ним по направлению (рис. 4.12, в). Составляя основную систему уравнений электрического равновесия каждой из цепей (рис. 4.12, б, в), убедимся, что она совпадает с основной системой уравнений электрического равновесия исходной цепи. Действительно, при формировании уравнений электрического равновесия исходной цепи напряжение  $\dot{U}_k = \underline{Z}_k \dot{I}_k$  на выделенной ветви учитывается со знаком плюс в левой части уравнений баланса напряжений, составленных для контуров, содержащих рассматриваемую ветвь (предполагается, что направление обхода этих контуров совпадает с направлением тока  $\dot{I}_k$ ). При составлении уравнений электрического равновесия цепи (рис. 4.12, б) член  $\dot{U}_k = \underline{Z}_k \dot{I}_k$  в левой части соответствующих уравнений отсутствует, однако в правой части этих уравнений появляется член  $-\dot{E} = -\dot{U}_k = -\underline{Z}_k \dot{I}_k$ . Следовательно, замена комплексного сопротивления  $\underline{Z}_k$  идеальным источником напряжения  $\dot{E} = \underline{Z}_k \dot{I}_k$  соответствует переносу члена  $\underline{Z}_k \dot{I}_k$  из левой час-



ти уравнений баланса напряжений в правую с соответствующим изменением знака.

При составлении уравнений электрического равновесия исходной цепи (рис. 4.12, а) ток  $\dot{I}_k$  выделенной ветви учитывается в левой части уравнений баланса токов; соответствующие уравнения преобразованной цепи (рис. 4.12, в) вместо тока  $\dot{I}_k$ , протекающего через комплексное сопротивление  $\underline{Z}_k$ , содержат равный ему ток  $\dot{J} = \dot{I}_k = \dot{U}_k / \underline{Z}_k$  идеального источника тока. Таким образом, цепи, схемы которых приведены на рисунке, являются эквивалентными.

Необходимо отметить, что источники напряжения и тока, заменившие в соответствии с теоремой компенсации сопротивление ветви  $\underline{Z}_k$ , зависимые: э. д. с. источника напряжения  $\dot{E}$  прямо пропорциональна току ветви, содержащей этот источник, а ток источника тока  $\dot{J}$  прямо пропорционален напряжению источника тока. Из эквивалентности цепей следует, что идеальный источник напряжения, э. д. с. которого пропорциональна отдаваемому току ( $\dot{E} = \underline{Z}_k \dot{J}_k$ ), и идеальный источник тока, ток которого прямо пропорционален напряжению на зажимах источника ( $\dot{J} = \dot{U}_k / \underline{Z}_k$ ), могут быть заменены комплексным сопротивлением

$$\underline{Z}_k = \dot{E} / \dot{J}_k = \dot{U}_k / \dot{J}.$$

Теорема компенсации расширяет возможности эквивалентных преобразований электрических цепей.

### Автономные и неавтономные двухполюсники

Рассмотрим произвольный линейный двухполюсник, содержащий наряду с идеализированными пассивными элементами управляемые и неуправляемые источники тока или напряжения. Представляют интерес два предельных режима работы такого двухполюсника: режим холостого хода, когда ток внешних выводов двухполюсника равен нулю, и режим короткого замыкания, при котором напряжение между внешними выводами двухполюсника равно нулю. Напряжение между выводами двухполюсника в режиме холостого хода называется напряжением холостого хода, а ток между выводами двухполюсника в режиме короткого замыкания — током короткого замыкания.

Двухполюсник, напряжение холостого хода или ток короткого замыкания которого не равны нулю, назовем автономным. Очевидно, что автономный двухполюсник должен содержать один или несколько нескомпенсированных независимых источников, т. е. таких источников, сумма частичных реакций на воздействие которых на внешних зажимах двухполюсника не равна тождественно нулю.

Если напряжение холостого хода и ток короткого замыкания двухполюсника тождественно равны нулю, то такой двухполюсник будем называть неавтономным. Неавтономный двухполюсник не мо-

жет содержать нескомпенсированных независимых источников, т. е. в его состав могут входить только идеализированные пассивные элементы и управляемые источники тока или напряжения. Таким образом, активные двухполюсники могут быть автономными или неавтономными, а пассивные двухполюсники представляют собой частный случай неавтономных.

Комплексным входным сопротивлением  $Z$  неавтономного двухполюсника называется отношение комплексной амплитуды напряжения на его зажимах к комплексной амплитуде тока (заметим, что данное ранее определение комплексного входного сопротивления пассивного двухполюсника естественным образом вытекает из этого определения). Если неавтономный двухполюсник не содержит управляемых источников, т. е. является пассивным, то его комплексное входное сопротивление может быть найдено, например, путем постепенного сворачивания схемы двухполюсника с использованием методов преобразования пассивных цепей. В общем случае комплексное входное сопротивление неавтономного двухполюсника находят методом пробного источника, в соответствии с которым к входу исследуемого двухполюсника подключают произвольный независимый источник напряжения или тока (пробный источник) и определяют отношение комплексных действующих значений напряжения и тока на внешних зажимах двухполюсника.



**Пример 4.10.** Определим комплексное входное сопротивление неавтономного двухполюсника, схема которого изображена на рис. 4.13, а (задачи такого типа часто встречаются на практике, например при определении комплексного входного сопротивления усилительного каскада на полевом транзисторе).

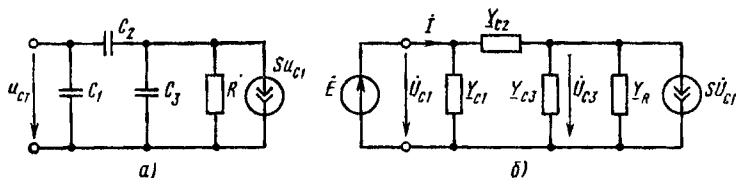


Рис. 4.13 К примеру 4.10

Подключим к входным зажимам исследуемой цепи пробный источник напряжения  $e = \dot{E}$  (рис. 4.13, б) и найдем комплексное действующее значение входного тока двухполюсника

$$\dot{i} = j\omega C_1 \dot{E} + j\omega C_2 (\dot{E} - \dot{U}_{C3}).$$

Для определения комплексного действующего значения напряжения на емкости  $C_3$  составим уравнение электрического равновесия цепи (рис. 4.13, б) по методу узловых напряжений

$$(1/R + j\omega C_2 + j\omega C_3) \dot{U}_{C3} - j\omega C_2 \dot{E} = -S \dot{E},$$

откуда

$$\dot{U}_{C3} = \frac{j\omega C_2 - S}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)} \dot{E}.$$

Таким образом, входной ток цепи прямо пропорционален э.д.с. пробного источника

$$i = j\omega \left[ C_1 + C_2 + \frac{S - j\omega C_2}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)} C_2 \right] \dot{E}$$

и, следовательно, комплексное входное сопротивление двухполюсника не зависит от этой э.д.с.

$$Z = \frac{\dot{E}}{i} = \frac{1}{j\omega \left[ C_1 + C_2 + \frac{S - j\omega C_2}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)} C_2 \right]}$$

В области низких частот ( $\omega \rightarrow 0$ ) входное сопротивление двухполюсника имеет емкостной характер

$$Z|_{\omega \rightarrow 0} = 1 / \{j\omega [C_1 + C_2 + RSC_2]\} = 1 / (j\omega C_{\text{вк}}),$$

причем эквивалентная входная емкость двухполюсника

$$C_{\text{вк}} = C_1 + (1 + RS) C_2.$$

Аналогичный результат получается и в том случае, когда в качестве пробного используют произвольный независимый источник тока  $j \neq j$

Каждому автономному двухполюснику можно поставить в соответствие некоторый неавтономный двухполюсник, который получается из исходного путем выключения всех входящих в него независимых источников тока и напряжения. Комплексным входным сопротивлением автономного двухполюсника называется комплексное входное сопротивление соответствующего ему неавтономного двухполюсника. Таким образом, комплексное входное сопротивление автономного двухполюсника может быть найдено как отношение комплексной амплитуды напряжения к комплексной амплитуде тока на зажимах неавтономного двухполюсника, который получается из заданного автономного двухполюсника путем выключения всех входящих в него независимых источников тока и напряжения. Комплексное входное сопротивление линейного автономного двухполюсника может быть также найдено как отношение комплексных изображений напряжения холостого хода и тока короткого замыкания этого двухполюсника.



**Пример 4.11.** Определим напряжение холостого хода  $u_x$ , ток короткого замыкания  $i_k$  и комплексное входное сопротивление  $Z$  активного двухполюсника, схема которого приведена на рис. 4.14, а.

Для определения напряжения холостого хода двухполюсника  $u_x \neq U_x$  составим уравнение электрического равновесия рассматриваемой цепи по методу узловых напряжений

$$(1/R + j\omega C_2 + j\omega C_3) U_x - j\omega C_2 E_1 = -S \dot{E}_1,$$

откуда

$$U_x = \frac{j\omega C_2 - S}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)} \dot{E}_1,$$

где  $\dot{E}_1 \neq e_1$ .

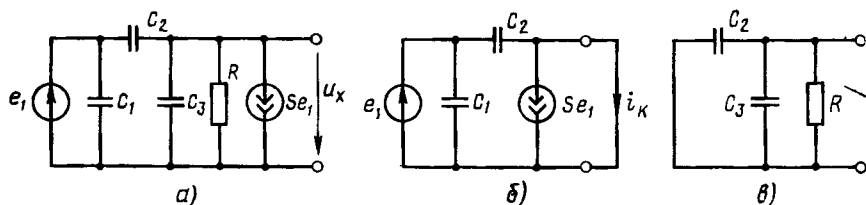


Рис. 4.14. К примеру 4.11

При коротком замыкании зажимов двухполюсника (рис. 4.14, б) выполняется соотношение

$$-j\omega C_2 \dot{E}_1 + S\dot{E}_1 + \dot{I}_R = 0$$

и, следовательно,

$$\dot{I}_R = \dot{I}_K = (j\omega C_2 + S) \dot{E}_1.$$

При выключении независимого источника э.д.с.  $e_1$  двухполюсник превращается в пассивный (рис. 4.14, в), потому его комплексное входное сопротивление  $Z$  определяется выражением

$$Z = \frac{1}{1/R + j\omega(C_2 + C_3)}.$$

Аналогичный результат получается и в том случае, когда комплексное входное сопротивление рассматриваемого автономного двухполюсника определяется как отношение комплексных действующих значений напряжения холостого хода  $\dot{U}_x$  и тока короткого замыкания  $\dot{I}_K$ .

### Теорема об эквивалентном источнике

Рассмотрим линейную электрическую цепь, которая наряду с идеализированными пассивными элементами содержит управляемые и неуправляемые источники тока и напряжения. Выделим в этой цепи произвольную ветвь  $a-a'$  (рис. 4.15, а), а остальную часть цепи, к которой подключена эта ветвь, представим в виде автономного двухполюсника  $AD$ .

В соответствии с теоремой об эквивалентном источнике ток произвольной ветви линейной электрической цепи не изменится, если автономный двухполюсник, к которому подключена данная ветвь, заменить эквивалентным линейризованным источником энергии, который может быть представлен последовательной или параллельной схемой замещения. Э. д. с. идеального источника напряжения в последовательной схеме замещения равна напряжению холостого хода

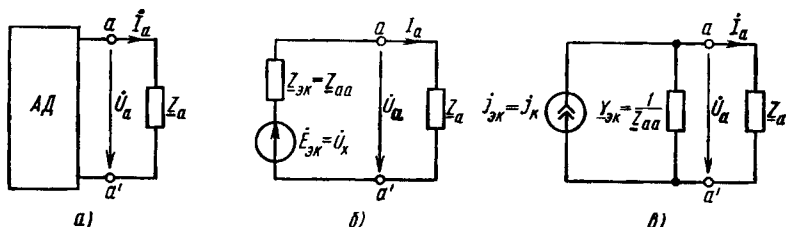


Рис. 4.15. Теорема об эквивалентном источнике

автономного двухполюсника (рис. 4.15, б), ток идеального источника тока в параллельной схеме замещения равен току короткого замыкания автономного двухполюсника (рис. 4.15, в), а внутреннее сопротивление и внутренняя проводимость эквивалентного источника равны соответственно комплексному входному сопротивлению и комплексной входной проводимости автономного двухполюсника.

Для доказательства теоремы введем в выделенную ветвь  $a-a'$  два вспомогательных независимых источника напряжения  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ , э. д. с. которых равны по значению, но противоположны по направлению (рис. 4.16, а). Очевидно, что введение двух скомпенсированных источников э. д. с. не нарушает режима работы цепи, поэтому ток вет-

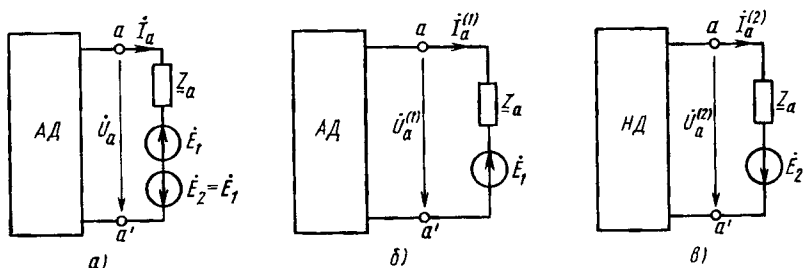


Рис. 4.16. Включение в цепь двух скомпенсированных источников (а) и эквивалентные схемы для определения  $I_a^{(1)}$  (б) и  $I_a^{(2)}$  (в).

HD — неавтономный, АД — автономный двухполюсники

ви  $a-a'$  преобразованной цепи равен току  $I_a$  исходной цепи (см. рис. 4.15, а). Далее, используя принцип наложения, представим ток рассматриваемой ветви преобразованной цепи в виде суммы двух составляющих  $I_a = I_a^{(1)} + I_a^{(2)}$ , где  $I_a^{(1)}$  — частичный ток  $a$ -й ветви, создаваемый действием независимого источника напряжения  $\dot{E}_1$ , и всех независимых источников, входящих в состав автономного двухполюсника АД, а  $I_a^{(2)}$  — частичный ток  $a$ -й ветви, вызываемый действием независимого источника напряжения  $\dot{E}_2$  (рис. 4.16, б, в).

Из эквивалентной схемы, изображенной на рис. 4.16, б:

$$I_a^{(1)} = (\dot{U}_a^{(1)} - \dot{E}_1) / \underline{Z}_a, \quad (4.30)$$

где  $\dot{U}_a^{(1)}$  — напряжение на зажимах  $a-a'$  автономного двухполюсника в режиме, когда отдаваемый им ток равен  $I_a^{(1)}$ . До сих пор не накладывалось никаких ограничений на э. д. с. вспомогательных источников напряжения. Выберем теперь  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2$  таким образом, чтобы  $I_a^{(1)} = 0$ . Очевидно, что в этом случае напряжение на внешних зажимах АД равно напряжению холостого хода автономного двухполюсника  $\dot{U}_x$ .

Используя выражение (4.30), найдем значение э. д. с.  $\dot{E}_1$ , при котором частичный ток  $a$ -й ветви  $\dot{I}_a^{(1)} = 0$ :

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_2 = \dot{U}_x. \quad (4.31)$$

Таким образом, если э. д. с. вспомогательных источников выбрать равными напряжению холостого хода автономного двухполюсника  $\dot{U}_x$ , то ток ветви  $\dot{I}_a$  будет равен частичному току  $\dot{I}_a^{(2)}$ , создаваемому действием источника напряжения  $\dot{E}_2$  при выключении независимых источников, входящих в состав автономного двухполюсника, и выключения источника напряжения  $\dot{E}_1$ .

Используя эквивалентную схему для определения частичного тока  $\dot{I}_a^{(2)}$ , находим

$$\dot{I}_a = \dot{I}_a^{(2)} = \dot{U}_x / (\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_a) = \dot{E}_{\text{ЭК}} / (\underline{Z}_{\text{ЭК}} + \underline{Z}_a), \quad (4.32)$$

где  $\underline{Z}_{aa}$  — комплексное входное сопротивление исходного автономного двухполюсника, равное комплексному входному сопротивлению приведенного на рис. 4.16, *в* неавтономного двухполюсника *НД*. Как видно из выражения (4.32), ток  $a$ -й ветви исходной цепи (см. рис. 4.15, *а*) равен току некоторой цепи, содержащей помимо сопротивления  $\underline{Z}_a$  источник напряжения  $\dot{E}_{\text{ЭК}} = \dot{U}_x$  и комплексное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{ЭК}} = \underline{Z}_{aa}$  (см. рис. 4.15, *б*). Итак, ток выделенной ветви  $\dot{I}_a$  не изменился при замене автономного двухполюсника эквивалентным источником энергии, э. д. с. которого равна напряжению холостого хода автономного двухполюсника, а внутреннее сопротивление — его комплексному входному сопротивлению.

Переходя от последовательной схемы замещения эквивалентного источника к параллельной, можно показать, что значение тока  $\dot{I}_{\text{ЭК}}$  независимого источника тока (см. рис. 4.15, *в*) равно току короткого замыкания автономного двухполюсника, а внутренняя проводимость  $Y_{\text{ЭК}}$  — его комплексной входной проводимости  $\underline{Y}_{aa} = 1/\underline{Z}_{aa}$ .

Воспользовавшись теоремой об эквивалентном источнике, можно найти последовательную или параллельную схемы замещения любого сколь угодно сложного линейного активного двухполюсника, поэтому данную теорему часто называют теоремой об активном двухполюснике. Эта теорема позволяет существенно упростить анализ цепей, особенно в тех случаях, когда требуется определить ток или напряжение только одной ветви сложной цепи, содержащей большое количество управляемых и неуправляемых источников тока и напряжения. В связи с тем что параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения активного двухполюсника легко поддаются измерениям, выполняемым на внешних зажимах, теорему об эквивалентном источнике применяют и для построения эквивалентных схем активных двухполюсников по результатам их экспериментального исследования.



**Пример 4.12.** Используя теорему об эквивалентном источнике, определим ток  $\dot{I}_6$  цепи, комплексная схема замещения которой приведена на рис. 4.2, а. Выделим из рассматриваемой цепи ветвь, содержащую сопротивление  $\underline{Z}_6$ , и представим остальную часть цепи, которую можно рассматривать как автономный двухполюсник, последовательной схемой замещения (рис. 4.17, а). Э.д.с.

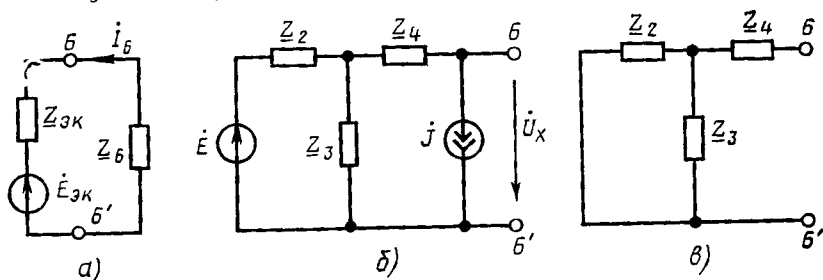


Рис. 4.17. К примеру 4.12

источника напряжения  $\dot{E}_{\text{Эк}}$  определяется как напряжение холостого хода на зажимах автономного двухполюсника, схема которого приведена на рис. 4.17, б:

$$\dot{E}_{\text{Эк}} = \dot{U}_X = \{ \underline{Z}_3 \dot{E} - [ \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) ] \dot{J} \} / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3).$$

Внутреннее сопротивление эквивалентного источника равно входному сопротивлению неавтономного двухполюсника (рис. 4.17, в):

$$\underline{Z}_{\text{Эк}} = \underline{Z}_4 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 / (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3).$$

Наконец, используя преобразованную схему рассматриваемой цепи (рис. 4.17, а), находим искомый ток

$$\dot{I}_6 = \frac{-\dot{E}_{\text{Эк}}}{\underline{Z}_6 + \underline{Z}_{\text{Эк}}} = \frac{[ \underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) ] \dot{J} - \underline{Z}_3 \dot{E}}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)}.$$

### § 4.3. МЕТОД СИГНАЛЬНЫХ ГРАФОВ

#### Общие представления о сигнальных графах

Решение уравнения электрического равновесия сложных цепей даже в численной форме весьма трудоемко. Задача анализа цепи становится особенно сложной тогда, когда неизвестные токи и напряжения или комплексные частотные характеристики должны быть найдены в виде аналитических соотношений. В этих случаях весьма полезным может оказаться применение метода сигнальных графов, который позволяет упростить решение уравнений электрического равновесия линейных электрических цепей в аналитическом виде (символьной форме).

Как известно, **сигнальный граф**, или направленный граф прохождения сигналов, представляет собой наглядное графическое изображение системы уравнений, описывающей процессы в электрической цепи. Узлы (вершины) такого графа соответствуют входящим в эту систему неизвестным величинам (токам и напряжениям ветвей, контурным токам, узловым напряжениям) и величинам, характеризующим внешние воздействия на цепь (токам независимых источников тока, э. д. с. независимых источников напряжения, контурным э. д. с., узловым токам). Ветви сигнального графа отображают причинно-следственные связи между величинами, соответствующими отдельным узлам. В рамках метода сигнальных графов эти величины называются **сигналами**.

лами. Каждой ветви сигнального графа присваивается определенное направление и присваивается весовой коэффициент, который называется передачей ветви. Узлы сигнального графа обозначают теми же буквами, что и соответствующие узлам величины; направления ветвей показывают стрелками, около которых указывают передачу ветви.

Если ветвь с передачей  $A$  направлена от узла  $x_i$  к узлу  $x_j$  (рис. 4.18, а), то

$$x_j = Ax_i, \quad (4.33)$$

следовательно, при прохождении через ветвь сигнал умножается на передачу ветви. Разрешим уравнение (4.33) относительно  $x_i$ :

$$x_i = x_j/A. \quad (4.34)$$

Сигнальный граф, соответствующий этому уравнению (рис. 4.18, б), будет отличаться от сигнального графа, соответствующего уравнению (4.33), направлением и передачей ветви. Таким образом, вид сигнального графа зависит от того,

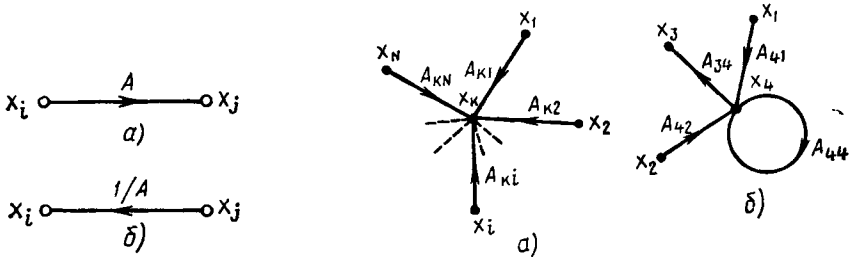


Рис. 4.18. Сигнальные графы, соответствующие выражениям (4.33) (а) и (4.34) (б)

Рис. 4.19. Суммирование сигналов в узле сигнального графа

относительно какой из величин разрешено заданное уравнение, т. е. от того, какая из величин рассматривается как причина, а какая — как следствие.

Если в узле  $x_k$  сходится несколько ветвей (рис. 4.19, а), то значение сигнала в этом узле будет равно сумме сигналов всех входящих в него ветвей:

$$x_k = \sum_{i=1}^N A_{ki} x_i, \quad (4.35)$$

где  $N$  — число ветвей, направленных к узлу  $x_k$ ;  $A_{ki}$  — передача ветви, направленной от узла  $x_i$  к узлу  $x_k$ . Ветви, направленные от узла  $x_k$ , на сигнал в этом узле не влияют и при подсчете  $x_k$  не учитываются. В число ветвей, направленных к рассматриваемому узлу, могут входить и ветви, начинающиеся в данном узле (рис. 4.19, б). Такие ветви называются петлями и. Значение переменной в узле, к которому подключена одна или несколько петель, находится по общему правилу (4.35), например (на рис. 4.19, б)

$$x_4 = A_{41}x_1 + A_{42}x_2 + A_{44}x_4. \quad (4.36)$$

Из выражения (4.36) видно, что при наличии петель, подключенных к какому-либо узлу, переменная, соответствующая этому узлу, входит и в левую, и в правую часть уравнения (4.35).

Рассмотрим некоторые понятия, относящиеся к сигнальным графам.

Источком называется узел сигнального графа, от которого направлены все примыкающие к нему ветви. Узел сигнального графа, к которому направлены все примыкающие к нему ветви, называется стоком. Узлы, которые имеют как входящие, так и исходящие ветви, называются смешанными. Например, в графе (рис. 4.18, а) узел  $x_i$  — исток, узел  $x_j$  — сток; в графе (рис. 4.19, б) узлы  $x_1$  и  $x_2$  — истоки, узел  $x_3$  — сток, узел  $x_4$  — смешанный.



Если сигнал, соответствующий некоторому узлу сигнального графа, не выражается через сигналы других узлов, то такой узел является *независимым*. Если сигнал, соответствующий какому-либо узлу, выражается через сигналы других узлов, то такой узел является *зависимым*. К независимым узлам относятся истоки, к зависимым — стоки и смешанные узлы. Очевидно, что уравнения вида (4.35) могут быть составлены только для зависимых узлов.



**Пример 4.13.** В сигнальном графе (рис. 4.20) узлы  $x_6, x_7$  — истоки, узел  $x_5$  — сток, узлы  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  относятся к смешанным. Для зависимых узлов  $x_1$  —  $x_5$  можно составить систему уравнений

$$x_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_6;$$

$$x_2 = ex_1 + fx_2 + hx_7;$$

$$x_3 = gx_1;$$

$$x_4 = kx_3 + mx_3 + nx_2;$$

$$x_5 = px_4.$$

Путь между узлами  $x_i$  и  $x_j$  сигнального графа — это непрерывная последовательность однонаправленных ветвей, связывающая узел  $x_i$  с узлом  $x_j$  и проходящая через каждый узел графа не более одного раза. Произведение передач ветвей, образующих путь между узлами  $x_i$  и  $x_j$ , называется *передачей пути*  $P_{ji}$ . Так, между узлами  $x_6$  и  $x_5$  сигнального графа (рис. 4.20) можно указать три пути с передачами  $P_{56}^{(1)} = dgkp$  (ветви  $d, g, k$  и  $p$ ),  $P_{56}^{(2)} = dgmp$  и  $P_{56}^{(3)} = dep$ . Последовательность ветвей  $d, c, t$  и  $p$  не образует пути от вершины  $x_6$  к вершине  $x_5$ , так как направление ветви  $c$  не совпадает с направлением пути.

Замкнутый путь, который начинается и заканчивается в одном узле, называется *контуром*. Очевидно, что петля есть частный вид контура, в который входит одна ветвь. Произведение передач всех ветвей, входящих в  $j$ -й контур, называется *передачей контура*  $L_j$ . На рис. 4.20 можно выделить четыре контура с передачами  $L_1 = be$  (ветви  $b$  и  $e$ ),  $L_2 = gc$  (ветви  $g$  и  $c$ ),  $L_3 = a$  (петля  $a$ ) и  $L_4 = f$  (петля  $f$ ). Ветви  $k$  и  $t$  не образуют контура, так как они не представляют собой замкнутой последовательности однонаправленных ветвей. Такие ветви называются *параллельными*.

Два контура или контур и путь называются *соприкасающимися*, если они имеют общие узлы. Если два контура или контур и путь не имеют общих узлов, то они являются *несоприкасающимися*. На рисунке контуры с передачами  $L_2 = gc$  и  $L_4 = f$ ;  $L_3 = a$  и  $L_4 = f$  являются несоприкасающимися, а контуры с передачами  $L_1 = be$  и  $L_2 = gc$ ;  $L_1 = be$  и  $L_4 = f$ ,  $L_1 = be$  и  $L_3 = a$  — соприкасающимися. Контур с передачей  $L_4 = f$  не соприкасается с путями  $P_{56}^{(1)}$  и  $P_{56}^{(2)}$ , но соприкасается с путем  $P_{56}^{(3)}$ . Как видно из примера 4.13, каждому сигнальному графу можно однозначным образом поставить в соответствие систему линейных алгебраических уравнений, составленных относительно сигналов зависимых узлов.

Для решения обратной задачи — построения сигнального графа, соответствующего заданной системе уравнений, эта система уравнений должна быть приведена к причинно-следственной форме, т. е. каждое из входящих в систему уравнений должно быть разрешено относительно одной из переменных (различных для каждого из уравнений). Далее, определяется общее число узлов графа  $N$ , которое равно сумме числа неизвестных переменных и числа ненулевых сво-

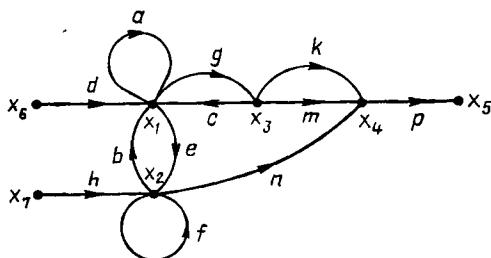


Рис. 4.20. К примеру 4.13

бодных членов уравнений. Построение сигнального графа начинается с нанесения точек, соответствующих его узлам. Затем узлы графа, в соответствии с системой уравнений, приведенной к причинно-следственной форме, соединяются между собой ветвями так, чтобы сумма сигналов всех ветвей, сходящихся в каждом узле, равнялась бы значению сигнала этого узла.

Хотя свойства сигнального графа не зависят от формы и длины ветвей, а также от взаимного расположения узлов графа на плоскости чертежа, с целью повышения наглядности рекомендуется истоки сигналов всех ветвей, сходящихся в каждом узле, равнялась бы значению сигнала этого узла.

В связи с тем что одну и ту же систему уравнений можно различными способами привести к причинно-следственной форме, каждой системе уравнений можно поставить в соответствие некоторое множество графов. Различные графы, соответствующие одной и той же исходной системе уравнений, называются равносильными. Рассмотрим несколько примеров построения графов, соответствующих заданной системе уравнений.



**Пример 4.14.** Построим сигнальный граф, соответствующий системе уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Приведем данную систему уравнений к причинно-следственной форме, для чего разрешим первое уравнение относительно  $x_1$ , второе — относительно  $x_2$ , а третье — относительно  $x_3$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= -a_{12}x_2/a_{11} - a_{13}x_3/a_{11} + b_1/a_{11}; \\ x_2 &= -a_{21}x_1/a_{22} - a_{23}x_3/a_{22} + b_2/a_{22}; \\ x_3 &= -a_{31}x_1/a_{33} - a_{32}x_2/a_{33}. \end{aligned}$$

Число независимых переменных в этой системе уравнений равно трем, число ненулевых свободных членов — двум, следовательно, общее число узлов сигнального графа равно пяти. Располагая в левой части чертежа независимые узлы, соответствующие свободным членам  $b_1$  и  $b_2$ , а в правой части узлы, соответствующие

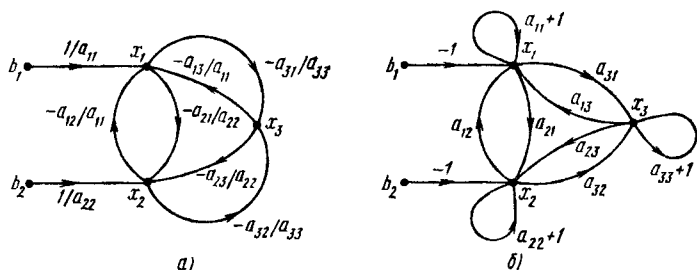


Рис. 4.21. К примеру 4.14

щие неизвестным величинам  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , и соединяя их ветвями в соответствии с системой уравнений, преобразованной к причинно-следственной форме, получим сигнальный граф, изображенный на рис. 4.21, а.

Исходная система уравнений может быть приведена к причинно-следственной форме и другим способом. Прибавляя к правой и левой частям первого уравнения  $x_1$ , второго  $x_2$ , третьего  $x_3$  и выполняя преобразования, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11} + 1)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - b_1; \\ x_2 &= a_{21}x_1 + (a_{22} + 1)x_2 + a_{23}x_3 - b_2; \\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} + 1)x_3. \end{aligned}$$

Этой системе уравнений соответствует сигнальный граф, изображенный на рис. 4.21, б.

Графы (рис. 4.21, а, б) имеют различную структуру и передачи ветвей, однако они соответствуют одной и той же исходной системе уравнений и поэтому являются равносильными. Очевидно, что если первое уравнение, входящее в исходную систему, разрешить не относительно  $x_1$ , а относительно  $x_2$  или  $x_3$ , то получится другие варианты представления исходной системы уравнений в причинно-следственной форме, каждому из которых можно поставить в соответствие сигнальные графы, равносильные графам, изображенным на рис. 4.21.



**Пример 4.15.** Составим сигнальный граф, соответствующий узловым уравнениям цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а.

Узловые уравнения данной цепи были получены при рассмотрении примера 4.4.

Разрешая первое из уравнений относительно  $\dot{U}_{30}$ , а второе — относительно  $\dot{U}_{20}$ , получаем

$$\dot{U}_{20} = \underline{Z}_4 (1/\underline{Z}_4 + 1/\underline{Z}_6) \dot{U}_{30} + \underline{Z}_4 j;$$

$$\dot{U}_{30} = \underline{Z}_4 (1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_3 + 1/\underline{Z}_4) \dot{U}_{20} - \underline{Z}_4 \dot{E} / \underline{Z}_2.$$

Этой системе уравнений соответствует сигнальный граф, приведенный на рис. 4.22.



**Пример 4.16.** Используя метод контурных токов, составим систему уравнений для определения тока  $\dot{I}_6$  цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а. Построим также сигнальный граф, соответствующий этой системе уравнений.

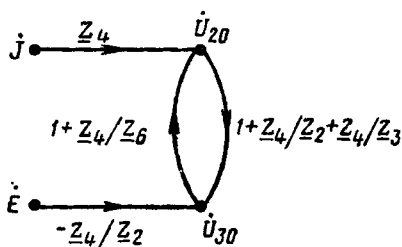


Рис. 4.22. К примеру 4.15

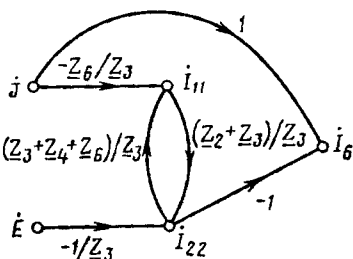


Рис. 4.23. К примеру 4.16

Контурные уравнения рассматриваемой цепи были сформированы при рассмотрении примера 4.3. Дополняя эти уравнения соотношением, связывающим ток  $\dot{I}_6$  с контурными токами  $\dot{I}_{11}$  и  $\dot{I}_{22}$ , получаем

$$\begin{aligned} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \dot{I}_{11} - \underline{Z}_3 \dot{I}_{22} &= \dot{E}; \\ -\underline{Z}_3 \dot{I}_{11} + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) \dot{I}_{22} &= \underline{Z}_6 j; \\ \dot{I}_6 - j + \dot{I}_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Разрешим каждое из этих уравнений относительно одной из неизвестных величин:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{22} &= (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \dot{I}_{11} / \underline{Z}_3 - \dot{E} / \underline{Z}_3; \\ \dot{I}_{11} &= (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) \dot{I}_{22} / \underline{Z}_3 - \underline{Z}_6 j / \underline{Z}_3; \\ \dot{I}_6 &= j - \dot{I}_{22}. \end{aligned}$$

Этой системе уравнений соответствует сигнальный граф, изображенный на рис. 4.23.

## Преобразования сигнальных графов

Используя правила построения сигнальных графов, соответствующих заданной системе уравнений, можно убедиться, что *каждому равносильному преобразованию исходной системы уравнений соответствует некоторое преобразование сигнального графа и, наоборот, каждому преобразованию сигнального графа соответствует определенное преобразование исходной системы уравнений*. На практике оказывается, что преобразования сигнальных графов выполняются проще и в более наглядной форме, чем преобразование соответствующих им уравнений. Поэтому при анализе цепей во многих случаях преобразование уравнений электрического равновесия заменяется преобразованием соответствующих сигнальных графов

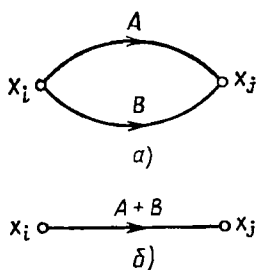


Рис. 4.24. Объединение параллельных ветвей

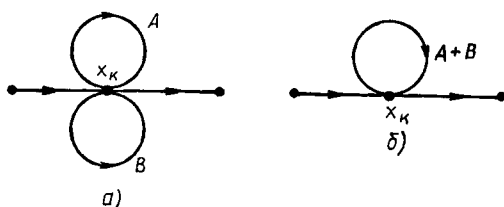


Рис. 4.25. Объединение петель

Рассмотрим основные преобразования сигнальных графов.

**Объединение параллельных ветвей.** Две параллельные ветви с передачами  $A$  и  $B$  могут быть заменены одной ветвью с передачей  $A + B$ . Действительно в соответствии с рис. 4.24, а сигнал в узле, к которому сходятся ветви с передачами  $A$  и  $B$ , исходящие из узла  $x_i$ , будет равен

$$x_j = Ax_i + Bx_i, \text{ или } x_j = (A + B)x_i.$$

Последнему уравнению соответствует сигнальный граф, имеющий одну ветвь с передачей  $A + B$ , направленную от узла  $x_i$  к узлу  $x_j$  (рис. 4.24, б). Правило объединения параллельных ветвей обобщается на любое число параллельно включенных ветвей, его можно применять для объединения петель, подключенных к одному узлу (рис. 4.25).

**Объединение последовательности однонаправленных ветвей.** Две последовательно включенные однонаправленные ветви с передачами  $A$  и  $B$  могут быть заменены одной ветвью с передачей  $AB$ .

Действительно, графу, приведенному на рис. 4.26, а может быть поставлена в соответствие система уравнений

$$\begin{aligned} x_j &= Ax_i; \\ x_k &= Bx_j. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Исключая из (4.37) переменную  $x_j$ , получаем

$$x_k = ABx_i. \quad (4.38)$$

Уравнению (4.38) соответствует сигнальный граф, содержащий одну ветвь с передачей  $AB$  (рис. 4.26, б). Рассмотренное преобразование представляет собой частный случай устранения смешанного узла сигнального графа.

**Устранение промежуточного узла.** Смешанный узел, к которому подключено несколько не образующих контуров ветвей, причем только одна из ветвей направлена к узлу (рис. 4.27, а) или только одна из ветвей направлена от узла (рис. 4.27, в), называется промежуточным.

Для устранения промежуточного узла первого типа, в которой входит только одна ветвь, составим систему уравнений

$$x_2 = Ax_1; \quad x_4 = Cx_2;$$

$$x_3 = Bx_2; \quad x_5 = Dx_2$$

и исключим из нее переменную  $x_2$ :

$$x_3 = ABx_1;$$

$$x_4 = ACx_1; \tag{4.39}$$

$$x_5 = ADx_1.$$

Системе уравнений (4.39) соответствует граф, не содержащий промежуточного узла  $x_2$  (рис. 4.27, б). Аналогичным образом устраняется промежуточный узел, в который входит несколько ветвей, а выходит только одна (рис. 4.27, г).

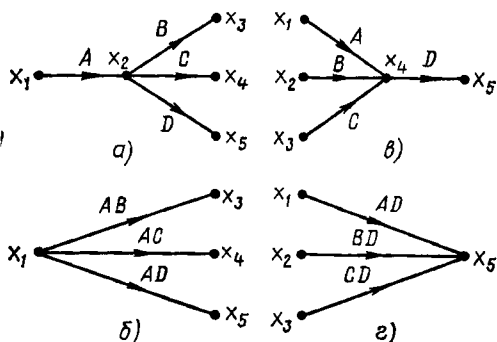
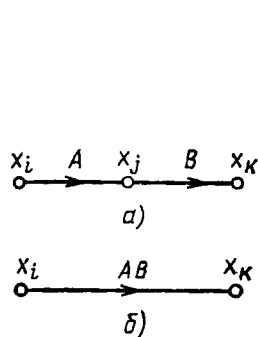


Рис. 4.26. Объединение последовательности однонаправленных ветвей

Рис. 4.27. Устранение промежуточного узла, из которого исходит (а, б) и в который входит (в, г) несколько ветвей

Устранение контура. Сигнальному графу, изображенному на рис. 4.28, а, может быть поставлена в соответствие система уравнений

$$x_2 = Ax_1 + Cx_3;$$

$$x_3 = Bx_2.$$

Подставляя первое из этих уравнений во второе, получаем

$$x_3 = ABx_1 + BCx_3. \tag{4.40}$$

Уравнению (4.40) соответствует преобразованный граф, приведенный на рис. 4.28, б.

Исключение петли. Исключение петли с передачей  $A$ , подключенной к какому-либо узлу сигнального графа, сопровождается умножением передач ветвей, входящих в этот узел, на  $1/(1 - A)$ .

Действительно, для сигнального графа, приведенного на рис. 4.29, а, можно составить систему уравнений

$$x_3 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3;$$

$$x_4 = Dx_3.$$

Приводя в первом из этих уравнений подобные члены и разрешая его относительно  $x_3$ , получаем

$$x_3 = Ax_1/(1 - C) + Bx_2/(1 - C);$$

$$x_4 = Dx_3. \tag{4.41}$$

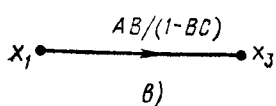
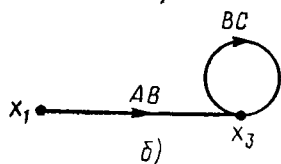
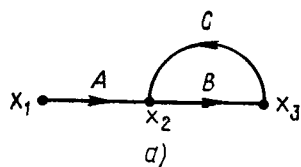


Рис. 4.28. Устранение контура

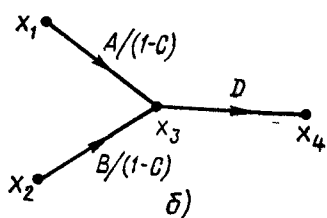
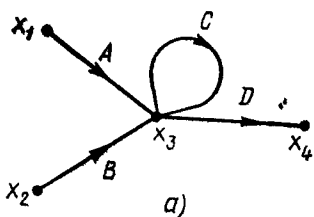


Рис. 4.29. Устранение петли

Как видно из соответствующего системе уравнений (4.41) сигнального графа (рис. 4.29, б), после устранения петли передачи ветвей, входящих в узел  $x_3$ , оказались умноженными на  $1/(1 - C)$ , а передача ветви, выходящей из узла  $x_3$ , осталась без изменения.

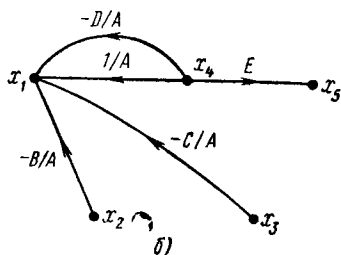
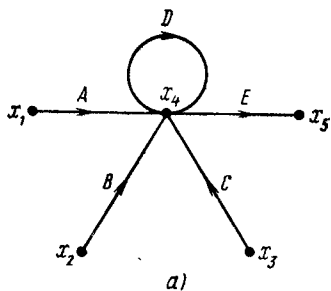


Рис. 4.30. Инверсия ветви

Применяя операцию устранения петли, преобразованный граф (см. рис. 4.28, б) можно заменить одной ветвью (см. рис. 4.28, в).

Инверсия (изменение направления) ветви. Рассмотрим некоторый граф (рис. 4.30, а), которому соответствует система уравнений

$$x_4 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4; \quad x_5 = Ex_4. \quad (4.42)$$

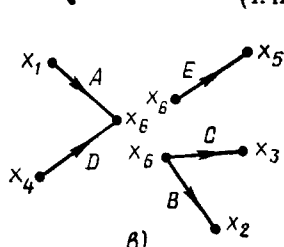
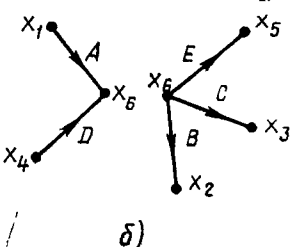
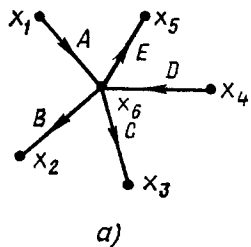


Рис. 4.31. Расщепление узла

Пусть необходимо изменить направление какой-либо ветви, например, направленной из вершины  $x_1$  в вершину  $x_4$ . С этой целью разделим первое из уравнений (4.42) относительно  $x_1$ :

$$x_1 = x_4/A - Bx_2/A - Cx_3/A - Dx_4/A; \\ x_6 = Ex_4. \quad (4.43)$$

Системе уравнений (4.43) соответствует сигнальный граф, изображенный на рис. 4.30, б. Как видно из сравнения рис. 4.30, а и б, инвертирование ветви, направленной от узла  $x_1$  к узлу  $x_4$ , сопровождается изменением передач и точек подключения всех ветвей, ранее направленных к узлу  $x_4$ . Ветвь с передачей  $A$ , направленная от узла  $x_1$  к узлу  $x_4$ , заменяется ветвью, направленной от узла  $x_4$  к узлу  $x_1$ , с передачей  $1/A$ . Все ветви, ранее направленные к узлу  $x_4$ , заменяются ветвями, направленными к узлу  $x_1$ , передачи этих ветвей умножаются на  $-1/A$ . Ветви, не направленные ранее к узлу  $x_4$ , при инвертировании ветви, направленной к  $x_4$ , остаются без изменений.

**Расщепление узла.** В связи с тем что сигнал в каждом узле сигнального графа определяется только сигналами входящих в него ветвей, любой узел сигнального графа может быть расщеплен на два узла: один — содержащий все ветви, направленные к узлу, другой — направленные от узла. Так, узел  $x_6$  графа, изображенного на рис. 4.31, а, может быть расщеплен на два узла (рис. 4.31, б). Узел, который содержит только исходящие из него ветви (исток), может быть расщеплен на произвольное количество узлов, не превышающее числа исходящих из него ветвей (рис. 4.31, в).

**Удлинение узла.** В ряде случаев возникает необходимость во введении в сигнальный граф дополнительного узла, сигнал в котором совпадает с сигналом в одном из узлов  $x_j$  сигнального графа. Такая операция называется удлинением узла  $x_j$ . Для удлинения узла  $x_j$  этот узел должен быть соединен с вновь вводимым узлом  $x'_j$  ветвью, передача которой равна единице. Например,

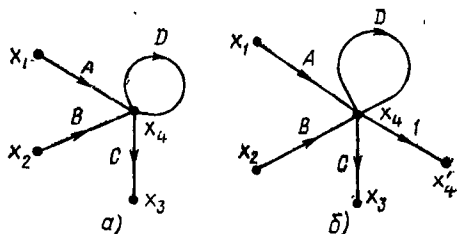


Рис. 4.32. Удлинение узла

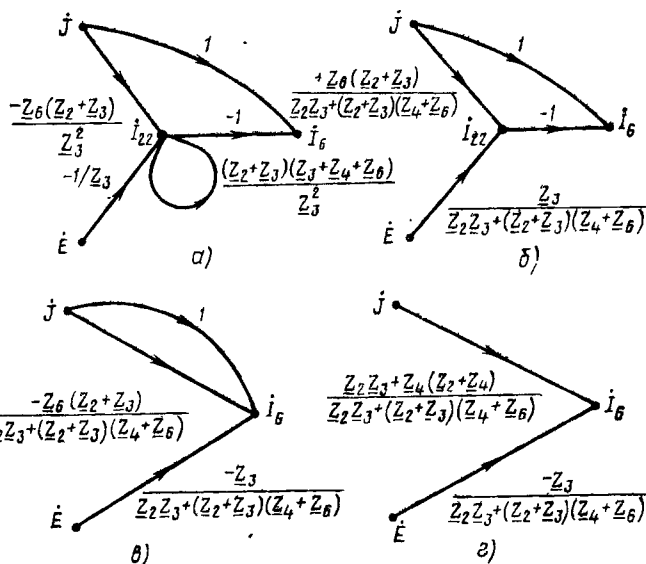


Рис. 4.33. К примеру 4.17

для удлинения узла  $x_4$  (рис. 4.32, а) введем новый узел  $x'_4$  и соединим его с узлом  $x_4$  ветвью, передача которой равна единице (рис. 4.32, б).

Совместное проведение описанных преобразований позволяет, как правило, существенно упростить структуру сигнального графа. Конечной целью преобразований обычно является получение наиболее простого графа, не допускающего дальнейших упрощений. Такой граф называется **к о н е ч н ы м**. Конечный граф не содержит смешанных узлов, а включает в себя только стоки и истоки.



**Пример 4.17.** Упростим сигнальный граф, изображенный на рис. 4.23. Для этого последовательно исключим контур (рис. 4.33, а), петлю (рис. 4.33, б), промежуточный узел (рис. 4.33, в) и объединим параллельные ветви (рис. 4.33, г). Преобразованный граф, (рис. 4.33, г) не содержит смешанных узлов и не подлежит дальнейшему упрощению. Этот граф является конечным.

## Применение сигнальных графов к анализу цепей

Применение метода сигнальных графов при анализе цепей оказывается весьма эффективным в тех случаях, когда требуется определить ток или напряжение только одной из ветвей цепи, а также найти ее комплексные частотные характеристики.

Как отмечалось, используя различные преобразования, исходный сигнальный граф можно привести к конечному. Если истоками графа являются узлы, сигналы которых  $\dot{X}_i$  есть комплексные изображения величин, характеризующих внешние воздействия на зажимах  $i-i'$ , а стоками — узлы, сигналы которых  $\dot{Y}_j$  представляют собой комплексные изображения искомого токов или напряжений ветвей, подключенных к зажимам  $j-j'$ , то, используя конечный граф, можно записать соотношения, в явной форме выражающие зависимость искомого неизвестных токов и напряжений от величин, характеризующих внешние воздействия. Передача ветви  $\underline{A}_{ji}$  конечного графа, связывающей исток  $\dot{X}_i$  со стоком  $\dot{Y}_j$ , будет равна комплексной частотной характеристике цепи  $H_{ji}(j\omega)$ , измеренной в режиме, когда все источники внешнего воздействия, за исключением  $\dot{X}_i$ , выключены.

Трудоемкость преобразования сигнального графа к конечному во многом определяется выбором исходной системы уравнений электрического равновесия и тем, каким образом осуществлен переход от исходной системы уравнений к сигнальному графу. Для уменьшения числа узлов сигнального графа в качестве исходной системы уравнений рекомендуется применять систему уравнений электрического равновесия цепи, составленную по методу узловых напряжений или контурных токов, дополнив ее уравнениями, связывающими искомые токи и напряжения с контурными токами или узловыми напряжениями.



**Пример 4.18.** Определим ток  $\dot{I}_6$  цепи, комплексная схема замещения которой приведена на рис. 4.2, а, преобразуя сигнальный граф этой цепи (см. рис. 4.23) в конечный.

Граф, приведенный на рис. 4.23, соответствует контурным уравнениям рассматриваемой цепи, дополненным уравнением, выражающим связь искомого тока с контурными токами  $\dot{I}_{11}$ ,  $\dot{I}_{12}$  и  $\dot{I}_{33} = \dot{I}$  (см. пример 4.16). Преобразование этого графа в конечный было проведено в примере 4.17. Непосредственно по виду конечного графа записываем выражение для искомого тока

$$\dot{I}_6 = \{[\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)] \dot{I} - \underline{Z}_3 \dot{E}\} / [\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)],$$

которое совпадает с выражениями для этого тока, полученными с использованием метода наложения (см. пример 4.8) и теоремы об эквивалентном источнике (см. пример 4.12).



Передача ветви, связывающей исток  $J$  и сток  $I_6$ , равна комплексному коэффициенту передачи цепи по току  $G_{65}(j\omega)$  от зажимов 5—5' к зажимам 6—6' (номера зажимов совпадают с номерами ветвей) в режиме, когда источник  $E$  замкнут:

$$G_{65}(j\omega) = \frac{I_6}{I_5} \Big|_{E=0} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)}$$

Передача ветви, направленной от истока  $E$  к стоку  $I_6$ , равна передаточной проводимости цепи  $Y_{61}(j\omega)$  в режиме, когда ветвь с источником тока  $J$  разомкнута:

$$Y_{61}(j\omega) = \frac{I_6}{U_1} \Big|_{j=0} = \frac{-\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)}$$

Следует отметить, что сведение исходного сигнального графа к конечному, особенно для сложных цепей, может оказаться трудоемким. Кроме того, если необходимо определить несколько неизвестных величин, эту процедуру придется выполнять несколько раз. Поэтому в таких случаях для нахождения комплексных частотных характеристик цепи и неизвестных токов и напряжений целесообразно воспользоваться формулой Мейсона, которая позволяет вычислять передачи ветвей конечного графа  $A_{ji} = H_{ji}(j\omega)$  непосредственно по исходному сигнальному графу, не прибегая к его преобразованиям.

Формула Мейсона имеет вид

$$A_{ji} = H_{ji}(j\omega) = \left( \sum_k P_{ji}^{(k)} \Delta_k \right) / \Delta, \quad (4.44)$$

где  $\Delta$  — определитель сигнального графа, численно равный определителю исходной системы уравнений;  $P_{ji}^{(k)}$  — передача  $k$ -го пути от истока  $X_i$  к стоку  $Y_j$ ;  $\Delta_k$  — алгебраическое дополнение  $k$ -го пути. Суммирование производится по всем возможным путям из узла  $X_i$  в узел  $Y_j$ .

Определитель сигнального графа

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,m} L_i L_j L_m + \dots, \quad (4.45)$$

где  $\sum_i L_i$  — сумма передач всех контуров сигнального графа;  $\sum_{i,j} L_i L_j$  — сумма произведений передач всех возможных пар непересекающихся контуров;  $\sum_{i,j,m} L_i L_j L_m$  — сумма произведений передач всех непересекающихся троек контуров и т. д. Алгебраическое дополнение  $k$ -го пути также вычисляется по формуле (4.45), но при этом учитываются только контуры, не касающиеся пути  $P_{ji}^{(k)}$ .



**Пример 4.19.** Используя формулу Мейсона, определим передаточную проводимость  $Y_{61}(j\omega)$  цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а).

Сигнальный граф, составленный с использованием контурных уравнений цепи, был приведен на рис. 4.23 (см. пример 4.16). Этот граф содержит единственный контур, передача которого

$$L = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6) / (\underline{Z}_3^2).$$

Используя выражение (4.45), найдем определитель сигнального графа

$$\Delta = 1 - L = 1 - \frac{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)}{\underline{Z}_3^2} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6)}{\underline{Z}_3^2}.$$

Между узлами  $\dot{E}$  и  $\dot{I}_6$  существует единственный путь, проходящий по ветвям с передачами  $-1/Z_3$  и  $-1$ . Передача этого пути  $P_{61}^{(1)} = 1/Z_3$ . Единственный контур сигнального графа имеет общую вершину  $\dot{I}_{22}$  с данным путем, поэтому  $\Delta_1 = 1$ .

Подставляя полученные значения  $P_{61}^{(1)}$ ,  $\Delta$  и  $\Delta_1$  в формулу Мейсона, получаем

$$Y_{61}(j\omega) = \frac{\dot{I}_6}{\dot{E}} \Big|_{J=0} = -Z_3/[Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)].$$

Как и следовало ожидать, это выражение совпадает с выражениями для  $Y_{61}(j\omega)$ , полученными другими методами (см. примеры 4.8, 4.12, 4.18).



**Пример 4.20.** Используя формулу Мейсона, определим комплексный коэффициент передачи по току  $G_{65}(j\omega)$  цепи, схема которой приведена на рис. 4.2, а.

Сигнальный граф рассматриваемой цепи изображен на рис. 4.23. Выражение для определителя  $\Delta$  этого графа было получено в примере 4.19.

Между узлами  $\dot{I}$  и  $\dot{I}_6$  существуют два пути с передачами

$$P_{65}^{(1)} = 1; P_{65}^{(2)} = Z_6(Z_2 + Z_3)/Z_3^2.$$

Алгебраическое дополнение первого пути

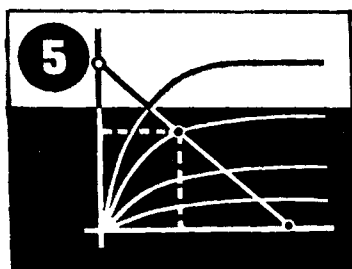
$$\Delta_1 = 1 - \frac{(Z_2 + Z_3)(Z_3 + Z_4 + Z_6)}{Z_3^2} = -\frac{Z_2 Z_6 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)}{Z_3} = \Delta.$$

Алгебраическое дополнение второго пути равно единице. Используя формулу Мейсона, находим

$$G_{65}(j\omega) = \frac{\dot{I}_6}{\dot{I}} \Big|_{E=0} = \frac{P_{65}^{(1)} \Delta_1 + P_{65}^{(2)} \Delta_2}{\Delta} = \frac{Z_1 Z_3 + Z_4 (Z_2 + Z_3)}{Z_2 Z_3 + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_6)}.$$

Нетрудно убедиться, что полученное выражение совпадает с выражениями для  $G_{65}(j\omega)$ , найденными другими методами (см. примеры 4.8, 4.12, 4.18).

# Нелинейные резистивные цепи



## § 5.1. ЗАДАЧА АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

### Вводные замечания

Процессы, протекающие в нелинейных электрических цепях, намного сложнее и разнообразнее, чем процессы в линейных цепях и в то же время они менее исследованы. В нелинейных цепях могут иметь место явления, которые не наблюдаются в цепях, содержащих только линейные элементы. Например, реакция нелинейной цепи на внешнее воздействие может содержать гармонические колебания таких частот, которые отсутствуют во внешнем воздействии; при приложении к нелинейной цепи только постоянных токов и напряжений в ней при определенных условиях могут возникать незатухающие колебания, так называемые *автоколебания*; интенсивность реакции нелинейной цепи на определенное воздействие, как правило, нелинейно зависит от интенсивности воздействия, причем плавные изменения частоты или интенсивности внешнего воздействия могут приводить к скачкообразным изменениям частоты и интенсивности реакции; во многих случаях реакция нелинейной цепи на заданное воздействие не определяется однозначно; при одних и тех же воздействиях нелинейная цепь может иметь несколько установившихся режимов, называемых состоянием равновесия, причем некоторые из этих состояний могут оказаться неустойчивыми. *Явления, имеющие место в нелинейных элементах, положены в основу функционирования большинства радиоэлектронных устройств, причем важнейшие для радиоэлектроники процессы генерирования колебаний, модуляции, детектирования, выпрямления, ограничения, умножения и преобразования частоты и многие другие в принципе не могут быть реализованы с помощью линейных цепей с постоянными параметрами.*

Как отмечалось ранее, характеристики большинства реальных элементов в той или иной степени нелинейны. В одних случаях нелинейность характеристик невелика и при построении упрощенной модели ею можно пренебречь, в других — нелинейностью характеристик реальных элементов пренебречь нельзя и при построении упрощенных моделей таких цепей приходится использовать идеализированные эле-

менты с нелинейными характеристиками. Нелинейность характеристик реальных элементов обычно считается несущественной, если ее наличие не является принципиальным для функционирования устройства, т. е. приводит лишь к появлению некоторых второстепенных эффектов, которыми в рамках решаемой задачи можно пренебречь. На практике *нелинейностью характеристик реального элемента, как правило, можно пренебречь, если характеристика элемента практически линейна в рабочем диапазоне токов и напряжений, а функционирование устройства не построено на использовании нелинейности соответствующей характеристики.* Следует, однако, иметь в виду, что окончательное решение о том, является ли нелинейность несущественной, не может быть произведено в рамках линейного приближения, а требует решения задачи с учетом нелинейности характеристик.

Рассмотрим лишь основные особенности и методы расчета цепей, содержащих нелинейные резистивные элементы (нелинейные резисторы, транзисторы, диоды и т. п.). Более детально процессы в нелинейных цепях, в том числе и в цепях, содержащих нелинейные энергоемкие элементы (нелинейные конденсаторы и индуктивные катушки), рассматриваются в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы».

## Нелинейные резистивные элементы

В соответствии с основным методом теории цепей при изучении нелинейных резистивных цепей не будем рассматривать физические процессы, имеющие место в реальных элементах, а ограничимся лишь представлением этих элементов с помощью упрощенных моделей, заменяющих каждый из элементов в рамках решаемой задачи. В частности, будем пренебрегать эффектами, связанными с запасанием энергии электрического и магнитного полей, имеющими место во всех реальных элементах, и считать, что свойства нелинейных резистивных элементов полностью определяются их статическими вольт-амперными характеристиками (ВАХ). Для каждого реального элемента зависимость между мгновенными значениями токов и напряжений будет совпадать с ВАХ только в том случае, если частота изменения токов и напряжений на внешних зажимах элемента не превышает некоторого предельного значения. В этом случае нелинейный резистивный элемент можно рассматривать как *б е з ы н е р ц и о н н ы й*. Если рабочая частота элемента близка к предельной или превышает ее, то статические ВАХ не отражают зависимости между мгновенными значениями токов и напряжений на зажимах элемента. При таких условиях нелинейный элемент следует рассматривать как *и н е р ц и о н н ы й*.

В зависимости от числа внешних выводов различают нелинейные двухполюсные элементы (резисторы с нелинейным сопротивлением, электровакуумные и полупроводниковые диоды) и нелинейные многополюсные элементы (транзисторы различных типов, электровакуумные триоды и пентоды). При принятых ранее положительных направлениях токов и напряжений ВАХ нелинейных пассивных двухполюсных элементов должны располагаться в первом и третьем квадрантах координатной плоскости  $u-i$  и проходить через начало координат.

Если ВАХ нелинейного резистивного элемента хотя бы частично располагается во втором или четвертом квадрантах либо не проходит через начало координат, то потребляемая таким элементом мощность может быть отрицательной и, следовательно, такой элемент не является пассивным.

Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсного элемента может быть симметричной (см. рис. 1.3, а) или несимметричной (см. рис. 1.3, б, в) относительно начала координат. Для двухполюсника с симметричной характеристикой выполняется условие

$$i(u) = -i(-u) \quad (5.1)$$

или

$$u(i) = -u(-i).$$

Очевидно, что режим работы нелинейной цепи не изменится, если выводы нелинейного резистивного элемента с симметричной характеристикой поменять местами. Если условие (5.1) не выполняется, то ВАХ нелинейного резистивного двухполюсника не является симметричной.

Различают нелинейные резистивные элементы с монотонной и немонотонной ВАХ. У элементов с монотонной ВАХ увеличение приложенного к элементу напряжения приводит к увеличению (или хотя бы не уменьшению) тока и, наоборот, увеличение тока приводит к возрастанию падения напряжения на элементе. Напряжение и ток на зажимах такого элемента связаны между собой однозначной зависимостью, причем производные  $du/di$  и  $di/du$  во всех точках ВАХ принимают только неотрицательные значения. Если хотя бы в ограниченном диапазоне изменения токов и напряжений увеличение напряжения на зажимах элемента приводит к уменьшению тока или, наоборот, увеличение тока приводит к уменьшению напряжения, то ВАХ такого элемента — немонотонна. Ток и напряжение нелинейного резистивного элемента с немонотонной ВАХ не связаны между собой взаимно однозначной зависимостью.

Различают немонотонные вольт-амперные характеристики N- и S-типов. У элементов с N-образной ВАХ (см. рис. 1.3, б) каждому значению напряжения на зажимах элемента соответствует вполне определенное значение тока, однако в определенном диапазоне изменения токов одному и тому же значению тока может соответствовать несколько различных значений напряжения. Элементы с S-образной ВАХ отличаются тем, что в некотором диапазоне изменения напряжений заданному значению напряжения соответствует несколько различных значений тока (см. рис. 1.3, в).

Вольт-амперная характеристика безынерционного нелинейного резистивного двухполюсного элемента может рассматриваться как зависимость мгновенного значения реакции данного элемента  $y = y(t)$  на некоторое воздействие от мгновенного значения воздействия  $x = x(t)$ . Для однозначного определения этой зависимости ВАХ N-типа должна быть представлена в виде функции  $i = i(u)$ , а ВАХ S-типа — в виде  $u = u(i)$ . При таком представлении ВАХ рассматри-



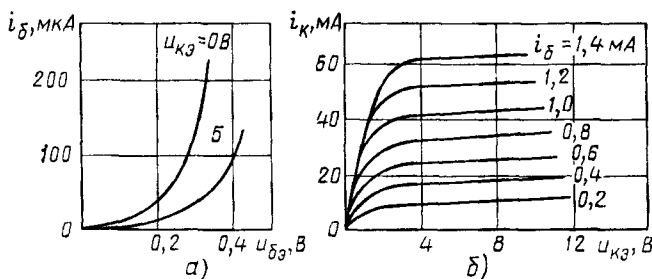


Рис. 5.3. Типовые входные (а) и выходные (б) характеристики биполярного транзистора в схеме с общим эмиттером:  $i_{\delta}$  — ток базы,  $i_{\kappa}$  — ток коллектора;  $u_{\kappa\epsilon}$  — напряжение коллектор — эмиттер;  $u_{\delta\epsilon}$  — напряжение база — эмиттер

жения между основными электродами  $u$  и тока  $i_{упр}$  или напряжения  $u_{упр}$  управляющего электрода:

$$i = i(u, i_{упр}) \text{ или } i = i(u, u_{упр}). \quad (5.2)$$

Как видно из рис 5.2, выводы нелинейного управляемого трехполюсника образуют с остальной частью цепи два контура — основной (выходной) и управляющий (входной), причем один из выводов является общим для обоих контуров.

Электрически управляемые нелинейные резистивные элементы могут быть охарактеризованы различными семействами ВАХ. Выходные ВАХ отображают зависимость между выходным током  $i$  и выходным напряжением  $u$  при различных значениях входного тока  $i_{упр}$  или напряжения  $u_{упр}$  (рис. 5.3, б; 5.4, а), входные ВАХ — зависимость между входным током и входным напряжением при различных значениях выходного напряжения (рис. 5.3, а), проходные ВАХ — зависимость выходного тока от входного тока или напряжения при различных значениях выходного напряжения (рис. 5.4, б).

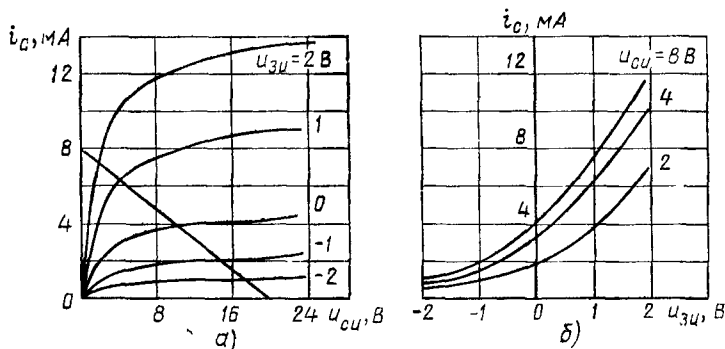


Рис. 5.4. Типовые выходные (а) и проходные (б) характеристики полевого транзистора с изолированным затвором в схеме с общим истоком:

$i_{с}$  — ток стока;  $u_{сu}$  — напряжение затвор — исток;  $u_{сг}$  — напряжение сток — исток

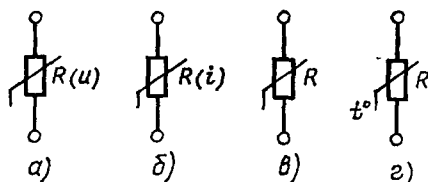


Рис. 5.5. Условные графические обозначения нелинейных сопротивлений: а — N-образной характеристикой; б — S-образной характеристикой; в — с монотонной характеристикой; г — неэлектрически управляемое

эквивалентных схем цепей нелинейные резистивные элементы либо изображают в виде двухполюсников или многополюсников (см. рис. 5.2), либо представляют схемами замещения, содержащими наряду с другими элементами идеализированные нелинейные сопротивления (рис. 5.5). Для неэлектрически управляемых сопротивлений рядом с «полочкой» на условном графическом обозначении сопротивления указывают буквенное обозначение соответствующей управляющей величины (рис. 5.5, г).

Вид ВАХ нелинейного управляемого резистивного элемента существенным образом зависит от схемы включения элемента, т. е. от того, какой из электродов является общим для основного и управляющего контуров.

На принципиальных электрических схемах реальные нелинейные резистивные элементы изображают с помощью установленных стандартами ЕСКД условных графических обозначений. При построении

### Уравнения электрического равновесия нелинейных резистивных цепей

Как и в случае линейных электрических цепей, задача анализа нелинейной резистивной цепи заключается в общем случае в определении токов и напряжений всех или части ветвей при заданных параметрах независимых источников энергии. Если нелинейная цепь включает в себя  $p$  ветвей, из которых  $p_{нт}$  ветвей содержат независимые источники тока, а  $p_{ин}$  состоит только из независимых источников напряжения, то для определения  $2p - p_{нт} - p_{ин}$  неизвестных токов и напряжений можно воспользоваться  $p$  уравнениями, составленными на основании законов Кирхгофа, и  $p - p_{нт} - p_{ин}$  уравнениями ветвей.

В связи с тем что токи ветвей дерева любой электрической цепи однозначно выражаются через токи главных ветвей, а напряжения главных ветвей — через напряжения ветвей дерева, при выборе дерева графа нелинейной резистивной электрической цепи в качестве ветвей дерева необходимо использовать ветви цепи, содержащие нелинейные элементы с S-образной характеристикой, и ветви с независимыми источниками напряжения, а в качестве главных ветвей следует выбирать ветви с источниками тока и ветви, содержащие нелинейные резистивные элементы с N-образной характеристикой. Нелинейные резистивные элементы с монотонной ВАХ могут входить как в состав ветвей дерева, так и в состав главных ветвей. Очевидно, что все уравнения основной системы уравнений электрического равновесия нелинейной резистивной цепи будут алгебраическими, причем, по крайней мере, одно из компонентных уравнений будет нелинейным.



Аналитически разрешить такие уравнения можно только в исключительных случаях, при некоторых специально подобранных видах нелинейности. Как правило, эти уравнения решают приближенными численными, графическими или графо-аналитическими методами. В ряде случаев исследование процессов в простейших нелинейных резистивных цепях удается провести без составления уравнений электрического равновесия — путем выполнения различных преобразований исходной цепи.

## § 5.2. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

### Простейшие преобразования нелинейных резистивных цепей

Рассмотрим простейшие эквивалентные преобразования, которые можно применять как при анализе нелинейных резистивных цепей постоянного тока, так и при анализе нелинейных цепей, находящихся под произвольным внешним воздействием.

Пусть участок цепи (рис. 5.6, а) содержит два последовательно включенных нелинейных сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , вольт-амперные характеристики которых представлены на рис. 5.6, б. Очевидно, что при любом значении тока  $i_{вх} =$

$i_1 = i_2$  напряжение  $u_{вх}$  на зажимах данного участка цепи равно сумме напряжений на каждом из нелинейных сопротивлений:  $u_{вх} = u_1(i_1) + u_2(i_2)$ .

Суммируя ординаты зависимостей  $u_1(i_1)$  и  $u_2(i_2)$ , получаем зависимость между напряжением  $u_{вх}$  и током  $i_{вх}$  на зажимах рассматриваемого участка цепи

(рис. 5.6, б). Таким образом, участок цепи, содержащий два последовательно включенных нелинейных сопротивления, может быть заменен одним нелинейным сопротивлением, ВАХ  $u_{вх}(i_{вх})$  которого получается путем суммирования ординат ВАХ  $u_1(i_1)$  и  $u_2(i_2)$  сопротивлений. Аналогичным образом можно заменить участок цепи, содержащий последовательно включенные линейное и нелинейное сопротивления, а также участок цепи, представляющий собой последовательное соединение произвольного количества линейных и нелинейных сопротивлений.



**Пример 5.1.** Найдем зависимость между током и напряжением участка цепи (рис. 5.7, а), представляющего собой последовательное соединение линейного  $R_2$  и нелинейного  $R_1$  сопротивлений, ВАХ  $u_1(i_1)$  и  $u_2(i_2)$  которых приведены на рис. 5.7, б. Определим изменение напряжения  $\Delta u_2$  на линейном сопротив-

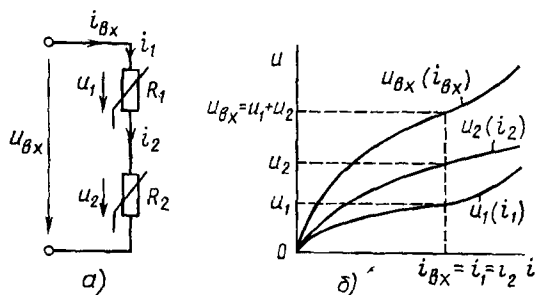


Рис. 5.6. Схема участка цепи с последовательно включенными нелинейными сопротивлениями (а) и их ВАХ (б)

лении  $R_2$ , соответствующее приращению напряжения на зажимах цепи  $u_{вх}$  на  $\Delta u_{вх}$ .

Вольт-амперную характеристику  $u_{вх}(i_{вх})$  рассматриваемого участка цепи получаем, суммируя ординаты ВАХ  $u_1(i_1)$  и  $u_2(i_2)$  последовательно включенных элементов. Используя эту характеристику (рис. 5.7, б), можно найти приращение тока цепи  $\Delta i_{вх}$ , соответствующее изменению входного напряжения на  $\Delta u_{вх}$ . Далее, используя зависимость  $u_2(i_2)$ , определяем соответствующее

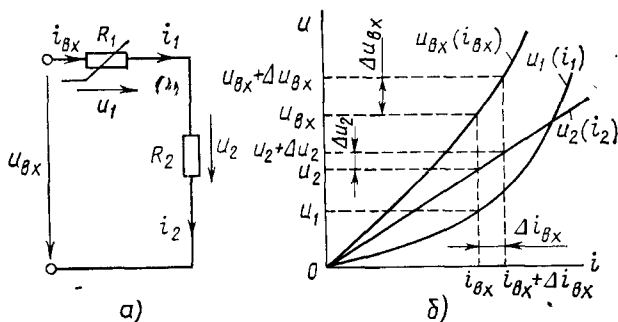


Рис. 5.7. К примеру 5.1

данному приращению тока приращению напряжения  $\Delta u_2$  на линейном сопротивлении. Как видно из рис. 5.7, б, приращение напряжения на линейном сопротивлении оказалось значительно меньше вызвавшего его изменение входного напряжения  $\Delta u_{вх}$ .

Рассмотрим участок цепи (рис. 5.8, а), представляющий собой параллельное включение двух нелинейных сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , ВАХ  $i_1(u_1)$  и  $i_2(u_2)$  которых приведены на рис. 5.8, б. Как следует из пер-

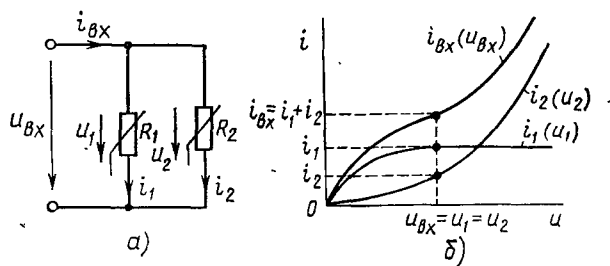


Рис. 5.8. Схема участка цепи с параллельно включенными нелинейными сопротивлениями (а) и их ВАХ (б)

вого закона Кирхгофа, входной ток  $i_{вх}$  рассматриваемого участка цепи при любом напряжении  $u_{вх} = u_1 = u_2$  равен сумме токов нелинейных сопротивлений:  $i_{вх} = i_1(u_1) + i_2(u_2)$ .

Суммируя ординаты зависимостей  $i_1(u_1)$  и  $i_2(u_2)$ , получаем ВАХ  $i_{вх}(u_{вх})$  нелинейного сопротивления, которым можно заменить рассматриваемый участок цепи. Используя аналогичный прием, можно определить ВАХ участка цепи, содержащего произвольное количество параллельно включенных линейных и нелинейных сопротивлений.

Почередное применение правил эквивалентного преобразования участков с последовательным и параллельным соединением элементов позволяет постепенно «свертывать» участки цепей со смешанным соединением линейных и нелинейных сопротивлений с монотонными ВАХ.



**Пример 5.2.** Найдем зависимость между током и напряжением на входе участка цепи со смешанным соединением элементов (рис. 5.9, а). Вольт-амперные характеристики  $u_1(i_1)$ ,  $u_2(i_2)$  и  $u_3(i_3)$  сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  приведены на рис. 5.9, б. Определим приращение напряжения на сопротивлении  $R_2$ , соответствующее изменению входного напряжения на  $\Delta u_{вх}$ .

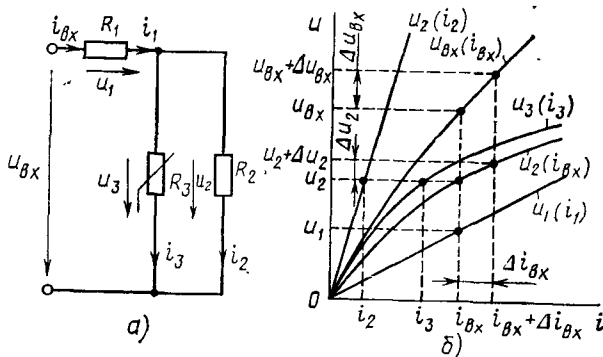


Рис. 5.9. К примеру 5.2

Суммируя абсциссы кривых  $u_2(i_2)$  и  $u_3(i_3)$ , получаем ВАХ  $u_2(i_{вх}) = u_3(i_{вх})$  участка цепи, представляющего собой параллельное соединение сопротивлений  $R_2$  и  $R_3$ . Далее, суммируя ординаты кривых  $u_1(i_1)$  и  $u_2(i_{вх}) = u_3(i_{вх})$ , находим зависимость  $u_{вх}(i_{вх})$  на входе рассматриваемого участка цепи.

Пусть напряжение на входе цепи изменилось на  $\Delta u_{вх}$ . Используя зависимость  $u_{вх}(i_{вх})$ , находим приращение тока  $\Delta i_{вх}$ , соответствующее этому изменению входного напряжения, и далее с помощью кривой  $u_2(i_{вх}) = u_3(i_{вх})$  определяем приращение напряжения на линейном сопротивлении  $R_2$ . Как и для цепи, рассмотренной в примере 5.1, приращение напряжения  $u_2$  оказывается значительно меньшим, чем вызвавшее его изменение входного напряжения  $u_{вх}$ .

Цепи, рассмотренные в примерах 5.1 и 5.2, можно использовать для стабилизации напряжения. Отношение относительного приращения напряжения на входе таких цепей к относительному приращению выходного напряжения называется коэффициентом стабилизации

$$k_{ст} = \frac{\Delta u_{вх} / u_{вх}}{\Delta u_{вых} / u_{вых}}$$

Очевидно, что для цепи, схема которой приведена на рис. 5.7, а,  $k_{ст} > 1$ , если ВАХ нелинейного элемента вогнутая [ $u_1(i_1)$  на рис. 5.7, б], а для цепи, схема которой приведена на рис. 5.9, а, — только когда ВАХ нелинейного элемента выпуклая [ $u_3(i_3)$  на

рис. 5.9, б). Следует подчеркнуть, что эффект стабилизации напряжения в принципе не может иметь места в цепях, составленных из элементов с линейными ВАХ.

### Преобразования активных нелинейных резистивных двухполюсников

Рассмотрим участок цепи с последовательно соединенными нелинейным сопротивлением  $R$  и источником постоянного напряжения  $E_-$  (рис. 5.10, а). Вольт-амперная характеристика  $u_1(i)$  нелинейного сопротивления и внешняя характеристика  $E_-(i)$  идеализированного источника напряжения приведены на рис. 5.10, б, в. Очевидно, что напряжение на входе такого участка цепи при любом токе равно сумме падения напряжения на сопротивлении и напряжения на зажимах идеализированного источника:

$$u = u_1(i) + E_- \quad (5.3)$$

Из выражения (5.3) следует, что ВАХ рассматриваемого участка цепи может быть получена путем суммирования ординат кривых  $u_1(i)$  и  $E_-(i)$ , т. е. путем смещения ВАХ  $u_1(i)$  сопротивления на  $E_-$  вверх по ординате при  $E_- > 0$  (рис. 5.10, б) или вниз — при  $E_- < 0$

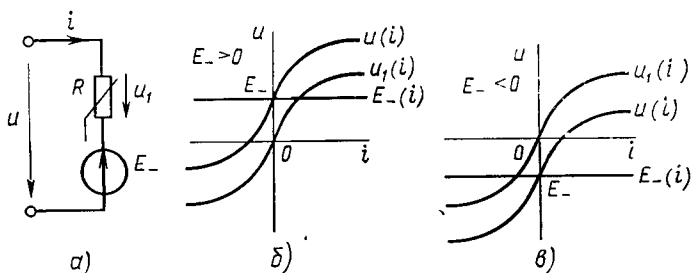


Рис. 5.10. Схема участка цепи с последовательно соединенными нелинейным сопротивлением и источником постоянной э. д. с. (а), ВАХ нелинейного сопротивления и внешняя характеристика источника при  $E_- > 0$  (б) и  $E_- < 0$  (в)

(рис. 5.10, в). Из рис. 5.10, б, в видно, что ВАХ  $u(i)$  не проходит через начало координат и частично располагается во втором или четвертом квадрантах координатной плоскости  $u-i$ .

Аналогично ВАХ активного двухполюсника, представляющего собой параллельное соединение нелинейного сопротивления  $R$  и источника постоянного тока  $J_-$  (рис. 5.11, а), получается путем смещения ВАХ  $i_1(u)$  сопротивления вдоль оси токов на  $\pm J_-$  (рис. 5.11, б, в). Как и в предыдущем случае, ВАХ нелинейного двухполюсника, содержащего источник тока, не проходит через начало координат.

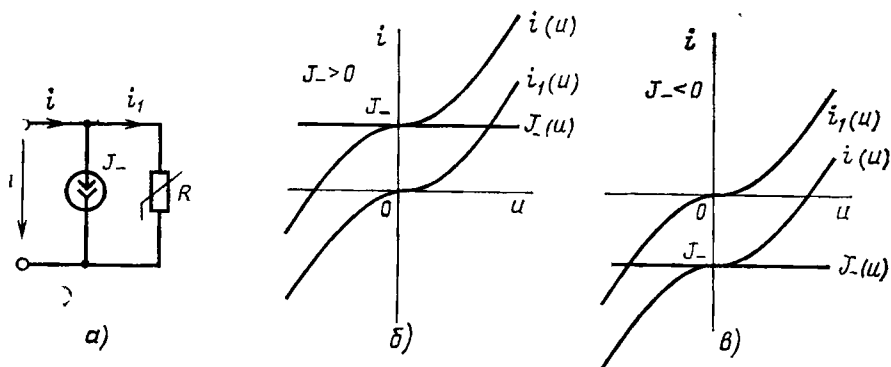


Рис. 5.11. Схема участка цепи с параллельно соединенными нелинейным сопротивлением и источником постоянного тока (а), ВАХ нелинейного сопротивления и внешняя характеристика источника при  $J_- > 0$  (б) и  $J_- < 0$  (в)

Графические построения можно использовать и при решении обратной задачи: заменить нелинейный двухполюсник, ВАХ которого не проходит через начало координат, нелинейным сопротивлением и идеализированным источником постоянного тока или напряжения.



**Пример 5.3.** Найдем последовательную и параллельную схемы замещения источника энергии (рис. 5.12, а), внешняя характеристика  $u(i)$  которого приведена на рис. 5.12, б (штриховая линия).

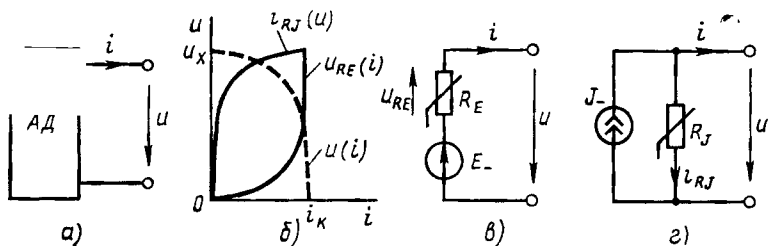


Рис. 5.12. К примеру 5.3

Последовательная схема замещения рассматриваемого двухполюсника (рис. 5.12, в) содержит независимый источник постоянного напряжения  $E_- = u_X - u_K$  и нелинейное сопротивление  $R_E$ , ВАХ которого  $u_{RE}(i)$  (рис. 5.12, б) определяется из условия

$$u_{RE}(i) = E_- - u(i) = u_X - u(i).$$

Параллельная схема замещения источника энергии содержит независимый источник постоянного тока  $J_- = i_K$  (рис. 5.12, г) и нелинейное сопротивление  $R_J$ , ВАХ которого (рис. 5.12, б) определяется из соотношения

$$i_{RJ}(u) = J_- - i(u) = i_K - i(u).$$

Следует обратить внимание на то, что направление тока на зажимах активного двухполюсника (рис. 5.12, а) выбрано противоположным направлению тока, принятого для пассивных двухполюсников, поэтому ВАХ данного двухполюсника переместилась из второго в первый квадрант координатной плоскости  $u - i$ .

### Определение рабочих точек нелинейных резистивных элементов

Задача анализа нелинейной цепи постоянного тока обычно сводится к определению рабочих точек нелинейных резистивных элементов, т. е. к определению токов и напряжений на зажимах этих элементов, соответствующих заданным значениям э. д. с. независимых источников постоянного напряжения и токов независимых источников постоянного тока. Эту задачу во многих случаях удобнее решать графически.

Рассмотрим простейшую цепь, состоящую из идеального источника постоянного напряжения  $E_-$  и нелинейных сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 5.13, а), вольт-амперные характеристики которых приведены на рис. 5.13, б [кривые  $i_1(u_1)$  и  $i_2(u_2)$  соответственно]. Для нахождения рабочих точек сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  воспользуемся методикой преобразования участка цепи с последовательным соединением нелинейных элементов. Суммируя абсциссы кривых  $i_1(u_1)$  и  $i_2(u_2)$ , получаем

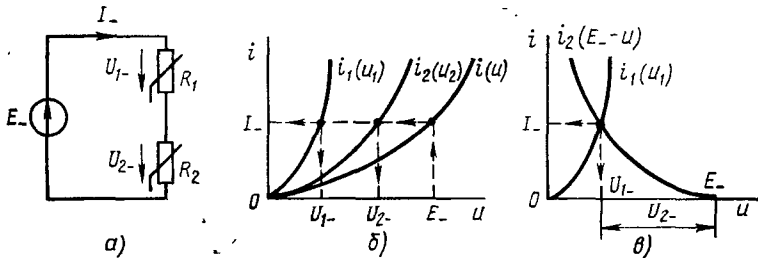


Рис. 5.13. Определение рабочих точек нелинейных сопротивлений

ВАХ участка цепи, представляющего собой последовательное соединение сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  [кривая  $i(u)$ ]. Используя эту зависимость, находим постоянный ток  $I_-$ , протекающий через данный участок цепи, а следовательно, и через каждое из сопротивлений, если напряжение на зажимах этого участка цепи равно напряжению независимого источника  $E_-$ . Далее, используя ВАХ  $i_1(u_1)$  и  $i_2(u_2)$  каждого из сопротивлений, определяем падения напряжения на этих сопротивлениях  $U_{1-}$  и  $U_{2-}$ , вызванное током  $I_-$ . Аналогично можно найти рабочие точки произвольного числа последовательно включенных нелинейных и линейных сопротивлений, соответствующие различным значениям э. д. с. независимого источника постоянного напряжения.

В простейшем случае, когда рассматриваемая цепь содержит только два последовательно включенных сопротивления, а э. д. с. независимого источника имеет одно фиксированное значение  $E_-$ , для определения рабочих точек сопротивлений можно воспользоваться более простым

приемом, позволяющим обойтись без построения суммарной ВАХ сопротивлений. С этой целью на оси напряжений (рис. 5.13, в) откладывают отрезок, соответствующий заданному значению э. д. с. источника напряжения, и из конца этого отрезка строят зеркальное отображение ВАХ одного из элементов, например сопротивления  $R_2$  [кривая  $i_2(E_- - u)$  на рис. 5.13, в]. В точке пересечения  $i_1(u)$  и  $i_2(E_- - u)$

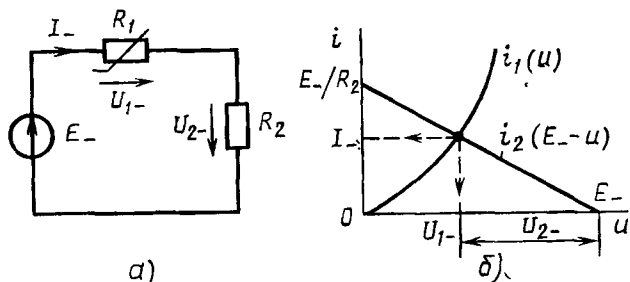


Рис. 5.14. Определение рабочей точки нелинейного сопротивления с линейной нагрузкой

выполняются условия электрического равновесия цепи  $I_{1-} = I_{2-} = I_-$ ;  $U_{1-} + U_{2-} = E_-$ , следовательно, точка пересечения  $i_1(u)$  и  $i_2(E_- - u)$  и есть искомая рабочая точка нелинейных сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ . Сопротивление  $R_2$ , ВАХ которого представляется в виде  $i_2(E_- - u)$ , обычно рассматривается как сопротивление нагрузки нелинейного элемента  $R_1$ , а кривая  $i_2(E_- - u)$  называется **нагрузочной кривой**.

Если одно из сопротивлений, например  $R_2$ , является линейным (рис. 5.14, а), то задача определения рабочей точки нелинейной цепи с последовательным соединением двух сопротивлений упрощается. В этом случае для определения рабочей точки нелинейного сопротивления  $R_1$  необходимо найти точку пересечения ВАХ  $i_1(u)$  этого сопротивления с нагрузочной прямой  $i_2(E_- - u) = (E_- - u)/R_2$ , проведенной через точку  $u = E_-$  на оси напряжений и точку  $i = E_-/R_2$  на оси токов (рис. 5.14, б). Аналогичным образом находят рабочие точки управляемых нелинейных элементов.

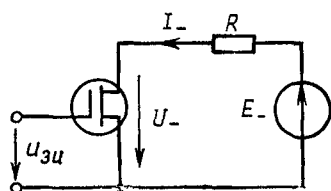


Рис. 5.15. К примеру 5.4

●●●●●  
**Пример 5.4.** Определим ток стока  $I_-$  и напряжение сток—исток  $U_-$  полевого транзистора с изолированным затвором, входящего в состав электрической цепи, схема которой приведена на рис. 5.15 ( $R = 2,5$  кОм,  $E_- = 20$  В,  $U_{зи} = 1$  В). Выходные ВАХ транзистора приведены на рис. 5.4, а.

Рабочая точка транзистора определяется пересечением ВАХ транзистора, соответствующей заданному значению напряжения затвор—исток  $u_{зи} = 1$  В, и нагрузочной прямой, проведенной через точки  $E_- = 20$  В на оси напряжения и  $i = E_-/R = 8$  мА на оси токов (см. рис. 5.4, а). Искомые значения тока стока и напряжения сток—исток  $I_- = 6,4$  мА,  $U_- = 4$  В.

Используя графический метод, можно убедиться, что когда ВАХ нелинейного резистивного элемента монотонна, при каждом значении напряжения источника питания ВАХ элемента пересекается с нагрузочной прямой только в одной точке, т. е. имеется единственная рабочая точка (единственное состояние равновесия).

Немонотонная ВАХ может пересекаться с нагрузочной прямой в нескольких точках (рис. 5.16), и, следовательно, нелинейный резистивный элемент с немонотонной ВАХ может иметь несколько рабочих точек (несколько состояний равновесия)\*).

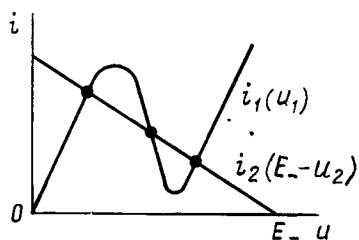


Рис. 5.16. Определение рабочих точек нелинейного сопротивления с немонотонной ВАХ

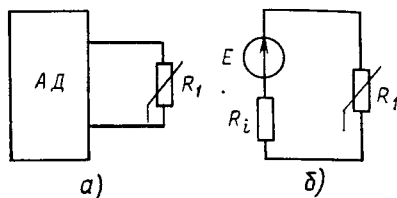


Рис. 5.17. Применение теоремы об эквивалентном источнике к анализу цепи с одним нелинейным элементом

Если в состав сложной цепи, содержащей произвольное количество источников энергии и линейных сопротивлений, входит только один нелинейный элемент, то для определения рабочей точки этого элемента удобно воспользоваться теоремой об эквивалентном источнике. С этой целью нелинейный элемент выделяют из рассматриваемой цепи, а оставшуюся часть цепи представляют в виде линейного автономного двухполюсника АД (рис. 5.17, а). Заменяя этот двухполюсник последовательной схемой замещения (рис. 5.17, б), сводят задачу анализа сложной цепи к рассмотренной ранее задаче определения рабочей точки нелинейного элемента с линейной нагрузкой (см. рис. 5.14, а).

### Определение реакции безынерционного нелинейного резистивного элемента на произвольное внешнее воздействие

Графические методы позволяют определить реакцию произвольного безынерционного нелинейного элемента на заданное внешнее воздействие. Пусть  $y(x)$  — ВАХ некоторого нелинейного сопротивления (рис. 5.18, а), причем  $x$  — величина, принятая в качестве внешнего воздействия, а  $y$  — величина, рассматриваемая как реакция нелинейного сопротивления на это воздействие. Построим на этом же рисунке зависимости внешнего воздействия  $x = x(t)$  и реакции  $y = y(t)$  от

\*). Более подробно вопросы, связанные с определением рабочих точек элементов с немонотонной ВАХ, в том числе с исследованием устойчивости состояний равновесия цепей с такими элементами, будут рассмотрены в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы».



времени. График  $x(t)$  расположим в нижней части рисунка так, чтобы ось  $x(t)$  была параллельна оси  $x$  ВАХ, а ось времени — направлена вниз. Зависимость  $y = y(t)$  построим в правой части рисунка так, чтобы ось времени была направлена вправо, а ось  $y(t)$  расположена параллельно оси  $y$  ВАХ.

Для определения реакции цепи на заданное внешнее воздействие необходимо для каждого момента времени  $t_1$  выполнить следующие графические построения: по графику функции  $x(t)$  найти мгновенное значение внешнего воздействия  $x(t_1)$ , затем по ВАХ определить соот-

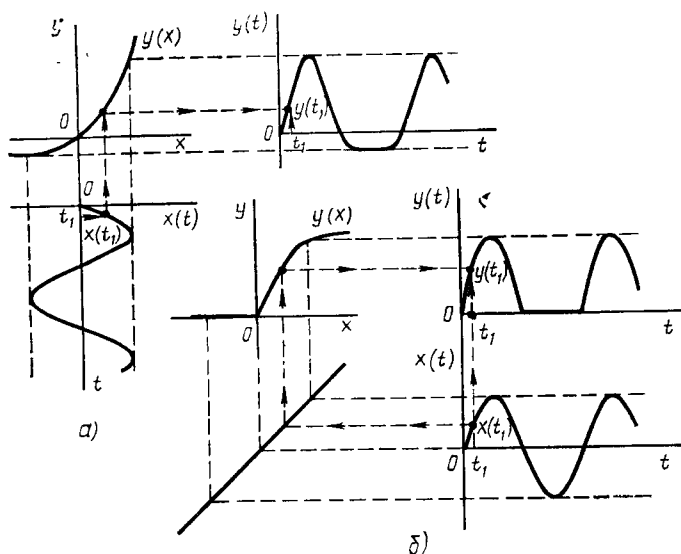


Рис. 5.18. Определение реакции безынерционного нелинейного резистивного элемента на заданное внешнее воздействие

ветствующее этому внешнему воздействию мгновенное значение реакции  $y(t_1)$  и построить точку с ординатой  $y(t_1)$  на графике  $y = y(t)$ . Очевидно, что при увеличении количества точек на временной оси, для которых выполняются такие построения, точность определения реакции элемента на заданное внешнее воздействие возрастает.

Недостатком рассмотренного приема является то, что графики  $x(t)$  и  $y(t)$  построены в разных местах чертежа, а это неудобно при определении взаимно соответствующих точек на временных осях и затрудняет сравнение формы кривых  $x(t)$  и  $y(t)$ .

Этот недостаток может быть устранен, если график  $x(t)$  построить непосредственно под графиком  $y(t)$  (рис. 5.18). В этом случае линии, проектирующие точки графика  $x = x(t)$  на ВАХ  $y(x)$ , перегинутся под углом  $90^\circ$ , причем точки перегиба расположатся на некоторой вспомогательной прямой, проведенной под углом  $45^\circ$  к координатным осям через точку пересечения оси  $y$  ВАХ и оси времени зависимости  $x = x(t)$ .

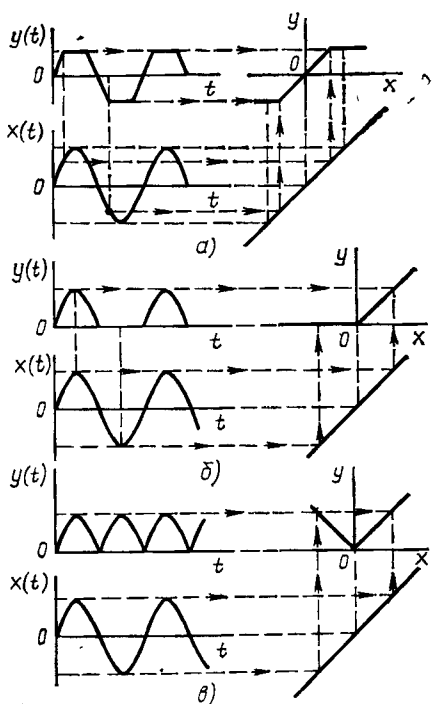


Рис. 5.19. Определение вида ВАХ  $p_1$  известной реакции безынерционного резистивного элемента на заданное внешнее воздействие

Как видно из рисунка, реакция нелинейной цепи на гармоническое воздействие в общем случае не является гармонической функцией времени.

Графические построения, приведенные на рис. 5.18, б, можно использовать и для решения обратной задачи — определения вида ВАХ безынерционного нелинейного резистивного элемента по известной реакции этого элемента на заданное внешнее воздействие.

Например, на рис. 5.19 показано, как, используя описанные графические построения, определить вид ВАХ нелинейных резистивных элементов, обеспечивающих двустороннее ограничение гармонических колебаний (рис. 5.19, а), однополупериодное (рис. 5.19, б) и двухполупериодное (рис. 5.19, в) выпрямление переменного тока.

### § 5.3. АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### Задача аппроксимации

Вольт-амперные характеристики реальных элементов электрических цепей обычно имеют сложный вид, их представляют в виде графиков или таблиц экспериментальных данных. В ряде случаев непосредственное применение ВАХ, задаваемых в такой форме, оказывается неудобным и их стремятся представить в виде достаточно простых аналитических соотношений, хотя бы качественно отражающих характер рассматриваемых зависимостей. Замена сложных функций приближенными аналитическими выражениями называется а п п р о к с и м а ц и е й (от лат. *approximare* — приближаться).

Аналитические выражения, аппроксимирующие ВАХ нелинейных резистивных элементов, с одной стороны (для повышения точности и достоверности анализа) должны как можно более точно описывать ход реальных характеристик, а с другой — повышение точности аппроксимации приводит, как правило, к усложнению аппроксимирующих выражений, что затрудняет как определение значений входящих в эти

выражения коэффициентов, так и применение этих выражений для анализа цепи. В связи с тем что характеристики однотипных нелинейных резистивных элементов от экземпляра к экземпляру отличаются за счет производственного разброса параметров и погрешности измерений, нецелесообразно стремиться получить аппроксимирующие выражения, точность которых превышает точность определения характеристик отдельных элементов. Таким образом, *при решении задачи аппроксимации так же, как и при решении любой задачи, связанной с выбором расчетной модели, необходимо идти на компромисс между точностью и сложностью модели.*

Успешное решение задачи аппроксимации в значительной степени зависит от ширины аппроксимируемой области ВАХ, т. е. от диапазона, в котором могут изменяться токи и напряжения исследуемого элемента. Как правило, чем уже область аппроксимации, тем более простой функцией может быть описана соответствующая ВАХ.

Задача аппроксимации ВАХ включает в себя две самостоятельные задачи: выбор аппроксимирующей функции и определение значений, входящих в эту функцию постоянных коэффициентов.

### Выбор аппроксимирующей функции

Функцию, аппроксимирующую ВАХ какого-либо нелинейного резистивного элемента, выбирают либо исходя из физических представлений о работе данного элемента, либо чисто формально, основываясь на внешнем сходстве ВАХ с графическим изображением той или иной функции. Для аппроксимации ВАХ используют как элементарные, так и различные трансцендентные функции, а также степенные, экспоненциальные и тригонометрические полиномы и кусочно-линейные функции.

Так как внешнее сходство ВАХ с графическим изображением функции, выбранной в качестве аппроксимирующей, может оказаться обманчивым, перед тем, как перейти к определению значений коэффициентов соответствующей функции, желательно проверить возможность ее применения, используя метод *в р а в н и в а н и я*. Сущность этого метода заключается в том, что для проверки гипотезы о виде функциональной зависимости  $y = y(x)$ , заданной множеством значений  $x_j, y_j$ , переменные  $x$  и  $y$  заменяют некоторыми новыми переменными  $X = f_1(x, y); Y = f_2(x, y)$ , которые выбирают таким образом, чтобы при сделанных допущениях о виде функции  $y = y(x)$  переменные  $Y$  и  $X$  были связаны между собой линейной зависимостью

$$Y = K_1 X + K_0. \quad (5.4)$$

Таким образом, если проверяемая гипотеза о виде функции  $y = y(x)$  справедлива, то точки  $X_j = f_1(x_j, y_j), Y_j = f_2(x_j, y_j)$  должны располагаться на одной прямой.

Если предполагается, что заданная зависимость описывается степенной функцией

$$y = ax^b, \quad (5.5)$$

то, логарифмируя левую и правую части выражения (5.5)  $\lg y = \lg a + b \lg x$ , нетрудно прийти к выводу о том, что зависимость между вспомогательными переменными  $Y = \lg y$  и  $X = \lg x$  должна иметь линейный характер:

$$Y = \lg a + bX. \quad (5.6)$$

Если зависимость между величинами  $y$  и  $x$  аппроксимируется показательной функцией

$$y = ae^{bx}, \quad (5.7)$$

то линейной зависимостью

$$Y = \lg a + (b \lg e)X \quad (5.8)$$

будут связаны между собой переменные  $Y = \lg y$  и  $X = \lg x$ .

Для степенного полинома второй степени

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (5.9)$$

линейный вид должна иметь зависимость  $Y = \Delta y$  от  $X = x$ , где  $\Delta y = y_j - y_{j-1}$  — разность значений функции  $y(x)$ , соответствующих двум соседним значениям аргумента  $x_j$  и  $x_{j-1}$  (предполагается, что значения аргумента образуют арифметическую прогрессию с шагом  $h$ ).

Если заданная зависимость  $y = y(x)$  аппроксимируется экспоненциальным полиномом вида

$$y = ae^{bx} + c, \quad (5.10)$$

то линейной зависимостью

$$Y = \lg a + (b \lg e)X \quad (5.11)$$

должны быть связаны вспомогательные функции  $Y = \lg(y - c)$  и  $X = x$ . Для определения  $c$  выбирают три значения аргумента  $x_1, x_2, x_3 = (x_1 + x_2)/2$  и соответствующие им три значения функции  $y_1, y_2$  и  $y_3$ , которые затем подставляют в выражение

$$c = (y_1y_2 - y_3^2) / (y_1 + y_2 - 2y_3). \quad (5.12)$$

Если при проверке гипотезы о виде аппроксимирующей функции методом выравнивания окажется, что зависимость между вспомогательными переменными  $X$  и  $Y$  имеет линейный характер только в определенном диапазоне изменения  $X$ , то, следовательно, данная гипотеза справедлива только в соответствующем диапазоне изменения аргумента исследуемой функции  $y_j(x_j)$ .



**Пример 5.5.** На рис. 5.20, а изображена прямая ветвь ВАХ кремниевого диода. Проверим, можно ли аппроксимировать эту характеристику полиномом второй степени (5.9).

Выбираем шаг изменения аргумента  $h = 0,2$  В и рассчитываем значения вспомогательной переменной  $Y = \Delta y = y_j - y_{j-1}$ , соответствующие выбранным значениям аргумента (рис. 5.20, б). Как видно из рисунка, зависимость  $Y$

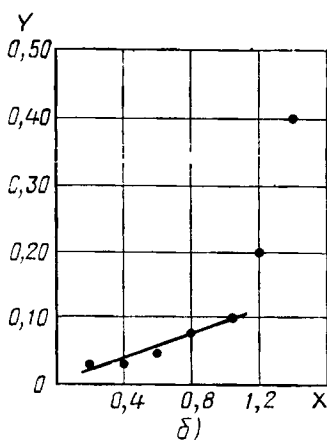
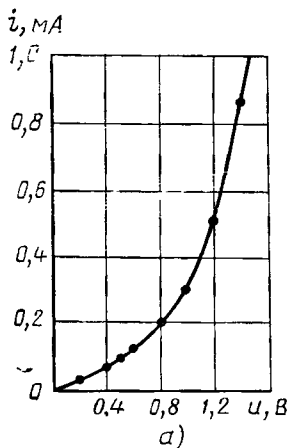


Рис. 5.20. К примеру 5.5

от  $X$  практически совпадает с линейной при изменении  $X = x$  в пределах от 0 до 1 В, следовательно, в этой области рассматриваемая ВАХ может быть аппроксимирована полиномом второй степени.



**Пример 5.6.** Проверим, можно ли аппроксимировать ВАХ диода (см рис. 5.20, а) с помощью экспоненциального полинома вида (5.10).

Для определения константы  $c$  выберем три значения аргумента  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 0,5$  и найдем соответствующие им значения функции  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0,3$  и  $y_3 = 0,095$ . Подставляя эти значения в выражение (5.12), получаем  $c = -0,082$ . Далее строим зависимость вспомогательной функции  $Y = \lg(y - c)$  от  $X = x$  (рис. 5.21). Как видно из рисунка, в пределах от  $X = 0$  до  $X = 1$  зависимость  $Y(X)$  практически совпадает с линейной, следовательно, в этой области рассматриваемая ВАХ может быть аппроксимирована экспоненциальным полиномом рассматриваемого типа.

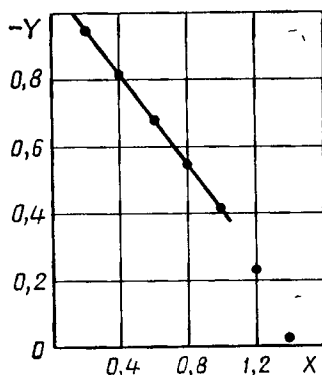


Рис. 5.21. К примеру 5.6

Из приведенных примеров следует, что задача выбора аппроксимирующей функции не имеет единственного решения. Выбор той или иной функции во многом зависит от опыта и интуиции исследователя и в значительной степени определяется простотой нахождения значений коэффициентов функции и удобством ее применения для анализа.

### Определение коэффициентов аппроксимирующей функции

Рассмотрим кратко основные методы определения коэффициентов аппроксимирующей функции. Наиболее часто для этой цели используют метод в ы б р а н н ы х т о ч е к, в соответствии с которым зна-

чения коэффициентов аппроксимирующей функции определяют исходя из совпадения значений этой функции со значениями аппроксимируемой функции в ряде заранее выбранных точек, называемых узлами интерполяции (от лат. *interpolare* — подновлять). Если для аппроксимации ВАХ, задаваемой множеством точек  $\{x_j, y_j\}$ , выбрана функция

$$y = y(x, a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (5.13)$$

имеющая  $n$  неизвестных постоянных коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то для определения этих коэффициентов выбирают  $n$  наиболее характерных точек ВАХ, лежащих в пределах рабочей области. Подставляя значения  $x_j$  и  $y_j$  в каждой из выбранных точек в выражение (5.13), получают систему из  $n$  уравнений  $y_j = y(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n)$ , решая которую, находят значения всех неизвестных коэффициентов. Очевидно, что такой выбор коэффициентов действительно обеспечивает совпадение значений аппроксимируемой и аппроксимирующей функций в узлах интерполяции, однако в промежутках между ними погрешность аппроксимации может быть весьма существенной (информация о ходе аппроксимирующей функции в них не учитывается), что является недостатком этого метода.

В отличие от метода выбранных точек метод наименьших квадратов обеспечивает наименьшую сумму квадратов отклонений  $\xi$  значений аппроксимирующей функции  $y = y(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$  от значений исходной функции  $y_j(x_j)$  в произвольном числе точек  $m$ , не связанном с числом неизвестных коэффициентов  $n$ :

$$\xi = \sum_{j=1}^m [y(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n) - y_j]^2.$$

Приравнивая нулю первые производные  $\xi$  по каждому из коэффициентов, получаем систему из  $n$  уравнений для определения  $n$  неизвестных числовых значений коэффициентов:

$$\frac{\partial \xi}{\partial a_1} = \sum_{j=1}^m 2 [y(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n) - y_j] \frac{\partial y(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_1} = 0;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a_2} = \sum_{j=1}^m 2 [y(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n) - y_j] \frac{\partial y(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_2} = 0;$$

.....

$$\frac{\partial \xi}{\partial a_n} = \sum_{j=1}^m 2 [y(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n) - y_j] \frac{\partial y(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_n} = 0.$$

Метод наименьших квадратов требует весьма громоздких вычислений и применяется обычно только в тех случаях, когда необходима высокая точность аппроксимации.

Если гипотеза о характере аппроксимирующей функции проверялась методом выравнивания, то неизвестные значения коэффициентов аппроксимирующей функции могут быть определены по известным

значениям коэффициентов  $K_0$  и  $K_1$  линейного уравнения (5.4), связывающего между собой значения вспомогательных переменных  $X$  и  $Y$ . Составляя уравнение прямой линии, вдоль которой располагаются точки  $X_j, Y_j$ , и сравнивая его с уравнением, описывающим зависимость между вспомогательными переменными, которое соответствует проверяемой гипотезе о виде функции  $y(x)$  [например, с уравнениями (5.6), (5.8) или (5.11)], находим значения искомых коэффициентов.



**Пример 5.7.** *Определим значения коэффициентов экспоненциального полинома  $i = ae^{bu} + c$ , аппроксимирующего ВАХ кремниевого диода (см. рис. 5.20, а) в диапазоне напряжений от 0 до 1 В.*

*Возможность аппроксимации ВАХ, приведенной на рис. 5.20, экспоненциальным полиномом указанного типа была показана в примере 5.6. Там же было найдено числовое значение коэффициента  $c$ . Составим уравнение прямой (рис. 5.21), на которой в рассматриваемом диапазоне изменения аргумента располагаются точки  $X_j, Y_j$ :*

$$(Y - Y_1)/(Y_2 - Y_1) = (X - X_1)/(X_2 - X_1).$$

*Здесь  $X_1, Y_1$  и  $X_2, Y_2$  — координаты двух любых точек, через которые проходит данная прямая. Выбирая  $X_1 = 0,2, Y_1 = -0,95$  и  $X_2 = 1, Y_2 = -0,42$ , получаем уравнение прямой в следующей форме:*

$$Y = 0,66X - 1,08.$$

*Сравнивая это выражение с выражением (5.11), получаем соотношения для определения неизвестных значений коэффициентов  $a$  и  $b$ :*

$$\lg a = -1,08; \quad b \lg e = 0,66,$$

*откуда  $a = 0,082, b = 1,52$ .*

*Таким образом, в диапазоне от 0 до 1 В рассматриваемая ВАХ может быть аппроксимирована выражением, мА,*

$$i = 0,082(e^{1,52u} - 1).$$

На практике для аппроксимации характеристик нелинейных элементов в основном используют степенные полиномы

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (5.14)$$

и кусочно-линейные функции. Аппроксимация с помощью степенного полинома универсальна и позволяет повышать точность расчета путем увеличения степени полинома.

Любые аппроксимирующие функции могут быть разложены в степенные ряды и приведены к виду (5.14). Поскольку сложность определения значений коэффициентов аппроксимирующей функции возрастает с увеличением числа членов полинома, для аппроксимации ВАХ обычно используют полиномы низких степеней. Часто для ап-

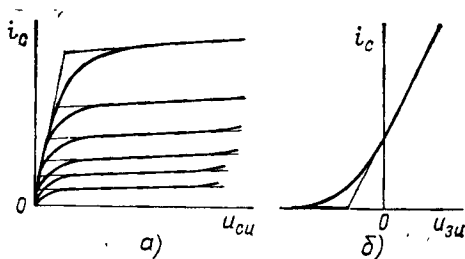


Рис. 5.22. Кусочно-линейная аппроксимация выходных (а) и проходных (б) характеристик полевого транзистора

проксимации ВАХ применяют неполные (укороченные) полиномы, т. е. полиномы, не содержащие членов некоторых степеней. Так, если ВАХ нелинейного элемента проходит через начало координат, то в полиноме (5.14) отсутствует член нулевой степени ( $a_0 = 0$ ). Симметричные ВАХ описываются нечетными полиномами, т. е. полиномами, содержащими члены только нечетных степеней.

Аппроксимация с помощью кусочно-линейных функций заключается в разбиении рабочей области аппроксимируемой функции на несколько участков (интервалов) и замене функции на каждом из них отрезком прямой. С увеличением количества интервалов точность аппроксимации возрастает, однако для упрощения анализа цепи желательно использовать кусочно-линейные функции с минимальным числом интервалов. Примеры кусочно-линейной аппроксимации ВАХ представлены на рис. 5.22.

### Аппроксимация вольт-амперных характеристик в окрестности рабочей точки

На практике часто приходится иметь дело с рабочей областью ВАХ настолько узкой, что можно считать, что изменение токов и напряжений происходит только в окрестности некоторой рабочей точки. В таких случаях нет необходимости аппроксимировать ВАХ в широком диапазоне токов и напряжений, а достаточно ограничиться аппроксимацией лишь в окрестности выбранной рабочей точки.

Пусть ток и напряжение некоторого нелинейного резистивного элемента в рабочей точке равны  $i_p$  и  $u_p$ . Значение тока  $i$  этого элемента, соответствующее некоторому новому значению напряжения  $u = u_p + \Delta u$ , можно представить в виде ряда Тейлора

$$i = i(u_p) + \frac{1}{1!} i'(u_p) \Delta u + \frac{1}{2!} i''(u_p) (\Delta u)^2 + \dots \quad (5.15)$$

Здесь  $i(u_p) = i_p$  — значение тока в рабочей точке,  $i'(u_p)$ ,  $i''(u_p)$  — значения производных тока по напряжению в рабочей точке, определяемые либо по заданной функции  $i = i(u)$ , аппроксимирующей ВАХ в широком диапазоне токов и напряжений, либо по табличным значениям, функции  $i_j(u_j)$  с помощью формул численного дифференцирования:

$$i'(u_j) = \frac{i(u_{j+1}) - i(u_{j-1})}{u_{j+1} - u_{j-1}};$$

$$i''(u_j) = \frac{i(u_{j+1}) - 2i(u_j) + i(u_{j-1}))}{(u_{j+1} - u_j)^2}.$$

Вводя обозначения  $a_0 = i(u_p) = i_p$ ;  $a_1 = \frac{1}{1!} i'(u_p)$ ;  $a_2 = \frac{1}{2!} i''(u_p)$ ; ..., выражение (5.15) можно представить в виде полинома относительно приращений напряжения

$$i = a_0 + a_1 \Delta u + a_2 (\Delta u)^2 + \dots \quad (5.16)$$



Как правило, при аппроксимации ВАХ нелинейных резистивных элементов в окрестности рабочей точки используются полиномы низких степеней, причем в большинстве случаев, когда приращения напряжения  $\Delta u = u - u_p$  и тока  $\Delta i = i - i_p$  весьма малы, можно ограничиться полиномом первой степени

$$i = a_0 + a_1 \Delta u. \quad (5.17)$$

Таким образом, вольт-амперные характеристики нелинейных резистивных элементов могут быть линеаризованы в окрестности выбранной рабочей точки.

## § 5.4. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗИСТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### Нелинейное сопротивление при гармоническом воздействии

Ранее, при рассмотрении графических методов анализа нелинейных цепей, было показано, что реакция нелинейного резистивного элемента на гармоническое внешнее воздействие в общем случае не является гармонической функцией времени. Так как графические методы анализа позволяют установить только качественное соответствие между видом ВАХ нелинейного резистивного элемента и реакций этого элемента на заданное гармоническое воздействие, то для получения количественных соотношений необходимо воспользоваться аналитическими методами.

Пусть ВАХ некоторого нелинейного сопротивления может быть аппроксимирована полиномом  $n$ -й степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (5.18)$$

а внешнее воздействие  $x = x(t)$  является гармонической функцией времени

$$x = X_m \cos \omega t. \quad (5.19)$$

Подставляя (5.19) в (5.18) и выражая слагаемые вида  $a_k [X_m \cos \omega t]^k$  через гармонические функции кратных частот

$$\begin{aligned} a_2 [X_m \cos \omega t]^2 &= \frac{a_2 X_m^2}{2} [1 + \cos 2\omega t]; \\ a_3 [X_m \cos \omega t]^3 &= \frac{a_3 X_m^3}{4} [3 \cos \omega t + \cos 3\omega t]; \\ a_4 [X_m \cos \omega t]^4 &= \frac{a_4 X_m^4}{8} [3 + 4 \cos 2\omega t + \cos 4\omega t]; \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$a_5 [X_m \cos \omega t]^5 = \frac{a_5 X_m^5}{16} [10 \cos \omega t + 5 \cos 3\omega t + \cos 5\omega t] \text{ и т. д.}$$

получаем

$$y = Y_0 + \sum_{k=1}^n Y_{mk} \cos k\omega t, \quad (5.21)$$

где

$$Y_- = a_0 + \frac{1}{2} a_2 X_m^2 + \frac{3}{8} a_4 X_m^4 + \frac{5}{16} a_6 X_m^6 + \dots;$$

$$Y_{m1} = a_1 X_{m1} + \frac{3}{4} a_3 X_m^3 + \frac{5}{8} a_5 X_m^5 + \dots;$$

$$Y_{m2} = \frac{1}{2} a_2 X_m^2 + \frac{1}{2} a_4 X_m^4 + \frac{15}{32} a_6 X_m^6 + \dots;$$

.....

$$Y_{mn} = \frac{1}{2^{n-1}} a_n X_m^n.$$

Как видно из выражения (5.21), реакция нелинейного сопротивления на гармоническое внешнее воздействие определенной частоты  $\omega$  представляет собой сумму постоянной составляющей  $Y_-$  и гармонических составляющих (гармоник) с частотами, кратными частоте внешнего воздействия. Гармоническая составляющая, частота которой равна частоте внешнего воздействия ( $k = 1$ ), называется первой гармоникой, гармоническая составляющая, частота которой в два раза превышает частоту внешнего воздействия ( $k = 2$ ), — второй гармоникой и т.д. Номер высшей гармонической составляющей ( $k = n$ ) равен степени полинома  $n$ , аппроксимирующего ВАХ рассматриваемого нелинейного сопротивления. Амплитуда  $k$ -й гармоники  $Y_{mk}$  зависит только от членов полинома  $k$ -й и более высоких степеней, причем амплитуды четных гармоник и постоянная составляющая определяются только членами полинома четных степеней, а амплитуды нечетных гармоник — членами полинома нечетных степеней. Следовательно, если ВАХ нелинейного сопротивления аппроксимируется четным полиномом, то реакция нелинейного сопротивления не будет содержать нечетных гармоник, а если ВАХ аппроксимируется нечетным полиномом, то реакция нелинейного сопротивления на гармоническое воздействие не будет содержать постоянной составляющей и четных гармоник. Выражение (5.21) описывает важнейшее свойство нелинейных цепей, заключающееся в том, что их реакция на гармоническое воздействие содержит колебания различных частот (в том числе и нулевой), т.е. нелинейная цепь выступает в роли генератора колебаний, частота которых отличается от частоты внешнего воздействия.

### Понятие о режимах малого и большого сигнала

Как следует из изложенного ранее, реакция безынерционного нелинейного резистивного элемента на гармоническое внешнее воздействие полностью определяется видом полинома, аппроксимирующего ВАХ рассматриваемого элемента. В свою очередь, степень аппроксимирующего полинома и значения его коэффициентов зависят от формы ВАХ элемента, а также от ширины и местоположения рабочей области ВАХ. На практике для выбора местоположения рабочей об-



ла, что в пределах рабочей области ВАХ может быть приближенно заменена отрезком прямой линии. Это означает, что в разложении (5.16) можно пренебречь всеми членами, содержащими  $\Delta u$  в степенях выше первой. Как следует из выражений (5.23), (5.24), ток нелинейного сопротивления в рассматриваемом режиме содержит две составляющие: постоянную  $I_0$ , равную току покоя, и переменную  $\Delta i$ , частота которой совпадает с частотой переменной составляющей приложенного напряжения:

$$\Delta i = I_{m1} \cos \omega t = a_1 U_m \cos \omega t. \quad (5.27)$$

Подставляя выражение (5.22) в (5.27) и используя определение дифференциального сопротивления (см. § 1.2), находим, что переменные составляющие тока и напряжения сопротивления связаны между собой соотношением

$$\Delta i = a_1 \Delta u = \Delta u / R_{\text{диф}}.$$

Таким образом, дифференциальное сопротивление нелинейного резистивного двухполюсного элемента можно рассматривать как сопротивление этого элемента для малых приращений, или, другими словами, как сопротивление переменному току в режиме малого сигнала.

Из выражений (5.25), (5.27) следует, что в режиме малого сигнала постоянная составляющая тока нелинейного сопротивления зависит только от постоянной составляющей приложенного напряжения, а амплитуда переменной составляющей тока прямо пропорциональна амплитуде переменной составляющей напряжения.

Следовательно, в режиме малого сигнала рассматриваемое сопротивление ведет себя подобно линейному, а нелинейность его проявляется только в том, то значения  $R_{\text{ст}}$  и  $R_{\text{диф}}$  зависят от выбора рабочей точки.

Анализ нелинейных резистивных цепей в режиме малого сигнала обычно выполняют в два этапа. На первом этапе анализируют нелинейную цепь по постоянному току, при этом все нелинейные резистивные элементы представляют схемами замещения по постоянному току (в частности, двухполюсные нелинейные резистивные элементы представляют статическими сопротивлениями). На втором этапе выполняют анализ цепи по переменному току и все элементы цепи представляют схемами замещения по переменному току (двухполюсные нелинейные резистивные элементы представляются дифференциальными сопротивлениями). Окончательно реакцию цепи находят как суперпозицию решений, полученных в процессе анализа по постоянному переменному току.

В режиме большого сигнала ВАХ нелинейного резистивного элемента в пределах рабочей области не может быть заменена отрезком прямой и в полиноме (5.16), аппроксимирующем ВАХ окрестности рабочей точки, приходится учитывать члены, содержащие  $\Delta u$  в степенях выше первой. В этом случае, как видно из выражений (5.24), переменная составляющая тока включает в себя гармонические составляющие, частота которых кратна частоте переменной

составляющей приложенного напряжения, постоянная составляющая тока отличается от тока покоя:

$$I_{-} = i_p + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots,$$

а амплитуда первой гармоники  $I_{m1}$  не прямо пропорциональна амплитуде переменной составляющей напряжения  $U_m$ .

Таким образом, в режиме большого сигнала постоянная составляющая тока и амплитуды всех гармоник зависят как от напряжения смещения, так и от амплитуды переменной составляющей напряжения  $U_m$ , поэтому раздельное исследование цепи по постоянному и переменному току становится невозможным.

### Нелинейное сопротивление при одновременном воздействии двух гармонических колебаний

Найдем реакцию нелинейного сопротивления на внешнее воздействие  $x(t)$ , представляющее собой сумму двух гармонических колебаний различных частот:

$$x(t) = X_{m1} \cos \omega_1 t + X_{m2} \cos \omega_2 t. \quad (5.28)$$

Пусть ВАХ нелинейного сопротивления аппроксимирована полиномом второй степени

$$y = a_1 x + a_2 x^2. \quad (5.29)$$

Подставляя (5.28) в (5.29) и выполняя преобразования, получаем

$$y = y^{(1)} + y^{(2)} + a_2 X_{m1} X_{m2} \cos(\omega_1 - \omega_2)t + a_2 X_{m1} X_{m2} \times \\ \times \cos(\omega_1 + \omega_2)t. \quad (5.30)$$

Здесь  $y^{(1)}$  и  $y^{(2)}$  — реакции рассматриваемого нелинейного сопротивления на воздействие каждой из составляющих  $x(t)$  в отдельности:

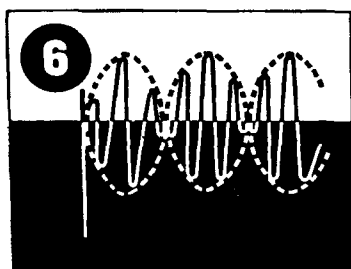
$$y^{(1)} = \frac{1}{2} a_2 X_{m1}^2 + a_1 X_{m1} \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} a_2 X_{m1}^2 \cos 2\omega_1 t; \quad (5.31)$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{2} a_2 X_{m2}^2 + a_1 X_{m2} \cos \omega_2 t + \frac{1}{2} a_2 X_{m2}^2 \cos 2\omega_2 t.$$

Из выражений (5.30), (5.31) видно, что реакция нелинейного сопротивления на одновременное воздействие двух гармонических колебаний различных частот не равна сумме реакций на воздействие каждого из гармонических колебаний в отдельности и содержит помимо постоянной составляющей и гармонических составляющих с частотами  $\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2$  колебания суммарной  $\omega_1 + \omega_2$  и разностной  $\omega_1 - \omega_2$  частот, которые называются комбинационными частот.



# Методы анализа переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами



## § 6.1. ЗАДАЧА АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

### Возникновение переходных процессов. Понятие о коммутации

Как отмечено ранее, в установившемся режиме токи и напряжения всех ветвей электрической цепи изменяются по периодическому закону или, в частном случае, сохраняют неизменные значения. Всякое изменение как топологии цепи, так и параметров входящих в нее элементов: подключение или отключение отдельных ветвей, изменение параметров пассивных элементов или параметров источников энергии, нарушает периодический характер изменения токов и напряжений ветвей, т. е. приводит к тому, что режим работы цепи становится неустановившимся. Любое скачкообразное изменение в цепи, приводящее к нарушению установившегося режима, будем называть **коммутацией** ей. Если внешнее воздействие на цепь и после коммутации имеет периодический характер, то с течением времени (теоретически через бесконечно большой промежуток времени) цепь перейдет в новый установившийся режим. Неустановившиеся процессы, которые имеют место в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому, называются **переходными**.

При анализе переходных процессов в цепи, как правило, можно пренебречь длительностью процесса коммутации, т. е. считать, что коммутация осуществляется практически мгновенно. Начало отсчета времени переходного процесса обычно совмещают с моментом коммутации, причем через  $t = 0_-$  обозначают момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, а через  $t = 0_+$ , или  $t = 0$ , — момент времени, следующий непосредственно за коммутацией (начальный момент времени после коммутации).

Переходные процессы, связанные с изменением топологии цепи или различными коммутациями пассивных элементов, присущи в основном устройствам производства, передачи и преобразования электрической энергии. Для радиотехнических устройств более характерен режим, когда топология цепи и параметры пассивных элементов неизменны, а внешнее воздействие на цепь изменяется по произвольному (чаще всего непериодическому) закону. Понятие коммутации в том

виде, как оно было сформулировано ранее, по сути дела, теряет смысл, так как изменение параметров источников энергии происходит практически непрерывно. При анализе неустановившихся процессов в радиотехнических цепях начало отсчета времени выбирают исходя из постановки задачи, независимо от того, находилась ли цепь до этого момента времени в установившемся режиме или нет. Для единства терминологии начало отсчета времени неустановившихся процессов, имеющих место в радиотехнических цепях, обычно также называют моментом коммутации.

### Законы коммутации

Переход реальной электрической цепи от одного установившегося режима к другому не может происходить мгновенно, скачком. Это объясняется тем, что каждому установившемуся состоянию соответствует определенное значение энергии, запасенной в электрическом и магнитном полях. Скачкообразный переход от одного установившегося режима к другому потребовал бы скачкообразного изменения запасенной энергии; что, учитывая выражение (1.5), возможно только, если источники энергии обладают бесконечно большой мощностью, т. е. отдаваемые ими токи или напряжения могут принимать бесконечно большие значения. *В связи с тем что любой реальный источник энергии может отдавать только конечную мощность, суммарная энергия, запасенная в цепи, может изменяться только плавно, т. е. представляет собой непрерывную функцию времени.* Принимая во внимание, что запасенная в цепи энергия определяется суммарным зарядом всех конденсаторов и потокоцеплением всех индуктивных катушек, приходим к выводу, что *суммарные потокоцепление и заряд цепи также являются непрерывными функциями времени*, в частности после коммутации ( $t = 0_+$ ) они равны суммарному потокоцеплению и суммарному заряду цепи в момент времени  $t = 0_-$ :

$$\Sigma \Psi(0_+) = \Sigma \Psi(0_-); \Sigma q(0_+) = \Sigma q(0_-). \quad (6.1)$$

Это положение известно под названием **принципа непрерывности во времени суммарного потокоцепления и суммарного электрического заряда цепи**. В реальных цепях в момент коммутации возможны коммутационные потери энергии, например потери энергии за счет искры или электрической дуги между контактами переключателей, поэтому суммарная энергия цепи после коммутации может быть несколько меньше суммарной энергии цепи до коммутации.

Если электрическая цепь не содержит энергоемких элементов, то процесс ее перехода от одного установившегося режима к другому должен происходить мгновенно. Такие безреактивные цепи можно рассматривать только в качестве весьма упрощенных моделей реальных цепей.

Если коммутация идеализированной электрической цепи не затрагивает ветвей, содержащих реактивные элементы, т. е. в процессе коммутации не производится подключения или отключения ветвей,



содержащих емкости и индуктивности, и не происходит скачкообразного изменения их параметров, то из принципа непрерывности суммарных потокосцепления и заряда цепи следует непрерывность токов индуктивностей и напряжений емкостей. Вывод о непрерывности токов индуктивностей и напряжений емкостей формулируется в виде законов (правил) коммутации.

**Первый закон коммутации:** в начальный момент времени после коммутации ток индуктивности сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-), \quad (6.2)$$

а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

**Второй закон коммутации:** в начальный момент времени после коммутации напряжение на емкости сохраняет такое же значение, как и непосредственно перед коммутацией:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-). \quad (6.3)$$

а затем плавно изменяется, начиная с этого значения.

Законы коммутации не накладывают ограничений на характер изменения токов емкостей, напряжений индуктивностей и токов или напряжений сопротивлений, которые могут изменяться произвольным образом, в том числе и скачкообразно.

Как известно, в теории цепей рассматриваются процессы, имеющие место в идеализированных цепях при идеализированных внешних воздействиях. Применение чрезмерно упрощенных моделей элементов цепей и внешних воздействий может привести к нарушению предпосылок, использованных при формулировании законов коммутации, и вследствие этого к нарушению самих законов. Так, представляют интерес случаи, когда идеализированные источники энергии в течение бесконечно короткого промежутка времени могут отдавать бесконечно большой ток или напряжение, т. е. развивать бесконечно большую мощность. При таких внешних воздействиях законы коммутации нарушаются и токи индуктивностей или напряжения емкостей изменяются скачкообразно.

Законы коммутации могут не выполняться и при некоторых коммутациях, затрагивающих ветви, содержащие реактивные элементы. Коммутации такого типа называются **некорректными**. Анализ процессов в цепях при некорректных коммутациях производят с использованием принципа непрерывности суммарных потокосцепления и электрического заряда цепи, который имеет более общий характер, чем законы коммутации.

Следует подчеркнуть, что некорректность коммутации возникает вследствие излишнее упрощенного рассмотрения процесса коммутации или в результате применения чрезмерно упрощенных моделей элементов и может быть устранена при более строгом анализе.

Таким образом, термин «некорректная коммутация» является не вполне удачным: правильнее говорить не о некорректной коммутации, а о некорректной постановке задачи коммутации.



**Пример 6.1.** Рассмотрим процесс зарядки конденсатора от гальванического элемента. Если использовать последовательные схемы замещения конденсатора и источника энергии (рис. 6.1, а), то переключение ключа  $S$  из положения 1 в положение 2 (или наоборот) является корректной коммутацией.

Действительно, пусть в исходном состоянии ключ находится в положении 1 и емкость  $C$  полностью разряжена, а в момент времени  $t = 0$  ключ перебрасывается в положение 2. Если бы в результате коммутации напряжение на емкости возросло скачком, то в соответствии с компонентным уравнением емкости (1.13) ток цепи достиг бы бесконечно большого значения, что привело бы к тому, что левая часть уравнения баланса напряжений для цепи, получающейся после коммутации  $u_C + (R_C + R_i) i = E$ , не равнялась бы правой части.

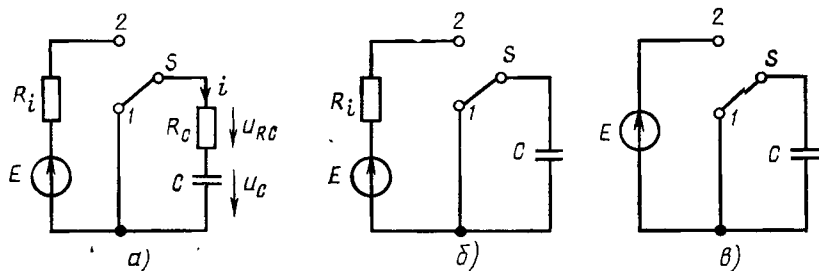


Рис. 6.1. К примеру 6.1

Таким образом, предположение о том, что в рассматриваемой цепи нарушается второй закон коммутации, приводит к явно неправильному результату. Следовательно, в начальный момент времени после коммутации напряжения на емкости сохраняет то же значение, что и в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации:  $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ , а затем плавно увеличивается, стремясь в пределе к новому установившемуся значению, равному э.д.с. источника напряжения (в установившемся режиме ток через емкость равен нулю, и из уравнения баланса напряжений следует, что  $u_C = E$ ).

Если в исходном состоянии ключ находится в положении 2, а емкость  $C$  заряжена до напряжения  $E$ , то при перебросе ключа в положение 1 напряжение на емкости в начальный момент времени после коммутации сохраняет значение, которое было в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, напряжение на сопротивлении  $R_C$  скачком становится равным  $-u_C(0_+) = -E$ , а ток сопротивления скачком возрастает до значения  $-i_C(0_+) = -E/R_C$ . Затем напряжение и ток емкости плавно уменьшаются, стремясь в пределе к нулю.

Если упростить схему замещения конденсатора и исключить из нее последовательное сопротивление  $R_C$  (рис. 6.1, в), то перевод ключа из положения 1 в положение 2 будет по-прежнему оставаться корректной коммутацией в то время, как перевод ключа из положения 2 в положение 1 — станет некорректной коммутацией (некорректность коммутации объясняется тем, что рассматриваемая схема замещения цепи не учитывает потерю энергии в конденсаторе и соединительных проводах, а также энергию, выделяющуюся вместе с искрой между контактами ключа. В зависимости от требуемой точности анализа необходимо либо принять, что напряжение на емкости скачком изменилось от одного установившегося значения до другого, либо применить более сложную схему замещения цепи с учетом ключа и соединительных проводников).

Если упростить и далее схему замещения цепи (исключив из нее внутреннее сопротивление источника  $R_i$ ) (рис. 6.1, в), то перевод ключа из одного положения в другое всегда будет представлять собой некорректную коммутацию.



**Пример 6.2.** Рассмотрим идеализованную цепь (рис. 6.2). Пусть в исходном состоянии ключ  $S$  находится в положении 1, через индуктивность  $L_1$  протекает постоянный ток  $i_{L1}(0_-)$ , а ток индуктивности  $L_2$  равен нулю:  $i_{L1}(0_-) = E/R$ ;  $i_{L2}(0_-) = 0$ .

Если в момент времени  $t = 0$  ключ  $S$  перебросить из положения 1 в положение 2, то индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  окажутся включенными последовательно и их токи должны мгновенно уравниваться (для соблюдения уравнения баланса токов). Очевидно, что такая коммутация некорректна, причем начальное значение тока индуктивностей  $i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+) = i_L(0_+)$  после коммутации может быть определено из принципа непрерывности потокосцепления:  $L_1 i_{L1}(0_+) + L_2 i_{L2}(0_+) = (L_1 + L_2) \times i_L(0_+) = L_1 i_{L1}(0_-)$ , откуда

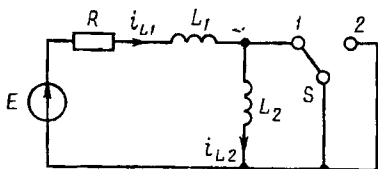


Рис. 6.2. К примеру 6.2

$$i_L(0_+) = L_1 i_{L1}(0_-) / (L_1 + L_2) = L_1 E / [(L_1 + L_2) R].$$

При анализе такой цепи обычно принимается, что токи индуктивностей  $L_1$  и  $L_2$  скачком изменяются до уровня  $i_L(0_+)$ , а затем плавно увеличиваются, начиная с этого уровня, до установившегося значения  $i_L = E/R$ .

Можно убедиться, что энергия данной цепи непосредственно после коммутации

$$\omega_{L1}(0_+) + \omega_{L2}(0_+) = (L_1 + L_2) i_L^2(0_+) / 2 = L_1^2 E^2 / [2 (L_1 + L_2) R^2]$$

меньше, чем энергия, запасенная в индуктивности  $L_1$  до коммутации:

$$\omega_{L1}(0_-) = L_1 i_{L1}^2(0_-) / 2 = L_1 E^2 / (2R^2),$$

причем разность между этими величинами равна энергии коммутационных потерь. Рассмотренная коммутация может быть сделана корректной, если при анализе принять во внимание конечное время коммутации, применить более точные модели индуктивных катушек, содержащие не только сопротивления потерь, но и паразитные емкости, и учесть явления, имеющие место в искре или дуге между контактами. Разумеется, учет этих явлений существенно усложняет анализ.

## Общий подход к анализу переходных процессов

Задача анализа переходных процессов заключается в общем случае в определении мгновенных значений токов и напряжений всех или части ветвей электрической цепи в произвольный момент времени после коммутации. Для этого необходимо найти общее решение основной системы уравнений электрического равновесия цепи или системы уравнений электрического равновесия, составленной любым другим способом, при  $t > 0$ . Исключая из системы уравнений все неизвестные величины, кроме одной, получают дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно этой величины. Таким образом, задача анализа переходных процессов может быть сведена к решению дифференциального уравнения цепи при  $t > 0$ . В частности, задача анализа переходных процессов в линейной инвариантной во времени цепи с сосредоточенными параметрами  $n$ -го порядка сводится к нахождению об-

шего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения  $\nu$ -го порядка вида (1.61).

Общее решение такого уравнения содержит  $\nu$  произвольных постоянных, для нахождения которых необходимо задать значения исходной функции  $y$  и ее  $\nu - 1$  первых производных в начальный момент времени после коммутации, т. е. при  $t = 0_+$ . Эти величины определяют с помощью законов коммутации на основании анализа процессов, имеющих место в рассматриваемой цепи перед коммутацией. В результате анализа цепи до коммутации рассчитывают значения токов всех индуктивностей и напряжения всех емкостей в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации. Далее, используя законы коммутации (в более общем случае — принцип непрерывности потокоцепления и электрического заряда цепи), находят значения токов индуктивностей и напряжений емкостей в начальный момент времени после коммутации. Очевидно, что для определения  $\nu$  начальных условий требуется применить законы коммутации к  $\nu$  независимо включенным реактивным элементам, т. е. к реактивным элементам, включенным таким образом, что их энергетическое состояние может быть задано независимо. Следовательно, порядок сложности цепи, равный порядку дифференциального уравнения цепи  $\nu$ , определяется числом независимо включенных реактивных элементов. Совокупность начальных значений токов независимо включенных индуктивностей и напряжений независимо включенных емкостей представляет собой независимые начальные условия цепи. Используя независимые начальные условия и уравнения электрического равновесия цепи после коммутации, находят зависимые начальные условия, т. е. значения токов и напряжений любых ветвей и их производных в момент времени  $t = 0_+$ .

Если энергия, запасенная в цепи в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, равна нулю, то говорят, что цепь анализируется при нулевых начальных условиях. Если начальный запас энергии не равен нулю, то цепь анализируется при ненулевых начальных условиях (в первом случае все независимые начальные условия равны нулю, во втором случае хотя бы одно из них имеет ненулевое значение).

*Следует обратить внимание на то, что независимые начальные условия, а следовательно, токи и напряжения ветвей цепи после коммутации определяются исходя из энергетического состояния цепи только в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации ( $t = 0_-$ ), и не зависят от характера процессов, имеющих место в рассматриваемой цепи до коммутации (при  $t < 0$ ).*

## Определение порядка сложности цепи

В некоторых случаях порядок сложности электрической цепи  $\nu$  бывает желательно выяснить еще до составления уравнений электрического равновесия. Очевидно, что значение  $\nu$  не может превышать общего числа реактивных элементов цепи  $p_{LC}$ . В связи с тем что последовательно или параллельно включенные реактивные элементы од-

ного типа не являются энергетически независимыми, при подсчете  $p_{LC}$  необходимо объединять такие элементы и заменять их эквивалентным элементом соответствующего типа.

Если в цепи имеется так называемый емкостный контур, т. е. контур, образованный только емкостями и, может быть, независимыми источниками напряжения, то напряжение любой из емкостей такого контура выражают через напряжения других емкостей с помощью уравнения баланса напряжений, составленного для данного емкостного контура. Таким образом, наличие в цепи емкостного контура уменьшает на единицу число независимых включенных емкостей и снижает порядок сложности цепи.

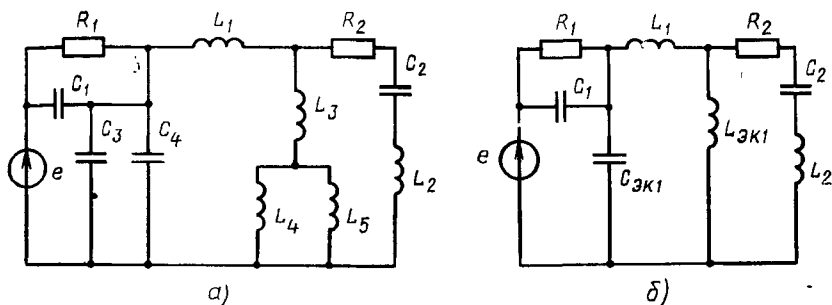


Рис. 6.3. К примеру 6.3

Число независимо включенных индуктивностей снижается при наличии в цепи так называемого индуктивного сечения, т. е. сечения, в которое входят только индуктивности, и, может быть, независимые источники тока. Частным случаем индуктивного сечения является индуктивный узел (узел, к которому подключены только индуктивности и независимые источники тока). Ток, а следовательно, и энергия любой из индуктивностей, входящей в индуктивное сечение, могут быть выражены через токи других индуктивностей на основании уравнений баланса токов, составленного для данного сечения.

Если в состав цепи входит несколько емкостных контуров или индуктивных сечений, то при оценке числа независимо включенных реактивных элементов учитывают только независимые емкостные контуры и независимые индуктивные сечения, т. е. такие контуры и сечения, уравнения баланса напряжений и токов которых независимы.

Таким образом, порядок сложности линейной цепи, составленной только из идеализированных пассивных элементов и независимых источников тока или напряжения:

$$v = p_{LC} - n_{ек} - q_{ис}, \quad (6.4)$$

где  $p_{LC}$  — общее число реактивных элементов;  $n_{ек}$  — число независимых емкостных контуров;  $q_{ис}$  — число независимых индуктивных сечений.

Следует иметь в виду, что порядок сложности цепи зависит также от соотношений между параметрами входящих в нее элементов, поэтому выражение (6.4) позволяет оценить только максимально возможное значение порядка сложности цепи (в том числе и цепи с управляемыми источниками).



**Пример 6.3.** Определим порядок сложности цепи, схема которой приведена на рис. 6.3, а.

Преобразуя участки цепи, содержащие последовательно и параллельно включенные однотипные реактивные элементы (рис. 6.3, б), определяем общее число реактивных элементов цепи  $p_{LC} = 6$ . Рассматриваемая цепь содержит один емкостной контур, образованный емкостями  $C_1, C_{Эк1}$  и источником напряжения  $e$ , и одно индуктивное сечение (индуктивности  $L_1, L_2, L_{Эк1}$ ), поэтому порядок сложности данной цепи не может превышать четырех.

## § 6.2. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

### Свободные и принужденные составляющие токов и напряжений

Классический метод анализа переходных процессов в линейных инвариантных во времени цепях с сосредоточенными параметрами основан на классическом методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами [см. (1.61)]

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного дифференциального уравнения

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \quad (6.5)$$

которое получается из (1.61) при  $f(t) = 0$ .

Общее решение однородного дифференциального уравнения (6.5) характеризует так называемые свободные процессы в цепи, т. е. процессы в цепи после коммутации в отсутствие внешних источников энергии (напомним, что функция  $f(t)$  обращается в нуль при выключении всех независимых источников тока и напряжения).

Таким образом, характер свободных процессов не зависит от вида внешнего воздействия на цепь, а определяется только параметрами пассивных элементов и линейно управляемых источников, а также топологией цепи после коммутации.

Свободные процессы в цепи протекают за счет разности энергий, соответствующих установившимся режимам работы цепей до и после коммутации. В связи с тем что эта разность имеет конечное значение,

свободные процессы в цепях с потерями с течением времени затухают (в идеализированных цепях без потерь свободные процессы имеют незатухающий характер).

Частное решение уравнения (1.61) определяет **п р и н у ж д е н н ы й** р е ж и м работы цепи, т.е. режим, задаваемый действующими в цепи независимыми источниками энергии.

Если внешнее воздействие на цепь после коммутации изменяется по периодическому закону (сохраняет неизменное значение), то частное решение уравнения (1.61) характеризует установившийся режим цепи после коммутации.

Итак, при использовании классического метода анализа переходных процессов искомая реакция цепи  $y$  (ток или напряжение какой-либо ветви после коммутации) представляется в виде суммы свободной  $y_{св}$  и принужденной  $y_{пр}$  составляющих:

$$y = y_{св} + y_{пр}.$$

Свободная составляющая реакции цепи с течением времени затухает  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{св} = 0$ , поэтому принужденная составляющая реакции представляет собой установившееся значение искомого тока или напряжения после коммутации  $y_{пр} = \lim_{t \rightarrow \infty} y$ .

Для определения принужденной составляющей реакции цепи можно воспользоваться рассмотренными ранее методами анализа линейных цепей в установившемся режиме. Если после коммутации токи всех независимых источников тока и напряжения всех независимых источников напряжения не изменяются, то с течением времени в цепи после коммутации установится режим постоянного тока. Очевидно, что принужденная составляющая реакции цепи в этом случае будет являться постоянным током или напряжением.

Если после коммутации цепь находится под гармоническим воздействием определенной частоты, то принужденная составляющая реакции цепи также будет гармонической функцией времени и для определения  $y_{пр}$  можно воспользоваться методом комплексных амплитуд.

Если цепь после коммутации находится под воздействием нескольких источников гармонических колебаний различной частоты, то, используя принцип наложения, мгновенное значение  $y_{пр}$  можно найти как сумму мгновенных значений частичных токов или напряжений, вызванных в установившемся после коммутации режиме каждым из источников в отдельности. Применяя принцип наложения, можно найти принужденную составляющую реакции цепи и тогда, когда внешнее воздействие на цепь  $x(t)$  описывается периодической функцией более сложного вида, удовлетворяющей у с л о в и я м Д и р и х л е, т. е. имеющей на конечном интервале конечное число максимумов и минимумов и конечное число разрывов первого рода. В этом случае функция  $x(t)$  может быть разложена в ряд Фурье (представлена в виде суммы гармонических колебаний кратных частот), а мгновенное значение  $y_{пр}$  может быть найдено как сумма мгновенных значений частичных токов или напряжений, вызванных в установившемся после ком-

мутации режиме каждой из гармонических составляющих внешнего воздействия в отдельности.

Для определения свободной составляющей  $y_{св}$  реакции цепи необходимо найти  $\nu$  корней  $p_i$  характеристического уравнения

$$a_\nu p^\nu + a_{\nu-1} p^{\nu-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (6.6)$$

соответствующего однородному уравнению (6.5). Когда все корни уравнения (6.6) простые (различные), свободная составляющая реакции имеет вид

$$y_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_\nu e^{p_\nu t} = \sum_{i=1}^{\nu} A_i e^{p_i t}, \quad (6.7)$$

т. е. каждому простому корню  $p_i$  соответствует слагаемое свободной составляющей вида

$$y_{св}^{(i)} = A_i e^{p_i t},$$

где  $A_i$  — постоянная интегрирования.

Если какой-либо корень  $p_k$  характеристического уравнения (6.6) имеет кратность  $n$ , то этому корню соответствует слагаемое свободной составляющей вида

$$y_{св}^{(k)} = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots + A_n t^{n-1}) e^{p_k t} = e^{p_k t} \sum_{j=1}^n A_j t^{j-1}. \quad (6.8)$$

Характеристическое уравнение (6.6) может иметь вещественные или комплексные корни, причем все корни  $p_i$  характеристического уравнения линейной цепи, составленной из идеализированных пассивных элементов и независимых источников энергии, расположены в левой полуплоскости комплексного переменного  $p$  (включая и мнимую ось):  $\text{Re}[p_i] \leq 0$ , так как только в этом случае свободные процессы в цепи имеют затухающий (точнее, ненарастающий) характер.

### Общая схема применения классического метода анализа переходных процессов

Наметим основные этапы классического метода анализа переходных процессов в линейных инвариантных во времени цепях с сосредоточенными параметрами.

1. Анализ цепи до коммутации. В результате этого анализа определяют токи индуктивностей и напряжения емкостей в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации ( $t = 0_-$ ).

2. Определение независимых начальных условий. Независимые начальные условия представляют собой токи индуктивностей и напряжения емкостей в момент времени ( $t = 0_+$ ). Независимые начальные условия находят с помощью законов коммутации или принципа непрерывности потокосцепления и электрического заряда цепи.



3. Составление дифференциального уравнения цепи после коммутации (при  $t \geq 0$ ). Дифференциальное уравнение цепи получают из системы уравнений электрического равновесия цепи, составленной любым методом, путем исключения всех неизвестных величин, кроме одной, представляющей собой ток или напряжение какой-либо ветви.

4. Анализ установившегося процесса в цепи после коммутации (при  $t \rightarrow \infty$ ). В результате анализа установившегося процесса в цепи после коммутации находят принужденную составляющую реакции цепи (частное решение дифференциального уравнения цепи).

5. Определение свободной составляющей реакции цепи. На этом этапе составляют характеристическое уравнение цепи, находят его корни и определяют общий вид свободной составляющей реакции цепи (общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению цепи после коммутации).

6. Нахождение общего вида реакции цепи. Общий вид реакции цепи (общее решение дифференциального уравнения цепи) находят путем суммирования свободной и принужденных составляющих реакции цепи.

7. Определение постоянных интегрирования. Постоянные интегрирования находят по зависимым начальным условиям (значениям искомых токов или напряжений и их  $\nu - 1$  первых производных в начальный момент времени после коммутации). Для определения зависимых начальных условий используют независимые начальные условия и уравнения электрического равновесия цепи после коммутации.

8. Определение реакции цепи, соответствующей заданным начальным условиям. Подставляя постоянные интегрирования в общее решение дифференциального уравнения цепи после коммутации, находят частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданным начальным условиям, т. е. искомый ток или напряжение одной из ветвей при  $t > 0$ .

### Переходные процессы в последовательной RC-цепи при скачкообразном изменении э. д. с.

Рассмотрим переходные процессы в последовательной RC-цепи (рис. 6.4, а) при скачкообразном изменении э. д. с. идеализированного источника постоянного напряжения

$$e(t) = \begin{cases} E_1 & \text{при } t < 0; \\ E_2 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Такое изменение э. д. с. источника напряжения происходит например, когда в цепи, схема которой приведена на рис. 6.4, б, ключ  $S$  в момент времени  $t = 0$  перебрасывают из положения 1 в положение 2.

Очевидно, что в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, напряжение на емкости равнялось напряжению на зажимах источника энергии при  $t < 0$  (предполагается, что до коммутации цепь находилась в установившемся режиме). Используя второй закон коммутации, находим единственное независимое начальное условие

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = E_1. \quad (6.9)$$

Дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи можно составить относительно любой из неизвестных величин (напряжения на сопротивлении  $u_R$ , напряжения на емкости  $u_C$ , тока сопротивления

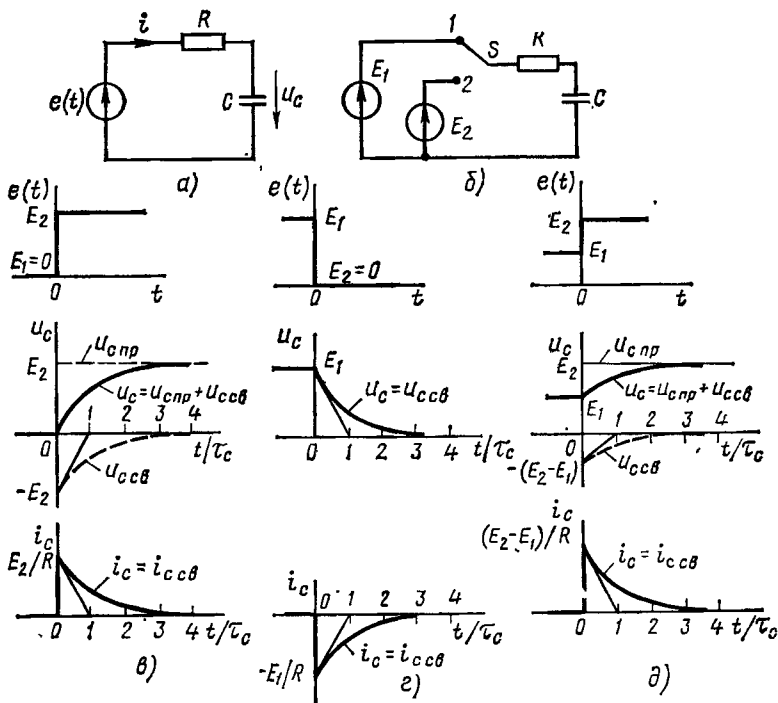


Рис. 6.4. К исследованию переходных процессов при скачкообразном изменении э. д. с. в последовательной RC-цепи:

а, б — схемы цепи; в —  $E_1=0$ ; г —  $E_2=0$ ; д —  $E_2 > E_1 > 0$

$i_R$ , тока емкости  $i_C$ ), однако, учитывая, что для данной цепи известно начальное значение напряжения на емкости, целесообразно составить уравнение относительно этого напряжения.

Исключая из основной системы уравнений электрического равновесия цепи при  $t \geq 0$

$$u_R + u_C = E_2; \quad i_C = -C \frac{du_C}{dt};$$

$$i_C = i_R = -i; \quad u_R = Ri_R$$

все неизвестные величины, кроме  $u_C$ , получаем

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_2.$$

Напряжение на емкости при  $t \geq 0$  представим в виде суммы принужденной и свободной составляющих

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}. \quad (6.10)$$

Очевидно, что с течением времени после коммутации в цепи должен установиться режим постоянного тока, причем установившееся значение тока емкости будет равно нулю (сопротивление емкости постоянному току бесконечно велико), а установившееся значение напряжения на емкости — напряжению источника энергии после коммутации. Таким образом, принужденная составляющая напряжения на емкости

$$u_{Cпр} = E_2. \quad (6.11)$$

Характеристическое уравнение цепи

$$RCp + 1 = 0$$

имеет единственный корень

$$p_1 = -1/(RC) = -1/\tau_C,$$

где  $\tau_C = RC$  — постоянная времени последовательной  $RC$ -цепи, поэтому свободная составляющая напряжения на емкости  $u_{Cсв}$  содержит один экспоненциальный член

$$u_{Cсв} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-t/\tau_C}. \quad (6.12)$$

Используя выражения (6.10), (6.11) и (6.12), находим напряжение на емкости после коммутации при произвольных начальных условиях

$$u_C = E_2 + A_1 e^{-t/\tau_C}. \quad (6.13)$$

Для определения постоянной интегрирования  $A_1$  воспользуемся независимым начальным условием (6.9). Полагая в (6.13)  $t = 0$ ,  $u_C = u_C(0_+) = E_1$ , получаем  $E_1 = E_2 + A_1$ , откуда  $A_1 = E_1 - E_2$ .

Таким образом, при заданных начальных условиях напряжение на емкости после коммутации ( $t \geq 0$ ) определяется выражением

$$u_C = E_2 + (E_1 - E_2) e^{-t/\tau_C}. \quad (6.14)$$

Зависимость напряжения на емкости от времени при различных соотношениях между  $E_1$  и  $E_2$  показана на рис. 6.4,  $\theta - \delta$ . Здесь же показана зависимость от времени тока емкости  $i_C$ , которая при  $t \geq 0$  определяется путем дифференцирования выражения (6.14) по времени и умножения результата на  $C$ :

$$i_C = \frac{E_1 - E_2}{R} e^{-t/\tau_C}. \quad (6.15)$$

Как видно из рисунка, в начальный момент после коммутации напряжение на емкости сохраняет то же значение, что и до коммутации, а затем плавно изменяется, стремясь в пределе к новому установившемуся значению. Ток емкости в начальный момент скачком изменяется от нуля до начального значения:

$$i_C(0_+) = (E_2 - E_1)/R, \quad (6.16)$$

а затем плавно уменьшается, стремясь в пределе к нулю. В связи с тем что установившееся значение тока емкости до и после коммутации равно нулю, ток рассматриваемой цепи содержит только свободную составляющую.

Анализ выражения (6.16) показывает, что значение тока емкости  $i_C(0_+)$  численно равно постоянному току, который протекал бы в цепи после коммутации, если бы емкость  $C$  была заменена идеальным источником напряжения э. д. с.  $E_1$ . Следовательно, в начальный момент времени после коммутации емкость ведет себя подобно источнику напряжения, э. д. с. которого равна начальному значению напряжения на емкости. Если начальное значение напряжения на емкости равно нулю, то в начальный момент после коммутации ветвь с емкостью можно считать короткозамкнутой, т. е. сопротивление емкости равно нулю.

Далее (см. пример 6.4) будет показано, что в начальный момент времени после коммутации индуктивность ведет себя подобно источнику тока, ток которого равен начальному значению тока через индуктивность. При  $i_L(0_-) = 0$  ветвь с индуктивностью в начальный момент времени можно считать разомкнутой, т. е. сопротивление индуктивности при  $t = 0_+$  имеет бесконечно большое значение.

Как видно из выражений (6.12) и (6.15), скорость затухания свободных составляющих тока и напряжения емкости не зависит от значения э. д. с. идеализированного источника напряжения до и после коммутации, а определяется только постоянной времени цепи  $\tau_C$ , которая численно равна промежутку времени, в течение которого свободные составляющие тока и напряжения уменьшаются в  $e \approx 2,718$  раз. Можно показать, что при любом  $t \geq 0$

$$\tau_C = \left| \frac{u_{C\text{св}}}{du_{C\text{св}}/dt} \right| = \left| \frac{i_{C\text{св}}}{di_{C\text{св}}/dt} \right|.$$

Таким образом, постоянная времени рассматриваемой цепи численно равна длине подкасательной к кривой  $u_{C\text{св}}$  или  $i_{C\text{св}}$  при любом значении  $t \geq 0$ , т. е. длине отрезка временной оси, заключенного между какой-либо точкой  $t = t_1 \geq 0$  и точкой пересечения временной оси касательной, проведенной к кривой  $u_{C\text{св}}$  или  $i_{C\text{св}}$  в точке  $u_{C\text{св}}(t_1)$  или  $i_{C\text{св}}(t_1)$ . Для определения постоянной времени цепи касательную к кривым  $i_{C\text{св}}$  или  $u_{C\text{св}}$  наиболее удобно проводить при  $t_1 = 0$ . В этом случае она пересекает ось времени в точке  $t = \tau_C$  (рис. 6.4, в—д).

Чем больше постоянная времени цепи, тем медленнее затухают свободные составляющие токов и напряжений и, следовательно, токи и напряжения цепи медленнее приближаются к установившимся значениям.

Теоретически процесс установления нового режима длится бесконечно долго, однако, учитывая, что к моменту времени, равному  $4\tau_c$  после коммутации, свободные составляющие уменьшаются до уровня менее 0,02 от начального значения, переходные процессы в цепи можно считать практически закончившимися через промежуток времени  $(4 \div 5)\tau_c$  после коммутации.

### Подключение к последовательной $RL$ -цепи источника гармонического напряжения

Рассмотрим переходные процессы в последовательной  $RL$ -цепи, содержащей идеализированный источник, э. д. с. которого  $e(t)$  изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ E_m \cos(\omega t + \psi) & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Временная диаграмма  $e(t)$  при  $\psi > 0$  приведена на рис. 6.5, а. В этом случае ток индуктивности в момент времени, непосредственно предшествующий коммутации,  $i_L(0_-) = 0$ .

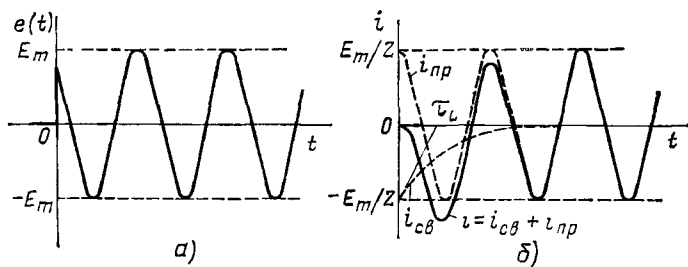


Рис. 6.5. К исследованию переходных процессов при включении источника гармонического напряжения в последовательную  $RL$ -цепь

Дифференциальное уравнение цепи, составленное относительно тока  $i = i_L$ , при  $t \geq 0$  имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \cos(\omega t + \psi). \quad (6.18)$$

Принужденная составляющая тока может быть найдена с помощью метода комплексных амплитуд

$$i_{np} = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

где  $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ,  $\varphi = \text{arctg}(\omega L/R) \rightarrow$  модуль и аргумент комплексного входного сопротивления рассматриваемой цепи.

Характеристическое уравнение цепи

$$Lp + R = 0$$

имеет единственный корень  $p_1 = -R/L$ , поэтому свободная составляющая тока содержит один экспоненциальный член

$$i_{св} = A_1 e^{-t/\tau_L},$$

где  $\tau_L = L/R$  — постоянная времени последовательной  $RL$ -цепи.

Суммируя свободную и принужденную составляющие, находим общее решение дифференциального уравнения цепи (6.18) после коммутации:

$$i = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + A_1 e^{-t/\tau_L}. \quad (6.19)$$

Для определения постоянной интегрирования  $A_1$  воспользуемся первым законом коммутации, в соответствии с которым начальное значение тока рассматриваемой цепи должно равняться нулю:

$$i(0_+) = i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0. \quad (6.20)$$

Подставляя (6.20) в выражение (6.19), получаем  $\frac{E_m}{z} \cos(\psi - \varphi) + A_1 = 0$ , откуда

$$A_1 = -\frac{E_m}{z} \cos(\psi - \varphi). \quad (6.21)$$

С учетом (6.21) выражение для тока рассматриваемой цепи после коммутации принимает вид

$$i = \frac{E_m}{z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{E_m}{z} [\cos(\psi - \varphi)] e^{-t/\tau_L}.$$

Характер переходных процессов зависит от соотношения между начальной фазой  $\psi$  э. д. с. идеализированного источника напряжения и аргументом  $\varphi$  входного сопротивления цепи. Если  $\psi$  выбирают таким образом, что начальные значения принужденной  $i_{пр}(0_+)$  и свободной  $i_{св}(0_+)$  составляющих равны нулю ( $\psi = \varphi \pm \pi/2$ ), то свободная составляющая тока тождественно равна нулю. Переходные процессы в цепи в этом случае отсутствуют, т. е. установившийся режим наступает сразу же после коммутации. При  $\psi = \varphi$  или  $\psi = \varphi \pm \pi$  начальные значения свободной и принужденной составляющих максимальны, и отличие в форме кривых  $i = i(t)$  и  $i_{пр} = i_{пр}(t)$  выражено наиболее резко (рис. 6.5, б).

Как и для последовательной  $RC$ -цепи, скорость затухания свободной составляющей тока рассматриваемой цепи не зависит от характера внешнего воздействия, а определяется только постоянной времени  $\tau_L$ . За промежуток времени  $t = \tau_L$  свободная составляющая тока уменьшается в  $e$  раз и к моменту времени  $t = (4 \div 5)\tau_L$  после коммутации переходные процессы в цепи можно считать практически закончившимися.

## Подключение к последовательной $RLC$ -цепи источника постоянного напряжения\*)

Последовательная  $RLC$ -цепь содержит два независимо включенных реактивных элемента, поэтому процессы в ней описываются дифференциальным уравнением второго порядка, а для определения постоянных интегрирования необходимо задать два независимых начальных условия. Если э. д. с. идеального источника напряжения изменяется во времени по закону

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ E = \text{const} & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$$

то независимые начальные условия цепи имеют нулевые значения

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0; \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0. \quad (6.22)$$

Составим уравнение электрического равновесия цепи по методу токов ветвей

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t idt = E. \quad (6.23)$$

Дифференцируя правую и левую части (6.23), получаем дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи после коммутации

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (6.24)$$

Для определения единственного решения этого уравнения, соответствующего заданному режиму работы цепи до коммутации, необходимо определить начальные значения тока цепи и его первой производной по времени. Начальное значение тока цепи совпадает с начальным значением тока индуктивности

$$i(0_+) = i_L(0_+) = 0, \quad (6.25)$$

а начальное значение первой производной тока цепи по времени может быть найдено с использованием независимых начальных условий (6.22) и уравнения электрического равновесия цепи (6.23) при  $t = 0_+ = 0$ ;

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{E}{L}. \quad (6.26)$$

В связи с тем что установившееся значение тока этой цепи после коммутации равно нулю, ток при  $t \geq 0$  содержит только свободную составляющую:  $i = i_{св}$ .

\*) Приведенные здесь результаты легко использовать для анализа переходных процессов в одиночном колебательном контуре, причем в связи с тем, что свободные составляющие тока и напряжения контура определяются при выключенных источниках энергии, нетрудно заключить, что характер свободных процессов в одиночном колебательном контуре не зависит от способа подключения контура к источнику энергии, т. е. от того, является данный одиночный контур «последовательным» или «параллельным».

Характеристическое уравнение последовательной  $RLC$ -цепи

$$Lp^2 + Rp + 1/C = 0 \quad (6.27)$$

имеет два корня

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (6.28)$$

где  $\delta = R/(2L)$  — коэффициент затухания;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — резонансная частота цепи. В зависимости от соотношения между величинами  $\omega_0$  и  $\delta$ , или, что то же самое, в зависимости от добротности цепи,

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta},$$

корни характеристического уравнения (6.27) могут быть вещественными различными, комплексно-сопряженными или вещественными одинаковыми (кратными). Рассмотрим каждый из этих случаев.

Вещественные различные корни. При малой добротности последовательной  $RLC$ -цепи ( $Q < 1/2$ , т.е.  $R > 2\rho$  и  $\delta > \omega_0$ ) характеристическое уравнение (6.27) имеет два различных вещественных отрицательных корня, а выражение для тока цепи после коммутации ( $t \geq 0$ ) содержит два экспоненциальных члена:

$$i = i_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (6.29)$$

Дифференцируя правую и левую части выражения (6.29)  $di/dt = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$  и используя зависимые начальные условия (6.25), составляем уравнения для определения постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ :  $A_1 + A_2 = 0$ ;  $p_1 A_1 + p_2 A_2 = E/L$ , откуда

$$A_1 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}; \quad (6.30)$$

$$A_2 = \frac{-E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{-E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}.$$

С учетом (6.30) выражение для тока цепи после коммутации принимает вид

$$i = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Расположение корней  $p_1, p_2$  характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного  $p$  и зависимость нормированного тока рассматриваемой цепи от времени

$$\bar{i} = \frac{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{E} i = e^{p_1 t} - e^{p_2 t} = \bar{i}^{(1)} + \bar{i}^{(2)}$$

приведены на рис. 6.6, а. Переходный процесс в цепи носит апериодический (неколебательный) характер, причем вследствие того, что  $|p_1| < |p_2|$ , вторая составляющая нормированного тока цепи  $\bar{i}^{(2)}$  затухает быстрее, чем первая  $\bar{i}^{(1)}$ .



Комплексно-сопряженные корни ... добротности последовательной RLC-цепи ( $Q > 1/2$ , т. е.  $R < 2\rho$  и  $\delta < \omega_0$ ) характеристическое уравнение (6.27) имеет два комплексно-сопряженных корня

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св},$$

где  $\omega_{св} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  — частота свободных колебаний в цепи (смысл этого понятия будет ясен из последующего изложения). Ток цепи после коммутации, как и в предыдущем случае, определяется выражением

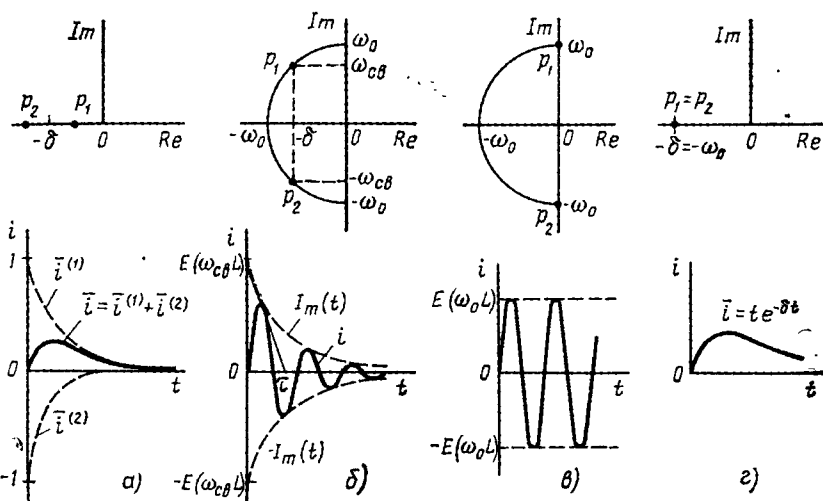


Рис. 6.6. Расположение корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного и зависимость свободной составляющей тока последовательной RLC-цепи от времени для:

а —  $\delta > \omega_0$ ; б —  $\delta < \omega_0$ ; в —  $\delta = 0$ ; г —  $\delta = \omega_0$ .

(6.29), которое после нахождения постоянных интегрирования  $A_1 = E/(j2\omega_{св}L)$ ,  $A_2 = -E/(j2\omega_{св}L)$  может быть с учетом соотношения

$$\frac{e^{j\omega_{св}t} - e^{-j\omega_{св}t}}{2j} = \sin \omega_{св} t$$

преобразовано к виду

$$i = \frac{E}{\omega_{св} L} e^{-\delta t} \sin \omega_{св} t = I_m(t) \cos(\omega_{св} t - \pi/2),$$

где  $I_m(t) = Ee^{-\delta t}/(\omega_{св}L)$ .

Таким образом, при включении в последовательную RLC-цепь с высокой добротностью идеального источника постоянного напряжения переходные процессы в ней имеют колебательный характер. Ток цепи представляет собой затухающую гармоническую функцию, амплитуда которой экспоненциально уменьшается во времени. Колебательный характер переходного процесса в цепи связан с перио-

дическим обменом энергией между емкостью и индуктивностью, а затухание колебаний объясняется потерями энергии в сопротивлении.

Расположение корней  $p_1, p_2$  характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного  $p$  и зависимость тока цепи от времени показаны на рис. 6.6, б. Корни характеристического уравнения расположены симметрично относительно действительной оси в левой полуплоскости на полуокружности с радиусом, численно равным резонансной частоте последовательного колебательного контура  $\omega_0$ . Чем меньше коэффициент затухания  $\delta$ , тем ближе к мнимой оси расположены корни уравнения, меньше различие между  $\omega_{св}$  и  $\omega_0$  и медленнее затухание свободных процессов. В пределе, при  $\delta = 0$ , корни характеристического уравнения располагаются на мнимой оси, частота свободных колебаний совпадает с резонансной частотой цепи, а колебательные процессы в цепи носят незатухающий характер (рис. 6.6, в). Таким образом, резонансная частота  $RLC$ -цепи численно равна частоте свободных колебаний в цепи, когда коэффициент затухания  $\delta$  равен нулю.

Пунктирными линиями на рис. 6.6, б показаны кривые  $\pm I_m(t)$ , которые характеризуют закон изменения амплитуды тока во времени. Эти кривые называются огибающими. Величина, численно равная длине подкасательной к огибающей тока,  $\tau = 1/\delta = 2L/R$  называется постоянной времени последовательной  $RLC$ -цепи. Очевидно, что за промежуток времени  $t = \tau$  ордината огибающей тока уменьшается в  $e$  раз. Скорость затухания свободных процессов в рассматриваемой цепи может быть охарактеризована также логарифмическим декрементом колебаний  $\theta$ , который равен натуральному логарифму отношения двух максимальных значений тока, взятых через период свободных колебаний  $T_{св} = 2\pi/\omega_{св} = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .

Находя натуральный логарифм отношения ординат огибающих тока для  $t_1 \geq 0$  и  $t_1 + T_{св}$ , можно прийти к выводу, что логарифмический декремент колебаний не зависит от выбора  $t_1$ , а определяется только добротностью цепи  $Q$ :

$$\theta = \ln \frac{I_m(t_1)}{I_m(t_1 + T_{св})} = \delta T_{св} \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - 0,25}}. \quad (6.31)$$

Анализ выражения (6.31) показывает, что логарифмический декремент колебаний равен нулю при  $\delta = 0$  ( $Q = \infty$ ) и обращается в бесконечность при  $\delta = \omega_0$  ( $Q = 1/2$ ).

Кратные корни. При  $Q = 1/2$ , т. е. при  $R = 2\rho$  и  $\delta = \omega_0$ , характеристическое уравнение последовательной  $RLC$ -цепи имеет два одинаковых вещественных корня  $p_1 = p_2 = -\delta$ , расположенных на отрицательной вещественной полуоси в плоскости комплексного переменного  $p$  (рис. 6.6, з). Как следует из выражения (6.8), общее решение дифференциального уравнения (6.24) при  $t \geq 0$  в этом случае имеет вид

$$i = i_{св} = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t}. \quad (6.32)$$

Определяя с помощью зависимых начальных условий (6.25) и (6.26) значения постоянных интегрирования  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = E/L$  и подставляя их в выражение (6.32), получаем окончательно

$$i = Ete^{-\delta t}/L.$$

Как и для вещественных различных корней, переходный процесс в цепи при одинаковых вещественных корнях имеет а п е р и о д и ч е с к и й характер (рис. 6.6, з), поэтому условие  $Q = 1/2$  является предельным условием существования в цепи апериодических свободных процессов. Режим работы цепи на границе между колебательным и апериодическим характерами переходных процессов называется к р и т и ч е с к и м.

Итак, характер переходных процессов в последовательной  $RLC$ -цепи полностью определяется расположением корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного.

Зависимость характера переходных процессов от расположения корней характеристического уравнения в плоскости комплексного переменного присуща не только последовательной  $RLC$ -цепи, она является общим свойством линейных электрических цепей любого порядка сложности.

### Подключение к последовательной $RLC$ -цепи источника гармонического напряжения

Рассмотрим важный для практики случай включения источника гармонического напряжения в последовательную  $RLC$ -цепь с высокой добротностью ( $Q \gg 1/2$ ). Свободные процессы в такой цепи, как было установлено ранее, имеют колебательный характер. Пусть идеализированный источник напряжения включен в цепь в момент времени  $t = 0$ , причем примем, что мгновенное значение э.д.с. этого источника при  $t = 0$  равно нулю ( $\psi = -\pi/2$ ). Уравнение электрического равновесия такой цепи после коммутации, составленное по методу токов ветвей, имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t idt = E_m \sin \omega t, \quad (6.33)$$

а дифференциальное уравнение цепи

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \omega E_m \cos \omega t. \quad (6.34)$$

Для решения уравнения (6.34) необходимо определить начальные значения тока цепи  $i(0_+)$  и его первой производной по времени  $\frac{di}{dt} \Big|_{t=0_+}$ . Используя независимые начальные условия

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0; \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

и уравнение электрического равновесия (6.33), получаем

$$i(0_+) = i_L(0_+) = 0; \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = 0. \quad (6.35)$$

Далее, суммируя составляющие тока

$$i_{\text{пр}} = I_{m \text{ пр}} \cos(\omega t + \psi - \varphi) = I_{m \text{ пр}} \sin(\omega t - \varphi); \quad (6.36)$$

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{-(\delta - j\omega_{\text{св}})t} + A_2 e^{-(\delta + j\omega_{\text{св}})t}, \quad (6.37)$$

находим общее решение уравнения (6.34) при  $t \geq 0$ :

$$i = I_{m \text{ пр}} \sin(\omega t - \varphi) + [A_1 e^{j\omega_{\text{св}}t} + A_2 e^{-j\omega_{\text{св}}t}] e^{-\delta t}. \quad (6.38)$$

Здесь  $I_{m \text{ пр}} = E_m / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$  — амплитуда принужденной составляющей тока;  $\varphi = \text{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$  — аргумент комплексного входного сопротивления рассматриваемой цепи.

Для определения постоянных интегрирования  $A_1, A_2$  продифференцируем правую и левую части (6.38)

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = \omega I_{m \text{ пр}} \cos(\omega t - \varphi) - A_1 (\delta_1 - j\omega_{\text{св}}) e^{-(\delta - j\omega_{\text{св}})t} - \\ - A_2 (\delta + j\omega_{\text{св}}) e^{-(\delta + j\omega_{\text{св}})t} \end{aligned} \quad (6.39)$$

и подставим в выражения (6.38) и (6.39) зависимые начальные условия (6.35). Решая полученную таким образом систему уравнений относительно  $A_1$  и  $A_2$ , находим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(\delta + j\omega_{\text{св}}) \sin \varphi - \omega \cos \varphi}{2j\omega_{\text{св}}} I_{m \text{ пр}}; \\ A_2 &= \frac{\omega \cos \varphi - (\delta - j\omega_{\text{св}}) \sin \varphi}{2j\omega_{\text{св}}} I_{m \text{ пр}}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

С учетом соотношений (6.40) выражение (6.37) для свободной составляющей тока может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} i_{\text{св}} = \left\{ \frac{e^{j\omega_{\text{св}}t} + e^{-j\omega_{\text{св}}t}}{2} \sin \varphi + \left[ \frac{\delta \sin \varphi}{\omega_{\text{св}}} - \frac{\omega \cos \varphi}{\omega_{\text{св}}} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{j\omega_{\text{св}}t} - e^{-j\omega_{\text{св}}t}}{2} \right\} I_{m \text{ пр}} e^{-\delta t} = \left\{ \sin \varphi \cos \omega_{\text{св}} t + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\delta \sin \varphi}{\omega_{\text{св}}} - \frac{\omega \cos \varphi}{\omega_{\text{св}}} \right] \sin \omega_{\text{св}} t \right\} I_{m \text{ пр}} e^{-\delta t}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Предположим, что частота  $\omega$  внешнего воздействия близка к частоте  $\omega_{\text{св}}$  свободных колебаний, а добротность  $Q$  настолько велика, что  $\omega_{\text{св}}$  практически совпадает с резонансной частотой цепи  $\omega_0$ . С учетом этих допущений, которые незначительно уменьшают общность получаемых результатов, выражение (6.41) существенно упрощается:

$$\begin{aligned} i_{\text{св}} &= (\sin \varphi \cos \omega_0 t - \cos \varphi \sin \omega_0 t) I_{m \text{ пр}} e^{-\delta t} = \\ &= -I_{m \text{ пр}} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t - \varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, в последовательной  $RLC$ -цепи, удовлетворяющей принятым допущениям, свободная составляющая тока является затухающей гармонической функцией времени. В начальный момент времени амплитуда свободной составляющей тока равна амплитуде принужденной составляющей, а затем уменьшается по экспоненциальному закону. Через промежуток времени, равный  $(4 \div 5) \tau$  после коммутации, амплитуда свободной составляющей становится пренебрежительно малой по сравнению с амплитудой принужденной составляющей, и переходный процесс в цепи можно считать практически закончившимся.

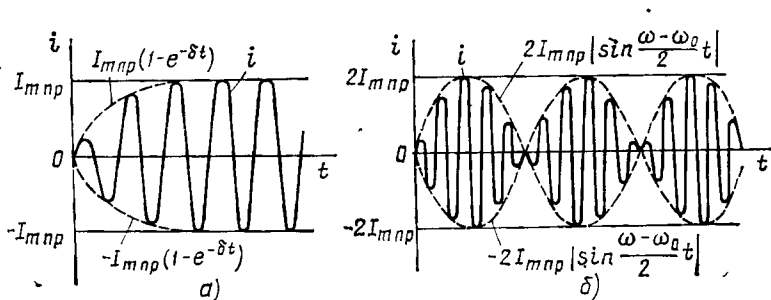


Рис. 6.7. Зависимость тока последовательной  $RLC$ -цепи от времени при включении источника гармонического напряжения:  
 $a - \omega = \omega_0, \delta \neq 0$ ;  $b - \omega \neq \omega_0, \delta = 0$

Ток цепи после коммутации равен сумме свободной и принужденной составляющих:

$$i = I_{mnp} \sin(\omega t - \varphi) - I_{mnp} e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t - \varphi). \quad (6.42)$$

Если частота внешнего воздействия  $\omega$  в точности совпадает с резонансной частотой цепи  $\omega_0$ , то входное сопротивление цепи имеет чисто резистивный характер ( $\varphi = 0$ ) и выражение (6.42) принимает вид (рис. 6.7,  $a$ )

$$i = I_{mnp} (1 - e^{-\delta t}) \sin \omega_0 t. \quad (6.43)$$

Как видно из рисунка, амплитуда тока цепи при  $\omega = \omega_0$  плавно увеличивается во времени, стремясь в пределе к установившемуся значению  $I_{mnp}$ . Ни при каких значениях  $t$  амплитуда тока после коммутации не превышает этого значения.

При включении в последовательную  $RLC$ -цепь источника гармонического напряжения, частота которого близка к резонансной, но не равна ей, в цепи наблюдаются б и е н и я, заключающиеся в периодическом увеличении амплитуды тока или напряжения до значения, значительно превышающего амплитуду принужденной составляющей (рис. 6.7,  $b$ ). Если пренебречь затуханием свободной составляющей тока ( $\delta = 0$ ), то из выражения (6.42) получаем

$$\begin{aligned} i &= 2I_{mnp} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t - \varphi\right) = \\ &= I_m(t) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t - \varphi\right). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Как видно из этого выражения, ток цепи имеет частоту, близкую к резонансной, а амплитуда тока  $I_m(t)$  медленно изменяется во времени:

$$I_m(t) = 2I_{m\text{пр}} \left| \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t \right|, \quad (6.45)$$

причем максимальное значение тока в переходном режиме в два раза превышает амплитуду принужденной составляющей.

Возникновение биений при включении источника гармонического напряжения в последовательную  $RLC$ -цепь объясняется тем, что вследствие несовпадения частот внешнего воздействия и свободных колебаний фазовые соотношения между свободной и принужденной составляющими тока непрерывно изменяются, а разность мгновенных фаз этих колебаний  $(\omega - \omega_0)t$  линейно нарастает во времени. В те моменты времени, когда разность мгновенных фаз будет равна  $2k\pi$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , сумма мгновенных значений  $i_{св}$  и  $i_{пр}$  будет максимальна, а в те моменты времени, когда разность фаз будет равна  $(2k + 1)\pi$ , — минимальна. Частотой биений называют частоту повторения максимумов огибающей тока (6.45). Угловая частота биений, таким образом, равна абсолютному значению разности угловых частот свободной и принужденной составляющей

$$\omega_б = |\omega - \omega_0|.$$

В реальных колебательных контурах коэффициент затухания  $\delta$  имеет малое, но конечное значение. Свободная составляющая тока в таких контурах экспоненциально уменьшается во времени, а биения носят затухающий характер.

### § 6.3. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### Преобразование Лапласа и его применение к решению дифференциальных уравнений

Классический метод анализа переходных процессов применяют в основном тогда, когда исследуемая цепь имеет невысокий порядок сложности, а внешнее воздействие на нее после коммутации является гармонической функцией времени либо постоянно. Если внешнее воздействие на цепь после коммутации имеет более сложный характер, то определение принужденной составляющей реакции цепи существенно затруднено, а при повышении порядка цепи усложняется определение постоянных интегрирования. Значительно большие возможности представляет операторный метод анализа переходных процессов, основанный на применении преобразования Лапласа. Подобно ранее рассмотренному методу комплексных амплитуд, операторный метод относится к символическим методам, в которых операции над функциями времени заменяются операциями над их символами (изображениями). Взаимное соответствие между функцией времени  $a(t)$  и ее

изображением  $A(p)$  в операторном методе устанавливается с помощью прямого

$$A(p) = L[a(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} a(t) dt \quad (6.46)$$

или обратного

$$a(t) = L^{-1}[A(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{pt} A(p) dp \quad (6.47)$$

преобразований Лапласа и указывается знаком соответствия

$$a(t) \doteq A(p).$$

Функция  $A(p)$  называется операторным изображением функции  $a(t)$  или изображением функции  $a(t)$  по Лапласу. Исходная функция времени  $a(t)$  по отношению к своему операторному изображению является оригиналом. Комплексное число  $p$  будем называть оператором преобразования Лапласа или комплексной частотой (смысл последнего понятия будет пояснен в следующем параграфе).

Из курса высшей математики известно, что для функций  $a(t)$ , равных нулю при  $t < 0$ , интегрируемых при  $t > 0$  и удовлетворяющих неравенству

$$|a(t)| \leq K e^{\sigma_0 t},$$

где  $K$  и  $\sigma_0$  — некоторые постоянные числа, интеграл (6.46) абсолютно сходится при  $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$ . Изображение  $A(p)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$  является аналитической функцией  $p$ , которая стремится к нулю при  $\operatorname{Re}(p) \rightarrow \infty$ . На практике к интегрированию по формулам (6.46), (6.47) приходится прибегать сравнительно редко, так как для большинства часто употребляемых функций разработаны таблицы прямого и обратного преобразований Лапласа [6, 7]. Операторные изображения некоторых функций приведены в приложении 1. Следует иметь в виду, что в ряде справочников, в частности в [6], приведены таблицы преобразования Карсона—Хевисайда

$$A_K(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} a(t) dt = pA(\dot{p}),$$

которое отличается от преобразования Лапласа только наличием множителя  $p$ .

Напомним некоторые свойства преобразования Лапласа.

Изображение по Лапласу постоянной величины  $K$  равно этой величине, деленной на  $p$ :

$$K \doteq K/p. \quad (6.48)$$

Умножение функции времени  $a(t)$  на постоянное число  $K$  соответствует умножению на это же число ее изображения:

$$Ka(t) \doteq KA(p). \quad (6.49)$$

Изображение суммы функций времени равно сумме изображений этих функций:

$$\sum_{i=1}^N a_i(t) \doteq \sum_{i=1}^N A_i(p), \quad (6.50)$$

где  $a_i(t) \doteq A_i(p)$ .

Если начальное значение функции  $a(t)$  равно нулю  $a(0_+) = 0$ , то дифференцированию функции  $a(t)$  соответствует умножение изображения этой функции на  $p$  (теорема дифференцирования)

$$\frac{da(t)}{dt} \stackrel{\cdot}{=} pA(p); \quad (6.51)$$

при  $a(0_+) \neq 0$

$$\frac{da(t)}{dt} \stackrel{\cdot}{=} pA(p) - a(0_+). \quad (6.52)$$

Повторным применением теоремы дифференцирования, можно получить выражения для производных высших порядков:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} &\stackrel{\cdot}{=} p[pA(p) - a(0_+)] - \left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t=0_+} = \\ &= p^2 A(p) - pa(0_+) - \left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t=0_+}; \\ \frac{d^n a(t)}{dt^n} &\stackrel{\cdot}{=} p^n A(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \left. \frac{d^{k-1} a(t)}{dt^{k-1}} \right|_{t=0_+}. \end{aligned}$$

Интегрированию функции времени в пределах от 0 до  $t$  соответствует деление изображения этой функции на  $p$  (теорема интегрирования):

$$\int_0^t a(t) dt \stackrel{\cdot}{=} A(p)/p; \quad (6.53)$$

смещению функции времени на  $t_0$  соответствует умножение изображения на  $e^{-pt_0}$  (теорема запаздывания):

$$a(t-t_0) \stackrel{\cdot}{=} e^{-pt_0} A(p), \quad (6.54)$$

а смещению изображения  $A(p)$  в комплексной плоскости на комплексное число  $\lambda$  соответствует умножение оригинала на  $e^{-\lambda t}$  (теорема смещения):

$$e^{-\lambda t} a(t) \stackrel{\cdot}{=} A(p+\lambda).$$

Значения функции времени при  $t=0$  и  $t=\infty$  могут быть найдены с помощью предельных соотношений

$$\begin{aligned} a(t=0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} pA(p); \\ a(t=\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} pA(p) \end{aligned}$$

предполагается, что соответствующие пределы существуют).

Если изображение  $A(p)$  может быть представлено в виде отношения двух полиномов от  $p$ , не имеющих общих корней:

$$A(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}; \quad (6.55)$$

причем степень полинома  $M(p)$  выше, чем степень полинома  $N(p)$ , а уравнение

$$M(p) = 0 \quad (6.56)$$



не имеет кратных корней, то для перехода от изображения к оригиналу можно воспользоваться теоремой разложения

$$\frac{N(p)}{M(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{N(p_k)}{\left. \frac{dM}{dp} \right|_{p=p_k}} e^{p_k t}, \quad (6.57)$$

где  $p_k$  — корни уравнения (6.56).

Теорема разложения может быть сформулирована также для случая, когда уравнение (6.56) имеет кратные корни, и может быть распространена на случай, когда  $A(p)$  является произвольной мероморфной функцией  $p$ , т. е. функцией, не имеющей иных особых точек, кроме полюсов [7].

Как известно, преобразование Лапласа лежит в основе операторного метода решения линейных дифференциальных уравнений, разработанного в середине прошлого века русским математиком М. Е. Ващенко-Захарченко. Независимо, но значительно позднее известный английский ученый О. Хевисайд применил операторный метод к анализу переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными и распределенными параметрами. Значительный вклад в развитие и обоснование операторного метода внесли советские ученые К. А. Круг, В. С. Игнатовский, А. М. Эфрос, А. М. Данилевский, А. И. Лурье, М. И. Конторович и зарубежные ученые Д. Р. Карсон, Я. Микусинский, Б. ван дер Поль, П. Леви.

При использовании операторного метода решения дифференциальных уравнений неизвестные токи и напряжения ветвей электрической цепи, а также заданные токи и напряжения независимых источников заменяют их операторными изображениями. При этом система интегродифференциальных уравнений электрического равновесия, составленная относительно мгновенных значений токов и напряжений ветвей, преобразуется в систему алгебраических уравнений, составленных относительно операторных изображений соответствующих токов и напряжений. Решая эту систему уравнений, можно найти изображения искомых токов и напряжений ветвей электрической цепи после коммутации. Далее, применяя обратное преобразование Лапласа, можно перейти от изображений искомых токов и напряжений к оригиналам.

### **Уравнения электрического равновесия цепи в операторной форме. Операторные схемы замещения идеализированных двухполюсных элементов**

Итак, используя преобразование Лапласа, каждому уравнению, входящему в систему уравнений электрического равновесия цепи, можно поставить в соответствие уравнение, составленное относительно операторных изображений токов и напряжений. Уравнениям баланса мгновенных значений токов и напряжений соответствуют уравнения баланса операторных изображений токов и напряжений, а компонентным уравнениям, описывающим соотношения между мгновенными значениями токов и напряжений отдельных ветвей, соответствуют уравнения, связывающие операторные изображения токов и напряжений тех

же ветвей. Вследствие того что изображение суммы функций времени равно сумме изображений этих функций (6.50), для перехода от уравнений баланса мгновенных значений токов и напряжений ветвей к уравнениям баланса операторных изображений токов и напряжений достаточно в уравнениях (1.37), (1.40) заменить мгновенные значения токов и напряжений их операторными изображениями

$$\sum_k I_k(p) = 0; \quad (6.58)$$

$$\sum_k U_k(p) = 0. \quad (6.59)$$

Если уравнения баланса напряжений формировались относительно мгновенных значений напряжений отдельных элементов (1.42), то в операторной форме эти уравнения принимают вид

$$\sum_i U_i(p) = \sum_j E_j(p). \quad (6.60)$$

Уравнения (6.58) и (6.59) или (6.60) будем называть уравнениями баланса токов и напряжений в операторной форме, а операторные изображения токов и напряжений — операторными токами и напряжениями.

По аналогии с ранее рассмотренными понятиями комплексного входного сопротивления  $Z = Z(j\omega)$  и комплексной входной проводимости  $Y = Y(j\omega)$  введем понятия операторного входного сопротивления  $Z(p)$  и операторной входной проводимости  $Y(p)$ .

Операторным входным сопротивлением пассивного линейного двухполюсника называется отношение операторного напряжения на входе двухполюсника к операторному току при нулевых начальных условиях

$$Z(p) = U(p)/I(p), \quad (6.61)$$

где  $I(p) \doteq i(t)$  и  $U(p) \doteq u(t)$  — операторные изображения тока и напряжения на входе некоторого пассивного двухполюсника при  $t \geq 0$  и нулевых начальных условиях.

Величина, обратная  $Z(p)$ , называется операторной входной проводимостью

$$Y(p) = 1/Z(p) = I(p)/U(p). \quad (6.62)$$

Операторное входное сопротивление и операторная входная проводимость пассивного линейного двухполюсника, подобно его комплексному входному сопротивлению и комплексной входной проводимости, не зависят от интенсивности внешнего воздействия и определяются только параметрами входящих в двухполюсник идеализированных пассивных элементов и схемой их соединения.

Как следует из выражений (6.61), (6.62), каждому пассивному линейному двухполюснику при нулевых начальных условиях может быть поставлена в соответствие операторная схема замещения, на которой рассматриваемый двухполюсник представляется сво-

им операторным входным сопротивлением или операторной входной проводимостью, а токи и напряжения на его зажимах — их операторными изображениями. Если в рамках решаемой задачи двухполюсник не находится при нулевых начальных условиях, то его операторная эквивалентная схема должна содержать независимый источник тока или напряжения, характеризующий начальные запасы энергии в цепи.

Рассмотрим операторные компонентные уравнения и операторные схемы замещения идеализированных пассивных двухполюсников.

**С о п р о т и в л е н и е.** Соотношения между мгновенными значениями тока и напряжения на зажимах сопротивления устанавливаются выражениями (1.9), (1.10):  $u_R = RI_R$ ;  $i_R = Gu_R$ .

Учитывая, что умножению функции времени на постоянное число соответствует умножение изображения функции на это же число (6.49), для получения компонентных уравнений сопротивления в операторной форме достаточно в выражениях (1.9), (1.10) заменить мгновенные значения токов и напряжений их операторными изображениями

$$U_R(p) = RI_R(p); \quad (6.63)$$

$$I_R(p) = GU_R(p). \quad (6.64)$$

Подставляя соотношения (6.63), (6.64) в (6.61), (6.62), находим выражения для операторного входного сопротивления и операторной входной проводимости

$$Z_R(p) = R; \quad Y_R(p) = G = 1/R. \quad (6.65)$$

Операторная эквивалентная схема сопротивления приведена на рис. 6.8.

**Е м к о с т ь.** Напряжение и ток емкости связаны соотношениями (1.13), (1.16):

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt.$$

Используя теоремы дифференцирования (6.52) и интегрирования (6.53), получаем

$$I_C(p) = pCU_C(p) - Cu_C(0); \quad (6.66)$$

$$U_C(p) = \frac{u_C(0)}{p} + \frac{1}{pC} I_C(p). \quad (6.67)$$

Операторные компонентные уравнения емкости (6.66) и (6.67) являются равносильными и могут быть получены одно из другого. При нулевых начальных условиях ( $u_C(0) = 0$ ) они принимают вид

$$I_C(p) = pCU_C(p); \quad U_C(p) = I_C(p)/(pC).$$

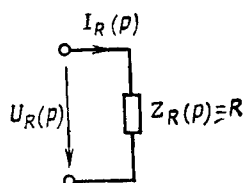


Рис. 6.8. Операторная схема замещения сопротивления

Таким образом, операторное входное сопротивление  $Z_C(p)$  и операторная входная проводимость емкости  $Y_C(p)$  определяются выражениями

$$Z_C(p) = 1/(pC); \quad Y_C(p) = pC. \quad (6.68)$$

Операторным компонентным уравнениям (6.66) и (6.67) соответствуют параллельная и последовательная схемы замещения емкости (рис. 6.9, а, б), содержащие независимый источник тока  $Cu_C(0)$  или напряжения  $u_C(0)/p$ . При нулевых начальных условиях независимые источники тока или напряжения, характеризующие начальный запас энергии в емкости, выключаются, и в операторной эквивалентной схе-

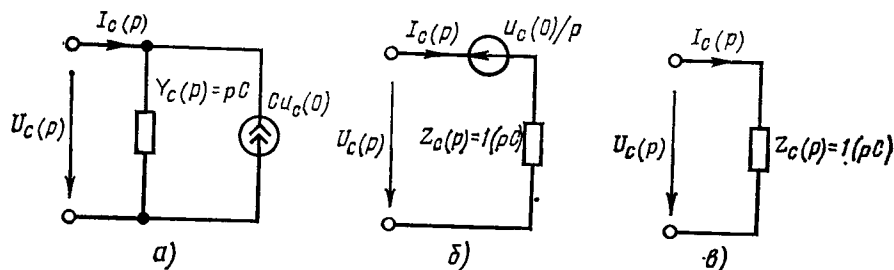


Рис. 6.9. Операторные схемы замещения емкости:

а — параллельная при ненулевых начальных условиях; б — последовательная при ненулевых начальных условиях; в — при нулевых начальных условиях

ме емкости остается только один элемент — операторное входное сопротивление или операторная входная проводимость емкости (рис. 6.9, в).

**И н д у к т и в н о с т ь.** Мгновенные значения тока и напряжения индуктивности связаны между собой соотношениями (1.22) и (1.23):

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt.$$

Применяя к этим выражениям теоремы дифференцирования (6.52) и интегрирования (6.53), получаем компонентные уравнения индуктивности в операторной форме:

$$U_L(p) = pLI_L(p) - Li_L(0); \quad (6.69)$$

$$I_L(p) = i_L(0)/p + U_L(p)/(pL). \quad (6.70)$$

Уравнения (6.69), (6.70) равносильные и могут быть получены одно из другого с помощью элементарных преобразований. Используя их, определяем комплексное входное сопротивление и комплексную входную проводимость индуктивности

$$Z_L(p) = pL; \quad Y_L(p) = 1/(pL) \quad (6.71)$$

и строим ее последовательную и параллельную схемы замещения (рис. 6.10, а, б). Как и операторные схемы замещения емкости, операторные схемы замещения индуктивности содержат независимый ис-

точник напряжения  $L i_L(0)$  или тока  $i_L(0)/p$ , характеризующий начальный запас энергии в индуктивности. Операторная эквивалентная схема индуктивности при нулевых начальных условиях приведена на рис. 6.10, в.

Анализируя полученные результаты, нетрудно установить, что выражения для операторных входных сопротивлений (проводимостей) идеализированных пассивных элементов имеют такую же структуру, как и выражения для комплексных входных сопротивлений (проводимостей) этих же элементов, и могут быть получены одно из другого путем замены  $j\omega$  на  $p$ .

Аналогичным образом может быть получено выражение для операторного входного сопротивления (проводимости) произвольного линейного двухполюсника, составленного из идеализированных пассивных

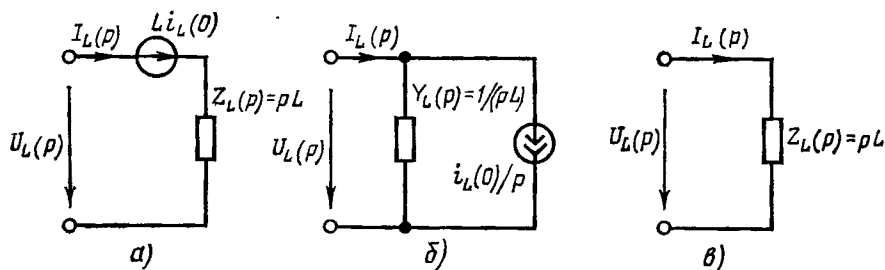


Рис. 6.10. Операторные схемы замещения индуктивности:

а — последовательная при ненулевых начальных условиях; б — параллельная при ненулевых начальных условиях; в — при нулевых начальных условиях

элементов. Поэтому для преобразования операторных схем замещения линейных пассивных двухполюсников при нулевых начальных условиях можно использовать все рассмотренные ранее (см. гл. 2) правила преобразования линейных пассивных цепей при гармоническом воздействии, а для преобразования операторных схем замещения тех же участков цепей при ненулевых начальных условиях — правила преобразования активных двухполюсников. В частности, последовательная и параллельная схемы замещения емкости или индуктивности могут быть преобразованы одна в другую с помощью рассмотренных ранее (см. гл. 2) приемов преобразования активных двухполюсников.

Используя операторные эквивалентные схемы идеализированных пассивных элементов, можно получить операторную эквивалентную схему произвольного участка линейной цепи или всей цепи в целом. С этой целью каждый идеализированный пассивный элемент, изображенный на эквивалентной схеме цепи для мгновенных значений, должен быть заменен операторной эквивалентной схемой, а токи и напряжения идеализированных источников тока или напряжения — представлены операторными изображениями соответствующих функций.

Операторная эквивалентная схема цепи имеет такую же структуру, как и эквивалентная схема цепи для мгновенных значений, но содержит дополнительные независимые источники энергии, определяющие запасы энергии цепи в момент времени, непосредственно предшествовавший коммутации.

Используя операторную схему замещения цепи, можно с помощью любого из известных методов сформировать систему уравнений ее электрического равновесия в операторной форме, которая будет равносильна основной системе уравнений электрического равновесия цепи после коммутации.

В связи с тем что операторная схема замещения цепи может быть построена непосредственно по эквивалентной схеме цепи для мгновенных значений, этап формирования дифференциальных уравнений цепи может быть исключен. Метод анализа переходных процессов в линейных цепях, основанный на формировании операторных уравнений электрического равновесия цепей по их операторным эквивалентным схемам, получил название операторного метода анализа переходных процессов. Этот метод представляет собой дальнейшее развитие операторного метода решения дифференциальных уравнений и позволяет анализировать процессы в цепи после коммутации, минуя этап формирования уравнений электрического равновесия цепи для мгновенных значений токов и напряжений.

### Общая схема применения метода

Наметим основные этапы анализа переходных процессов в линейных цепях с помощью операторного метода.

1. Анализ цепи до коммутации и определение независимых начальных условий. Выполняются так же, как и при использовании классического метода анализа переходных процессов.
2. Составление операторной эквивалентной схемы цепи после коммутации. Составление операторной эквивалентной схемы цепи производится непосредственно по эквивалентной схеме цепи для мгновенных значений путем замены каждого идеализированного пассивного элемента его операторной схемой замещения и представления токов и напряжений идеализированных источников тока или напряжения их операторными изображениями.
3. Составление уравнений электрического равновесия цепи в операторной форме. Система уравнений электрического равновесия цепи в операторной форме может быть сформирована любым из рассмотренных в гл. 4 методов непосредственно по операторной схеме замещения цепи.
4. Решение уравнений электрического равновесия цепи относительно изображений искомых токов и напряжений. Может производиться любым методом, в том числе путем использования рассмотренного ранее метода сигнальных графов.
5. Определение оригиналов искомых токов и напряжений. Как правило, производится путем применения таблиц обратного преобразования Лапласа [6] и использования основных свойств преобразования Лапласа. Если изображение инте-

ресующей функции представляет собой отношение двух полиномов  $p$ , для выполнения обратного преобразования Лапласа можно воспользоваться теоремой разложения.



**Пример 6.4.** Для цепи, схема которой приведена на рис. 6.11, а, найдем зависимость тока и напряжения индуктивности  $i_3$ ,  $u_3$  от времени при  $t \geq 0$ . Э.д.с. идеализированного источника постоянного напряжения  $e(t)$  при  $t = 0$  скачком изменяется от  $E_1$  до  $E_2$ :

$$e(t) = \begin{cases} E_1 & \text{при } t < 0; \\ E_2 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Анализируя процессы в цепи до коммутации, находим начальное значение тока индуктивности

$$i_3(0) = i_3(0_+) = i_3(0_-) = E_1/R_1.$$

Для построения операторной эквивалентной схемы цепи после коммутации (рис. 6.11, б) заменяем все идеализированные пассивные элементы их операторными схемами замещения, а э. д. с. идеализированного источника напряжения

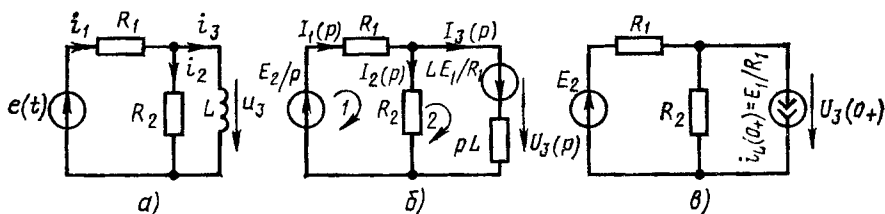


Рис. 6.11. К примеру 6.4

$E_2$  — операторной э.д.с.,  $E_2(p) = E_2/p$ . Используя метод контурных токов, составляем систему уравнений электрического равновесия цепи в операторной форме

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) I_{11}(p) - R_2 I_{22}(p) &= E_2/p; \\ -R_2 I_{11}(p) + (R_2 + pL) I_{22}(p) &= LE_1/R_1, \end{aligned}$$

где  $I_{11}(p) = I_1(p) \doteq i_1$ ;  $I_{22}(p) = I_3(p) \doteq i_3$ . Решая эту систему уравнений, находим операторные изображения искомого тока

$$I_3(p) = [R_1 R_2 E_2 + pL (R_1 + R_2) E_1] / \{pR_1 [pL (R_1 + R_2) + R_1 R_2]\}$$

и напряжения

$$U_3(p) = pL I_3(p) - E_1 L/R_1 = [LR_2 (E_2 - E_1)] / \{pL (R_1 + R_2) + R_1 R_2\}.$$

Преобразуем полученные выражения к такому виду, чтобы для выполнения обратного преобразования Лапласа можно было непосредственно воспользоваться таблицами, приведенными в приложении I:

$$\begin{aligned} I_3(p) &= \frac{1}{\{p + R_1 R_2 / [L (R_1 + R_2)]\}} \frac{E_1}{R_1} + \\ &+ \frac{1}{p \{p + R_1 R_2 / [L (R_1 + R_2)]\}} \frac{R_2 E_2}{L (R_1 + R_2)}; \end{aligned}$$

$$U_3(p) = \frac{1}{\{p + R_1 R_2 / [L(R_1 + R_2)]\}} \frac{R_2(E_2 - E_1)}{R_1 + R_2}.$$

Учитывая, что  $1/(p + \alpha) \doteq e^{-\alpha t}$  и  $1/[p(p + \alpha)] \doteq (1 - e^{-\alpha t})/\alpha$ , получаем выражения для искомого тока и напряжения индуктивности при  $t \geq 0$

$$i_3 = \frac{E_1}{R_1} e^{-t/\tau} + \frac{E_2}{R_1} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{E_2}{R_1} - \frac{E_2 - E_1}{R_1} e^{-t/\tau};$$

$$u_3 = \frac{R_2(E_2 - E_1)}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = (R_1 + R_2) L / (R_1 R_2)$  — постоянная времени рассматриваемой цепи.

Как видно из полученных соотношений, в начальный момент времени ток индуктивности сохраняет то же значение, что и до коммутации  $i_3(0) = E_1/R_1$ , а затем плавно изменяется, стремясь в пределе к  $E_2/R_1$ . Напряжение индуктивности в начальный момент времени скачком изменяется от нуля до  $u_3(0+) = R_2(E_2 - E_1)/(R_1 + R_2)$ , а затем плавно уменьшается до нуля.

Нетрудно заметить, что в начальный момент времени ( $t = 0+$ ) ток и напряжение индуктивности принимают такие значения, которые они имели бы в случае, если индуктивность была заменена идеализированным источником тока (рис. 6.11, в), ток которого равен  $i_3(0) = E_1/R_1$ . Таким образом, в начальный момент после коммутации индуктивность ведет себя подобно идеализированному источнику тока (при нулевых начальных условиях ток этого источника равен нулю, и, следовательно, ветвь, содержащую индуктивность, в начальный момент времени можно считать разомкнутой).

## § 6.4. ОПЕРАТОРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

13.06.96г

2-13 м(25-30 час)

### Реакция цепи на экспоненциальное воздействие

Выясним, какой физический смысл имеет оператор  $p$ , входящий в выражения для операторных сопротивлений и проводимостей. С этой целью найдем реакцию цепи на экспоненциальное внешнее воздействие

$$a(t) = \underline{A} e^{st}, \quad (6.72)$$

где  $\underline{A}$  и  $s$  — некоторые комплексные числа.

Коэффициент  $\underline{A} = A e^{j\psi_A}$  имеет размерность внешнего воздействия и называется обобщенной комплексной амплитудой, величина  $s = \sigma + j\omega$  — имеет размерность  $s^{-1}$  и называется обобщенной (комплексной) частотой.

Заметим, что многие встречающиеся на практике внешние воздействия можно рассматривать как частный случай экспоненциального воздействия или как сумму некоторого их количества. Действительно, при  $\text{Im } \underline{A} = \text{Im } s = 0$  выражение (6.72) описывает экспоненциально затухающее ( $\sigma < 0$ ), экспоненциально нарастающее ( $\sigma > 0$ ) или неизменное ( $\sigma = 0$ ) внешнее воздействие. Сумма экспоненциальных воздействий с комплексно-сопряженными амплитудами и комплексно-сопряженными частотами представляет собой гармоническое колебание

$$a(t) = \underline{A} e^{st} + \overline{\underline{A}} e^{\overline{s}t} = A e^{\sigma t} [e^{j(\omega t + \psi_A)} + e^{-j(\omega t + \psi_A)}] = 2A e^{\sigma t} \cos(\omega t + \psi_A), \quad (6.73)$$



амплитуда которого нарастает ( $\sigma > 0$ ), затухает ( $\sigma < 0$ ) или неизменна во времени ( $\sigma = 0$ ). Как видно из выражения (6.73), мнимую часть комплексной частоты  $s = \sigma + j\omega$  можно рассматривать как угловую частоту некоторого гармонического колебания, а вещественную часть — как коэффициент, определяющий характер изменения огибающей этого колебания. Вследствие того что интегрирование и дифференцирование экспоненциальной функции не изменяют ее вида, реакция линейной цепи на экспоненциальное внешнее воздействие определенной комплексной частоты  $\underline{s}$  является экспоненциальной функцией той же частоты, причем отношение реакции цепи к внешнему воздействию в этом случае не зависит от времени.

Пусть напряжение, приложенное к зажимам идеализированного пассивного элемента изменяется во времени по закону

$$u = \underline{U}e^{st} . \quad (6.74)$$

В этом случае ток сопротивления

$$i_R = R^{-1} u_R = \underline{U}e^{st} / R, \quad (6.75)$$

ток емкости

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \underline{s} C \underline{U} e^{st} , \quad (6.76)$$

и ток индуктивности

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{1}{sL} \underline{U} e^{st} . \quad (6.77)$$

Входным сопротивлением  $Z(s)$  пассивного линейного двухполюсника при экспоненциальном внешнем воздействии называется отношение мгновенного значения напряжения на зажимах этого двухполюсника к мгновенному значению тока:

$$Z(s) = u/i. \quad (6.78)$$

Используя выражения (6.74) — (6.78), найдем входные сопротивления идеализированных пассивных элементов при экспоненциальном внешнем воздействии

$$Z_R(s) = R; \quad Z_C(s) = 1/(\underline{s}C); \quad Z_L(s) = \underline{s}L. \quad (6.79)$$

Полагая в выражениях (6.79)  $\underline{s} = p$ , получаем рассмотренные ранее выражения для операторных входных сопротивлений идеализированных пассивных элементов, а полагая  $\underline{s} = j\omega$  — выражения для комплексных входных сопротивлений тех же элементов при гармоническом внешнем воздействии. Таким образом, комплексные сопротивления идеализированных пассивных элементов при гармоническом внешнем воздействии численно равны входным сопротивлениям тех же элементов при экспоненциальном внешнем воздействии  $a(t) = \underline{A}e^{j\omega t}$ , а операторные входные сопротивления рассматриваемых элементов —

входному сопротивлению этих элементов при экспоненциальном внешнем воздействии

$$a(t) = \underline{A}e^{pt}. \quad (6.80)$$

Следовательно, оператор преобразования Лапласа  $p$ , входящий в выражения для операторных входных сопротивлений и проводимостей идеализированных пассивных элементов, можно рассматривать как обобщенную (комплексную) частоту экспоненциального воздействия вида (6.80).

Переходя от идеализированных пассивных элементов к участкам цепей, составленным из таких элементов, и, далее, к произвольным линейным цепям, убеждаемся, что *отношение двух любых токов или напряжений этих цепей при экспоненциальном внешнем воздействии вида (6.80) численно равно отношению операторных изображений соответствующих токов или напряжений при нулевых начальных условиях.*

### Понятие об операторных характеристиках

Рассмотрим идеализированную линейную цепь, не содержащую независимых источников тока и напряжения, у которой выделены пара входных  $v - v'$  и пара выходных  $k - k'$  зажимов.

Операторной, или обобщенной, частотной характеристикой  $H_{kv}(p)$  линейной цепи называется отношение операторного изображения реакции цепи  $y_k = y_k(t)$  к операторному изображению внешнего воздействия  $x_v = x_v(t)$  при нулевых начальных условиях:

$$H_{kv}(p) = Y_k(p)/X_v(p), \quad (6.81)$$

где  $Y_k(p) \doteq y_k(t)$ ;  $X_v(p) \doteq x_v(t)$ .

Учитывая, что отношение двух любых токов и напряжений линейной цепи, находящейся под экспоненциальным воздействием, численно равно отношению операторных изображений соответствующих величин при нулевых начальных условиях, устанавливаем, что *операторная характеристика линейной цепи численно равна отношению реакции цепи к внешнему воздействию при внешнем воздействии вида (6.80)*

$$H_{kv}(p) = \left. \frac{y_k}{x_v} \right|_{x_v = \underline{x}_v e^{pt}}$$

Для перехода от операторной характеристики цепи к ее комплексной частотной характеристике  $H_{kv}(j\omega)$  достаточно в выражении (6.81) заменить  $p$  на  $j\omega$ . Следовательно, *комплексную частотную характеристику можно рассматривать как частный случай обобщенной частотной характеристики при  $\text{Re}(p) = \sigma = 0$ .*

Подобно комплексной частотной характеристике, операторная характеристика линейной цепи не зависит от действующих в цепи токов и напряжений, а определяется только топологией цепи и параметрами входящих в нее элементов. В связи с тем что выражения для оператор-

ных сопротивлений и проводимостей идеализированных пассивных элементов (6.65), (6.68), (6.71) были получены безотносительно к виду внешнего воздействия, операторные характеристики описывают свойства линейных цепей при произвольных внешних воздействиях.

Как и комплексные частотные характеристики, операторные характеристики цепи делятся на входные и передаточные, причем каждой комплексной частотной характеристике соответствует операторная. В зависимости от того, какая величина выступает в качестве внешнего воздействия на цепь, а какая рассматривается в качестве отклика цепи, различают:

операторное входное сопротивление

$$Z_{vv}(p) = U_v(p)/I_v(p); \quad (6.82)$$

операторную входную проводимость

$$Y_{vv}(p) = I_v(p)/U_v(p); \quad (6.83)$$

операторные коэффициенты передачи по напряжению

$$K_{kv}(p) = U_k(p)/U_v(p) \quad (6.84)$$

и току

$$G_{kv}(p) = I_k(p)/I_v(p); \quad (6.85)$$

операторное передаточное сопротивление

$$Z_{kv}(p) = U_k(p)/I_v(p) \quad (6.86)$$

и операторную передаточную проводимость

$$Y_{kv}(p) = I_k(p)/U_v(p). \quad (6.87)$$

Операторные коэффициенты передачи по напряжению и току являются безразмерными величинами, операторные входное и передаточное сопротивления имеют размерность сопротивления, а операторные входная и передаточная проводимости — размерность проводимости.

### Определение операторных характеристик

Для определения операторной характеристики цепи с заданной комплексной частотной характеристикой достаточно в соответствующем аналитическом выражении заменить  $j\omega$  на  $p$ . В общем случае выражения для любых операторных характеристик сколь угодно сложной линейной цепи, не содержащей независимых источников энергии, могут быть получены из рассмотрения узловых или контурных уравнений цепи, составленных по ее операторной схеме замещения при нулевых начальных условиях.

Пусть необходимо найти операторные входное сопротивление и входную проводимость цепи со стороны зажимов  $v$  —  $v'$ . Подключим к этим зажимам идеализированный источник напряжения  $e_v(t)$  и построим операторную схему замещения цепи при нулевых начальных условиях. Выбирая систему независимых контуров таким образом, чтобы

ветвь, содержащая источник  $e_v(t) \doteq E_v(p)$ , явилась главной ветвью  $v$ -го контура, составим систему контурных уравнений цепи в операторной форме. Далее, используя формулы Крамера (4.14), найдем ток  $v$ -й ветви, совпадающий с током  $v$ -го контура:

$$I_v(p) = \frac{\Delta_{vv}(p)}{\Delta(p)} E_v(p). \quad (6.88)$$

Здесь  $\Delta(p)$  — определитель системы контурных уравнений, составленных в операторной форме;  $\Delta_{vv}(p)$  — алгебраическое дополнение элемента  $Z_{vv}(p)$ .

Используя выражение (6.88), находим операторное входное сопротивление  $Z_{vv}(p)$  и операторную входную проводимость цепи  $Y_{vv}(p)$  со стороны зажимов  $v - v'$ :

$$Z_{vv}(p) = E_v(p)/I_v(p) = \Delta(p)/\Delta_{vv}(p);$$

$$Y_{vv}(p) = 1/Z_{vv}(p) = \Delta_{vv}(p)/\Delta(p).$$

Аналогичным образом можно найти и передаточные функции цепи. С этой целью, используя (4.14), определяем ток

$$I_k(p) = \Delta_{vk}(p) E_v(p)/\Delta(p) \quad (6.89)$$

и напряжение

$$U_k(p) = Z_k(p) I_k(p) = \Delta_{vk}(p) Z_k(p) E_v(p)/\Delta(p) \quad (6.90)$$

ветви, содержащей сопротивление  $Z_k(p)$  и являющейся главной ветвью  $k$ -го контура. Далее, подставляя выражения (6.88), (6.89), (6.90) в (6.84) — (6.87), находим операторный коэффициент передачи цепи по напряжению

$$K_{kv}(p) = U_k(p)/E_v(p) = \Delta_{vk}(p) Z_k(p)/\Delta(p),$$

операторный коэффициент передачи по току

$$G_{kv}(p) = I_k(p)/I_v(p) = \Delta_{vk}(p)/\Delta_{vv}(p),$$

операторную передаточную проводимость

$$Y_{kv}(p) = I_k(p)/E_v(p) = \Delta_{vk}(p)/\Delta(p)$$

и операторное передаточное сопротивление

$$Z_{kv}(p) = U_k(p)/I_v(p) = \Delta_{vk}(p) Z_k(p)/\Delta_{vv}(p).$$

В связи с тем что определитель  $\Delta(p)$  и алгебраические дополнения  $\Delta_{vv}(p)$ ,  $\Delta_{vk}(p)$  представляют собой полиномы от собственных и взаимных операторных сопротивлений независимых контуров цепи, а сопротивления контуров являются рациональными функциями  $p$  с вещественными коэффициентами, любая операторная характеристика линейной электрической цепи  $H_{kv}(p)$ , не содержащей независимых источников энергии, также является рациональной функцией  $p$  с вещественными коэффициентами, т. е. может быть представлена в виде отношения двух полиномов

$$H_{kv}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (6.91)$$

Здесь  $a_i, b_i$  — вещественные коэффициенты, значения которых определяются параметрами идеализированных пассивных элементов и управляемых источников.

Напомним, что значения аргумента  $p_{0i}$ , при которых  $N(p) = 0, M(p) \neq 0$ , называются нулями, а значения аргумента  $p_{xi}$ , при которых  $M(p) = 0, N(p) \neq 0$ , — полюсами функции  $H_{kv}(p)$ . Решая уравнения  $N(p) = 0; M(p) = 0$  и разлагая полиномы  $N(p)$  и  $M(p)$  на множители, выражение (6.91) можно преобразовать к виду

$$H_{kv}(p) = K \frac{(p-p_{01})(p-p_{02}) \dots (p-p_{0n})}{(p-p_{x1})(p-p_{x2}) \dots (p-p_{xm})}. \quad (6.92)$$

Здесь  $K = a_n/b_m$  — вещественное число, называемое масштабым коэффициентом.

Из выражения (6.92) следует, что нули и полюсы функции  $H_{kv}(p)$  определяют значения этой функции с точностью до постоянного коэффициента  $K$ . Зная расположение нулей и полюсов операторной характеристики цепи в плоскости комплексной частоты  $p$ , можно получить полную информацию о свойствах этой цепи, в частности с точностью до постоянного множителя найти реакцию цепи на заданное воздействие. Графическое изображение расположения нулей и полюсов функции в плоскости комплексной частоты  $p = \sigma + j\omega$  называется диаграммой нулей и полюсов или полюсно-нулевой диаграммой функции. При построении полюсно-нулевых диаграмм мнимую и вещественную оси плоскости  $p$  обозначают соответственно  $j\omega$  и  $\sigma$ , нули изображают кружками, а полюсы — крестиками.



**Пример 6.5.** Для цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а, найдем операторное входное сопротивление  $Z_{11x}(p)$  со стороны зажимов 1—1' и операторный коэффициент передачи по напряжению  $K_{21x}(p)$  от зажимов 1—1' к зажимам 2—2' в режиме холостого хода на зажимах 2—2'. Построим диаграммы нулей и полюсов функций  $Z_{11x}(p)$  и  $K_{21x}(p)$ .

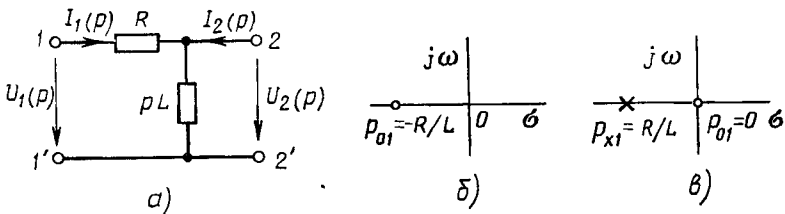


Рис. 6.12. К примеру 6.5

Ранее были получены выражения для комплексного входного сопротивления (3.12) и комплексного коэффициента передачи (3.16) данной цепи

$$Z_{11x}(j\omega) = R + j\omega L; \quad K_{21x}(j\omega) = j\omega L / (R + j\omega L).$$

Заменяя в этих выражениях  $j\omega$  на  $p$ , находим операторное входное сопротивление  $Z_{11x}(p)$  и операторный коэффициент передачи цепи по напряжению:

$$Z_{11x}(p) = R + pL = L(p + R/L);$$

$$K_{21x}(p) = \frac{pL}{R + pL} = \frac{p}{p + R/L}.$$

Можно убедиться, что аналогичные результаты получаются и при рассмотрении операторной схемы замещения цепи (рис. 6.12, а).

Полусно-нулевые диаграммы функций  $Z_{11x}(p)$  и  $K_{21x}(p)$  изображены на рис. 6.12, б, в соответственно. Функция  $Z_{11x}(p)$  имеет один нуль  $p_{01} = -R/L$ , функция  $K_{21x}(p)$  имеет один нуль  $p_{01} = 0$  и один полюс  $p_{x1} = -R/L$ .



**Пример 6.6.** Найдем операторное входное сопротивление  $Z_{11x}(p)$  последовательного колебательного контура (см. рис. 3.21, а) в режиме холостого хода на выходе. Построим полусно-нулевую диаграмму функции  $Z_{11x}(p)$ .

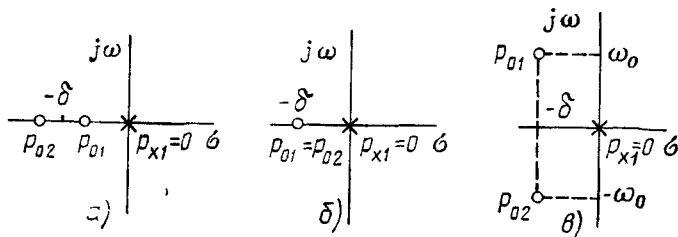


Рис. 6.13. К примеру 6.6

Операторное входное сопротивление последовательного колебательного контура равно сумме операторных сопротивлений входящих в контур элементов

$$Z_{11x}(p) = R + pL + \frac{1}{pC} = L \frac{p^2 + Rp/L + 1/(LC)}{p}.$$

Используя введенные ранее обозначения  $\delta = R/(2L)$  и  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , запишем выражение для операторного входного сопротивления контура в виде

$$Z_{11x}(p) = L \frac{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2}{p} = L \frac{(p - p_{01})(p - p_{02})}{p - p_{x1}}.$$

В зависимости от соотношения между величинами  $\delta$  и  $\omega_0$  операторное входное сопротивление может иметь два различных вещественных нуля

$$p_{01, 02} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},$$

два одинаковых вещественных нуля

$$p_{01} = p_{02} = -\delta$$

или два комплексно-сопряженных нуля

$$p_{01, 02} = -\delta \pm j\omega_{св}.$$

Во всех случаях функция  $Z_{11x}(p)$  имеет один полюс  $p_{x1} = 0$ .

Диаграммы нулей и полюсов функции  $Z_{11x}(p)$  для  $\delta > \omega_0$ ,  $\delta = \omega_0$  и  $\delta < \omega_0$  изображены на рис. 6.13, а, б, в соответственно. Очевидно, что нули функции  $Z_{11x}(p)$  являются полюсами функции  $Y_{11x}(p)$ , а полюсы  $Z_{11x}(p)$  — нулями  $Y_{11x}(p)$ .

Из примеров 6.5 и 6.6 видно, что нули операторного входного сопротивления цепи (полюсы операторной входной проводимости) совпадают с корнями характеристического уравнения, определяющего характер свободных процессов в цепи. Этот результат имеет весьма общий характер и позволяет находить корни характеристического уравнения по выражению для входного сопротивления (входной проводимости) цепи, не прибегая к составлению дифференциального уравнения.

## § 6.5. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

### Единичные функции и их свойства

Важное место в теории линейных цепей занимает исследование реакции этих цепей на идеализированные внешние воздействия, описываемые так называемыми **единичными функциями**.

Единичной ступенчатой функцией (функцией Хевисайда) называется функция

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \quad (6.93)$$

При  $t_0 = 0$  для единичной ступенчатой функции используют обозначение  $1(t)$  (рис. 6.14, б). График функции  $1(t - t_0)$  имеет вид ступеньки или скачка, высота которого равна 1 (рис. 6.14, а). Скачок такого типа будем называть **единичным**. Функцию Хевисайда

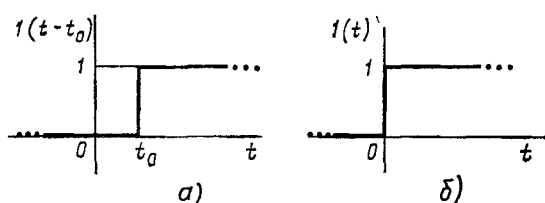


Рис. 6.14. К определению единичной ступенчатой функции

$1(t - t_0)$  удобно использовать для аналитического представления различных внешних воздействий на цепь, значение которых скачкообразно изменяется в момент коммутации:

$$f(t) \cdot 1(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ f(t) & \text{при } t \geq t_0. \end{cases} \quad (6.94)$$

где  $f(t)$  — ограниченная функция времени.

При подключении цепи к источнику постоянного тока или напряжения значение внешнего воздействия на цепь

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ X = \text{const} & \text{при } t \geq t_0, \end{cases} \quad (6.95)$$

где  $t_0$  — момент коммутации.

Внешнее воздействие такого вида называется **неединичным скачком**. Используя функцию Хевисайда, выражение (6.95) можно представить в виде

$$x(t) = X \cdot 1(t - t_0).$$

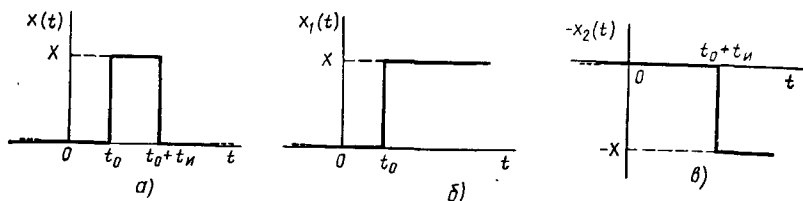


Рис. 6.15. Представление прямоугольного импульса в виде разности двух неединичных скачков

Если при  $t = t_0$  в цепь включается источник гармонического тока или напряжения

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ X_m \cos(\omega t + \psi) & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

то с использованием функции  $1(t - t_0)$  внешнее воздействие на цепь можно представить в форме

$$x(t) = 1(t - t_0) \cdot X_m \cos(\omega t + \psi).$$

Если внешнее воздействие на цепь в момент времени  $t = t_0$  скачкообразно изменяется от одного фиксированного значения  $X_1$  до другого  $X_2$ , то

$$x(t) = X_1 + (X_2 - X_1) \cdot 1(t - t_0).$$

Внешнее воздействие на цепь, имеющее форму прямоугольного импульса высотой  $X$  и длительностью  $t_n$  (рис. 6.15, а), можно представить в виде разности двух одинаковых скачков

$$x_1(t) = X \cdot 1(t - t_0)$$

$$\text{и } x_2(t) = X \cdot 1(t - t_0 - t_n),$$

сдвинутых во времени на  $t_n$  (рис. 6.15, б, в):

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) = X [1(t - t_0) - 1(t - t_0 - t_n)]. \quad (6.96)$$

Рассмотрим прямоугольный импульс длительностью  $\Delta t$  и высотой  $1/\Delta t$  (рис. 6.16, а). Очевидно, что площадь этого импульса равна 1 и не зависит от  $\Delta t$ . При уменьшении длительности импульса его высота возрастает, причем при  $\Delta t \rightarrow 0$  она стремится к бесконечности, но пло-

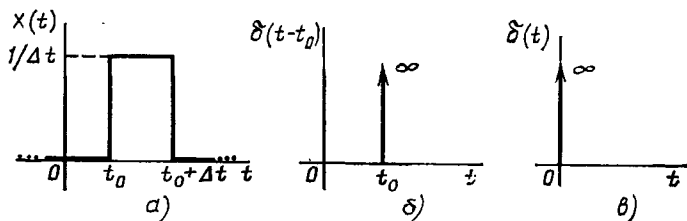


Рис. 6.16. К определению  $\delta$ -функции



щадь остается равной 1. Импульс бесконечно малой длительности, бесконечно большой высоты, площадь которого равна 1 будем называть **единичным импульсом**. Функция, определяющая единичный импульс, обозначается  $\delta(t - t_0)$  и называется  $\delta$ -**функцией** или **функцией Дирака**.

Итак,

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ \infty & \text{при } t = t_0, \end{cases} \quad (6.97)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (6.98)$$

При  $t_0 = 0$  для  $\delta$ -функции используется обозначение  $\delta(t)$ . При построении временных диаграмм функции  $\delta(t - t_0)$  и  $\delta(t)$  будем изображать в виде вертикальной стрелки со значком  $\infty$  около острия (рис. 6.16, б, в).

Для установления связи между  $\delta$ -функцией и единичной ступенчатой функцией воспользуемся выражением (6.96). Полагая  $X = 1/\Delta t$  и устремляя  $\Delta t$  к нулю, получаем

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1(t - t_0) - 1(t - t_0 - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} 1(t - t_0), \quad (6.99)$$

откуда

$$1(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt. \quad (6.100)$$

Таким образом,  $\delta$ -функция представляет собой производную от единичной ступенчатой функции, а единичная ступенчатая функция — интеграл от  $\delta$ -функции.

Строгое обоснование операций над единичными функциями, в том числе операции дифференцирования единичной ступенчатой функции, дано в теории обобщенных функций. Для качественного обоснования таких операций функции  $1(t - t_0)$  и  $\delta(t - t_0)$  удобно рассматривать в качестве предельных значений некоторых более простых функций, для которых соответствующие операции являются определенными. Рассмотрим, например, функцию  $x_1(t)$  (рис. 6.17, а), удовлетворяющую условиям

$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ \frac{1}{\Delta t} (t - t_0) & \text{при } t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t; \\ 1 & \text{при } t \geq t_0 + \Delta t. \end{cases}$$

Производная функция  $x_1(t)$  по времени (рис. 6.17, б) имеет вид прямоугольного импульса длительностью  $\Delta t$  и высотой  $1/\Delta t$ :

$$\frac{dx_1}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1/\Delta t & \text{при } t_0 \leq t < t_0 + \Delta t; \\ 0 & \text{при } t \geq t_0 + \Delta t. \end{cases}$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  функция  $x_1(t)$  вырождается в единичную ступенчатую функцию, а функция  $dx_1/dt$  — в  $\delta$ -функцию:

$$1(t-t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} x_1(t);$$

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dx_1(t)}{dt},$$

откуда непосредственно следует, что

$$\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt} 1(t-t_0),$$

$$1(t-t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(t-t_0) dt.$$

При выполнении различных операций над единичными функциями момент коммутации  $t_0$  удобно расчленять на три различных момента:  $t_{0-}$  — момент времени, непосредственно предшествующий коммутации,

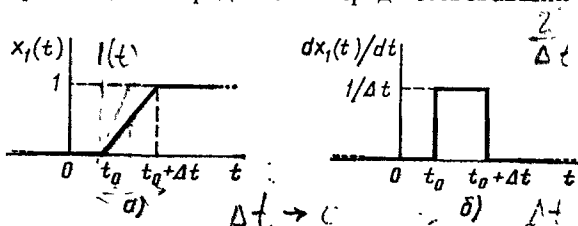


Рис. 6.17. К определению связи между единичными функциями

$t_{0-}$  — собственно момент коммутации и  $t_{0+}$  — момент времени, следующий непосредственно после коммутации. С учетом этого интеграл (6.98) можно заменить на

$$\int_{t_{0-}}^{t_{0+}} \delta(t-t_0) dt = 1. \quad (6.101)$$

В общем случае

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } t_0 \in [t_1, t_2]; \\ 0 & \text{при } t_0 \notin [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (6.102)$$

Произведение произвольной ограниченной функции времени  $f(t)$  на  $\delta(t - t_0)$

$$f(t) \delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0; \\ f(t_0) \delta(0) & \text{при } t = t_0, \end{cases}$$

следовательно,

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0). \quad (6.103)$$

Из выражений (6.102) и (6.103) следует, что интеграл от произведения произвольной ограниченной функции  $f(t)$  на  $\delta(t - t_0)$  равен либо значению этой функции при  $t = t_0$  (если точка  $t_0$  принадлежит интервалу интегрирования), либо нулю (если  $t_0$  не принадлежит интервалу интегрирования):

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0) & \text{при } t_0 \in [t_1, t_2]; \\ 0 & \text{при } t_0 \notin [t_1, t_2]. \end{cases} \quad (6.104)$$

Таким образом, с помощью  $\delta$ -функции можно выделять значения функции  $f(t)$  в произвольные моменты времени  $t_0$ . Эту особенность  $\delta$ -функции обычно называют фильтрующим свойством.

Для определения реакции линейных электрических цепей на внешнее воздействие в виде единичного скачка или единичного импульса необходимо найти изображения единичных функций по Лапласу. Используя рассмотренные свойства единичных функций, получаем

$$L[1(t - t_0)] = \int_0^{\infty} 1(t - t_0) e^{-pt} dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-pt} dt = e^{-pt_0}/p;$$

$$L[\delta(t - t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}. \quad (6.105)$$

При  $t_0 = 0$  операторные изображения единичных функций имеют простой вид:

$$1(t) \doteq 1/p; \quad \delta(t) \doteq 1. \quad (6.106)$$

### Переходная и импульсная характеристики линейных цепей

Рассмотрим линейную электрическую цепь, не содержащую независимых источников тока и напряжения. Пусть внешнее воздействие на цепь представляет собой неединичный скачок  $x(t) = x^1(t) = X \times 1(t - t_0)$ , а реакция цепи на это воздействие при нулевых начальных условиях  $y(t) = y^1(t)$ .

Переходной характеристикой  $h^1(t - t_0)$  линейной цепи, не содержащей независимых источников энергии, называется отношение реакции этой цепи на воздействие неединичного скачка тока или напряжения к высоте этого скачка при нулевых начальных условиях:

$$h^1(t - t_0) = y^1(t)/X. \quad (6.107)$$

Из выражения (6.107) видно, что  $h^1(t - t_0) = y^1(t)$ , если  $X = 1$ , следовательно, *переходная характеристика цепи численно равна реакции цепи на воздействие единичного скачка тока или напряжения*. Размерность переходной характеристики равна отношению размерности отклика к размерности внешнего воздействия, поэтому переходная характеристика может иметь размерность сопротивления, проводимости или быть безразмерной величиной.

Пусть внешнее воздействие на цепь имеет форму бесконечно короткого импульса бесконечно большой высоты и конечной площади  $S_\delta$ :

$$x(t) = x^\delta(t) = S_\delta \delta(t - t_0).$$

Реакцию цепи на это воздействие при нулевых начальных условиях обозначим  $y(t) = y^\delta(t)$ .

Импульсной характеристикой  $h^\delta(t - t_0)$  линейной цепи, не содержащей независимых источников энергии, называется отношение реакции этой цепи на воздействие бесконечно короткого импульса бесконечно большой высоты и конечной площади к площади этого импульса при нулевых начальных условиях:

$$h^\delta(t - t_0) = y^\delta(t)/S_\delta. \quad (6.108)$$

Как следует из выражения (6.108), *импульсная характеристика цепи численно равна реакции цепи на воздействие единичного импульса* ( $S_\delta = 1$ ), а размерность импульсной характеристики равна отношению размерности отклика цепи к произведению размерности внешнего воздействия на время.

Подобно комплексной частотной и операторной характеристикам цепи, переходная и импульсная характеристики устанавливают связь между внешним воздействием на цепь и ее реакцией, однако в отличие от первых характеристик аргументом последних является время  $t$ , а не угловая  $\omega$  или комплексная  $p$  частота. Так как характеристики цепи, аргументом которых является время, называются временными, а аргументом которых является частота (в том числе и комплексная) — частотными характеристиками, то переходная и импульсная характеристики относятся к временным характеристикам цепи.

Каждой операторной характеристике цепи  $H_{kv}(p)$  можно поставить в соответствие переходную  $h_{kv}^1(t - t_0)$  и импульсную  $h_{kv}^\delta(t - t_0)$  характеристики. Для установления связи между ними найдем операторные изображения переходной и импульсной характеристик. Используя выражения (6.107), (6.108), запишем  $h^1(t - t_0) \doteq Y^1(p)/X$ ;  $h^\delta(t - t_0) \doteq Y^\delta(p)/S_\delta$ .

Здесь  $Y^1(p) \doteq y^1(t)$ ;  $Y^\delta(p) \doteq y^\delta(t)$  — операторные изображения реакции цепи на внешние воздействия  $x^1(t)$  и  $x^\delta(t)$  соответственно. Выражая  $Y^1(p)$  и  $Y^\delta(p)$  через операторные изображения внешних воздействий  $X^1(p) = X e^{-pt_0}/p \doteq x^1(t)$ ;  $X^\delta(p) = S_\delta e^{-pt_0} \doteq x^\delta(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} h^1(t - t_0) &\doteq H(p) X^1(p)/X = H(p) e^{-pt_0}/p; \\ h^\delta(t - t_0) &\doteq H(p) X^\delta(p)/S_\delta = H(p) e^{-pt_0}. \end{aligned} \quad (6.109)$$

При  $t_0 = 0$  операторные изображения переходной и импульсной характеристик имеют простой вид

$$h^1(t) \doteq H(p)/p; \quad h^\delta(t) \doteq H(p). \quad (6.110)$$

Таким образом, импульсная характеристика цепи  $h_{kv}^\delta(t)$  — это функция, изображение которой, по Лапласу, представляет собой операторную характеристику цепи  $H_{kv}(p)$ , а переходная характеристика цепи  $h_{kv}^1(t)$  — функция, операторное изображение которой равно  $H_{kv}(p)/p$ . Выражения (6.109), (6.110) устанавливают связь между частотными и временными характеристиками цепи. Зная, например, импульсную характеристику  $h_{kv}^\delta(t)$ , можно с помощью прямого преобразования Лапласа найти соответствующую операторную характеристику цепи

$$H_{kv}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h_{kv}^\delta(t) dt,$$

а по известной операторной характеристике  $H_{kv}(p)$  с помощью обратного преобразования Лапласа определить импульсную характеристику цепи

$$h_{kv}^\delta(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{pt} H_{kv}(p) dp.$$

Используя выражения (6.109) и теорему дифференцирования (6.51), нетрудно установить связь между переходной и импульсной характеристиками

$$h^\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt} h^1(t-t_0). \quad (6.111)$$

Следовательно, импульсная характеристика цепи равна первой производной переходной характеристики по времени. В связи с тем что переходная характеристика цепи  $h^1(t-t_0)$  численно равна реакции цепи на воздействие единичного скачка напряжения или тока, приложенного к цепи с нулевыми начальными условиями, значения функции  $h^1(t-t_0)$  при  $t < t_0$  равны нулю. Поэтому, строго говоря, переходную характеристику цепи следует записывать как  $h^1(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)$ , а не  $h^1(t-t_0)$ . Заменяя в выражении (6.111)  $h^1(t-t_0)$  на  $h^1(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)$  и используя соотношение (6.103), получаем

$$\begin{aligned} h^\delta(t-t_0) &= \frac{d}{dt} [h^1(t-t_0) \cdot 1(t-t_0)] = 1(t-t_0) \times \\ &\times \frac{d}{dt} h^1(t-t_0) + h^1(t-t_0) \delta(t-t_0) = 1(t-t_0) \frac{d}{dt} h^1(t-t_0) + \\ &+ [h^1(t-t_0)]_{t=t_0} \delta(t-t_0). \end{aligned} \quad (6.112) \quad \triangle$$

Выражение (6.112) известно под названием формулы обобщенной производной. Первое слагаемое в этом выражении представляет собой производную переходной характеристики при  $t > t_0$ , а второе слагаемое содержит произведение  $\delta$ -функции на значе-

ние переходной характеристики в точке  $t = t_0$ . Если при  $t = t_0$  функция  $h^1(t - t_0)$  изменяется скачкообразно, то импульсная характеристика цепи содержит  $\delta$ -функцию, умноженную на высоту скачка переходной характеристики в точке  $t = t_0$ . Если функция  $h^1(t - t_0)$  не претерпевает разрыва при  $t = t_0$ , т. е. значение переходной характеристики в точке  $t = t_0$  равно нулю, то выражение для обобщенной производной совпадает с выражением для обычной производной.

## Определение временных характеристик линейных цепей

Для определения переходных (импульсных) характеристик линейной цепи в общем случае необходимо рассмотреть переходные процессы, имеющие место в данной цепи при воздействии на нее единичного скачка (единичного импульса) тока или напряжения. Это может быть выполнено с помощью классического или операторного методов анализа переходных процессов. На практике для нахождения временных характеристик линейных цепей удобно использовать другой путь, основанный на применении соотношений, устанавливающих связь между частотными и временными характеристиками. Определение временных характеристик в этом случае начинается с составления операторной схемы замещения цепи для нулевых начальных условий. Далее, используя эту схему, находят операторную характеристику  $H_{kv}(p)$ , соответствующую заданной паре: внешнее воздействие на цепь  $x_v(t)$  — реакция цепи  $y_k(t)$ . Зная операторную характеристику цепи и применяя соотношения (6.109) или (6.110), определяют искомые временные характеристики.

При качественном рассмотрении реакции линейной цепи на воздействие единичного импульса тока или напряжения переходной процесс в цепи разделяют на два этапа. На первом этапе (при  $t \in ]t_{0-}, t_{0+}[$  цепь находится под воздействием единичного импульса, сообщаящего цепи определенную энергию. Токи индуктивностей и напряжения емкостей при этом скачком изменяются на значение, соответствующее поступившей в цепь энергии. На втором этапе (при  $t \geq t_{0+}$ ) действие приложенного к цепи внешнего воздействия закончилось (при этом соответствующие источники энергии выключены, т. е. представлены внутренними сопротивлениями), и в цепи возникают свободные процессы, протекающие за счет энергии, запасенной в реактивных элементах на первой стадии переходного процесса. Таким образом, импульсная характеристика цепи, численно равная реакции на воздействие единичного импульса тока или напряжения, характеризует свободные процессы в рассматриваемой цепи. Следовательно, при переходе цепи от исходного состояния к первой стадии переходного процесса, законы коммутации не выполняются, а при переходе от первой стадии переходного процесса ко второй — выполняются.



**Пример 6.7.** Для цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а, найдем переходную и импульсную характеристики в режиме холостого хода на зажимая 2—2'. Внешнее воздействие на цепь — напряжение на зажимах 1—1'  $x(t) = u_1$ , реакция цепи — напряжение на зажимах 2—2'  $y(t) = u_2$ .

Операторная характеристика данной цепи, соответствующая указанной паре: внешнее воздействие на цепь — реакция цепи, была получена в примере 6.5:

$$H_{kv}(p) = K_{21x}(p) = \frac{p}{p + R/L}.$$

Следовательно, операторные изображения переходной и импульсной характеристик цепи имеют вид

$$h^1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{H(p)}{p} = \frac{1}{p + R/L};$$

$$h^\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} H(p) = \frac{p}{p + R/L} = 1 - \frac{R}{L} \frac{1}{p + R/L}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа (см. приложение 1), переходим от изображения искомым временным характеристикам к оригиналам (рис. 6.18, а, б):

$$h^1(t) = e^{-Rt/L}; \quad h^\delta(t) = \delta(t) - R e^{-Rt/L}/L.$$

Заменяя в полученных выражениях  $t$  на  $t - t_0$ , находим временные характеристики цепи при  $t_0 \neq 0$ :

$$h^1(t - t_0) = e^{-R(t - t_0)/L}; \quad h^\delta(t - t_0) = \delta(t - t_0) - R e^{-R(t - t_0)/L}/L.$$

Отметим, что выражение для импульсной характеристики рассматриваемой цепи  $h^\delta(t)$  могло быть получено и другим путем с помощью формулы (6.112), примененной к выражению для переходной характеристики цепи  $h^1(t)$ .

Для качественного объяснения вида переходной и импульсной характеристик цепи в рассматриваемом включении, подсоединим к зажимам 1—1' независимый источник напряжения  $e(t) = u_1$  (рис. 6.18, в). Переходная характеристика данной цепи численно равна напряжению на зажимах 2—2' при воздей-

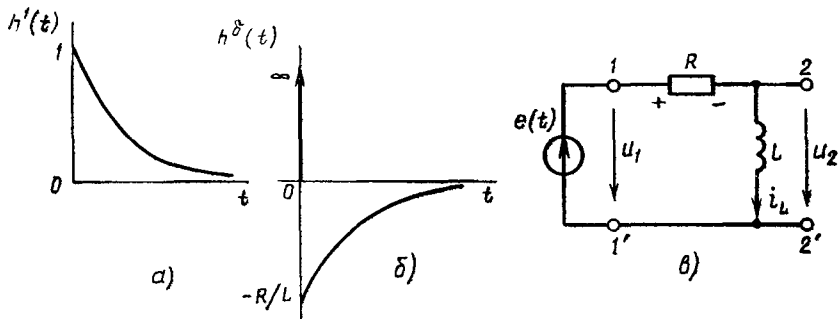


Рис. 6.18. К примеру 6.7

ствии на цепь единичного скачка напряжения  $e(t) = 1(t)$ , В, и нулевых начальных условиях. В начальный момент времени после коммутации сопротивление индуктивности бесконечно велико, поэтому при  $t - t_0 = 0$  напряжение на выходе цепи равно напряжению на зажимах 1—1':  $u_2|_{t=0} = u_1|_{t=0} = 1$  В.

С течением времени напряжение на индуктивности уменьшается, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Все это объясняет, почему переходная характеристика начнется от значения  $h^1(0) = 1$  и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ .

Импульсная характеристика цепи численно равна напряжению на зажимах 2—2' при приложении к входу цепи единичного импульса напряжения  $e(t) = 1 \cdot \delta(t)$ , В.

При  $t \in ]0_-, 0_+[$  все входное напряжение оказывается приложенным к индуктивности, и ток индуктивности скачком увеличивается от нуля до

$$i_L(0_+) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{0_+} u_L dt = \frac{1}{L}, \text{ А}$$

При  $t \geq 0_+$  источник напряжения может быть заменен короткозамыкающей перемычкой, а ток индуктивности плавно уменьшается от  $i_L(0_+)$  до нуля. Напряжение на индуктивности равно напряжению на сопротивлении  $R$ , поэтому при  $t \geq 0_+$  выходное напряжение цепи изменяется от  $u_2(0_+) = -Ri_L(0_+) = -R/L$  до нуля.

## § 6.6. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА НАЛОЖЕНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

### Определение реакции цепи на произвольное внешнее воздействие

Наиболее общий подход к анализу переходных процессов в линейных цепях основан на использовании принципа наложения. Внешнее воздействие на цепь  $x = x(t)$  в этом случае представляют в виде линейной комбинации однотипных элементарных составляющих  $x_k(t)$ :

$$x(t) = \sum_k \alpha_k x_k(t),$$

а реакцию цепи на такое воздействие ищут в виде линейной комбинации частичных реакций  $y_k(t)$  на воздействие каждой из элементарных составляющих внешнего воздействия в отдельности:

$$y(t) = \sum_k \alpha_k y_k(t).$$

В качестве элементарных составляющих  $x_k(t)$  можно выбирать внешние воздействия, описываемые различными классами функций, реакция цепи на которые может быть найдена с помощью рассмотренных ранее методов. Наиболее широкое распространение получили элементарные (пробные) воздействия в виде гармонической функции времени, единичного скачка или единичного импульса.

Метод анализа переходных процессов в линейных цепях, основанный на представлении внешнего воздействия в виде конечной или бесконечной суммы гармонических функций времени, получил название **спектрального\***.

### Определение реакции цепи на произвольное внешнее воздействие по ее переходной характеристике

Рассмотрим произвольную линейную электрическую цепь, не содержащую независимых источников энергии, переходная характеристика которой  $h^1(t)$  известна. Пусть внешнее воздействие на цепь зада-

\*) Этот метод будет рассмотрен более подробно при изучении курса «Радиотехнические цепи и сигналы».



ется в виде произвольной функции  $x = x(t)$ , равной нулю при  $t < t_0$  и непрерывной при всех  $t$ , за исключением точки  $t = t_0$ , где  $x(t)$  может иметь конечный разрыв (рис. 6.19). Функцию  $x(t)$  можно приближенно представить в виде суммы неединичных скачков или, что то же самое, в виде линейной комбинации единичных скачков, смещенных один относительно другого на  $\Delta\tau$ :

$$x(t) \approx x(t_0) \cdot 1(t-t_0) + \sum_k \Delta x(\tau_k) \cdot 1(t-\tau_k). \quad (6.113)$$

Здесь  $x(t_0)$  — высота начального скачка функции  $x(t)$ ;  $\Delta x(\tau_k) \approx \Delta\tau \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau_k}$  — высота скачка, подаваемого в момент времени  $t = \tau_k$  (на рис. 6.19 этот скачок заштрихован).

В соответствии с определением переходной характеристики (6.107) реакция цепи на воздействие неединичного скачка, приложенного в момент времени  $t = \tau_k$ , равна произведению высоты скачка на переходную характеристику цепи  $h^1(t-\tau_k)$ . Следовательно, реакция цепи на воздействие, представляемое суммой неединичных скачков (6.113), равна сумме произведений высот скачков на соответствующие переходные характеристики

$$y(t) \approx x(t_0) h^1(t-t_0) + \sum_k \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau_k} h^1(t-\tau_k) \Delta\tau. \quad (6.114)$$

Очевидно, что точность представления входного воздействия в виде суммы неединичных скачков, как и точность представления реакции цепи в виде (6.114), возрастает с уменьшением шага разбиения по времени  $\Delta\tau$ . При  $\Delta\tau \rightarrow 0$  суммирование заменяется интегрированием:

$$y(t) = x(t_0) h^1(t-t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} h^1(t-\tau) d\tau. \quad (6.115)$$

Выражение (6.115) известно под названием **интеграла Дюамеля** (интеграла наложения). Используя это выражение, можно найти точное значение реакции цепи на заданное воздействие  $x = x(t)$  в любой момент времени  $t$  после коммутации. Интегрирование в (6.115) осуществляется на промежутке  $t_0 < \tau < t$ , причем выражения для  $x(\tau)$  и  $h^1(t-\tau)$  получаются из выражений для  $x(t)$  и  $h^1(t)$  путем замены  $t$  на  $\tau$  и  $t-\tau$  соответственно.

С помощью интеграла Дюамеля можно найти реакцию цепи на заданное воздействие и тогда, когда внешнее воздействие на цепь описывается кусочно-непрерывной функцией, т. е. функцией, которая имеет конечное число конечных разрывов. В этом случае необходимо разбить

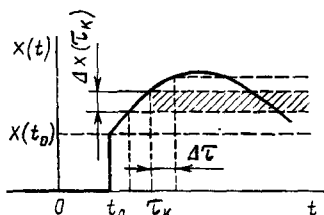


Рис. 6.19. Представление произвольного внешнего воздействия в виде суммы неединичных скачков

интервал интегрирования на несколько промежутков в соответствии с интервалами непрерывности функции  $x = x(t)$  и учесть реакцию цепи на конечные скачки функции  $x = x(t)$  в точках разрыва.



**Пример 6.8.** Найдем реакцию цепи на внешнее воздействие, задаваемое функцией  $x = x(t)$  вида (рис. 6.20)

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ x_1(t) & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ x_2(t) & \text{при } t_1 \leq t < t_2; \\ 0 & \text{при } t \geq t_2. \end{cases}$$

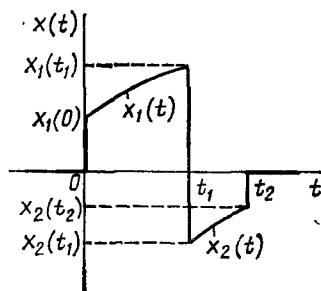
Разбиваем ось времени на четыре промежутка в соответствии с интервалами непрерывности функции  $x = x(t)$ .

При  $t < 0$  реакция цепи  $y = y(t)$  тождественно равна нулю (реакция цепи не может опережать по времени внешнее воздействие на цепь).

На участке  $0 < t < t_1$  функция  $x = x(t)$  непрерывна, поэтому реакция цепи находится непосредственно с помощью выражения (6.115)

$$y(t) = x_1(0) h^1(t) + \int_0^t \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} h^1(t-\tau) d\tau.$$

При  $t_1 < t < t_2$  интервал интегрирования  $]0, t[$  содержит одну точку разрыва функции  $x(t)$ . Разбивая интервал интегрирования на два промежутка  $]0, t_1[$ ,  $]t_1, t[$  и учитывая реакцию цепи на возмущающие скачки функции  $x(t)$  в точке  $t = t_1$ , получаем



$$y(t) = x_1(0) h^1(t) + \int_0^{t_1} \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} h^1(t-\tau) d\tau + [x_2(t_1) - x_1(t_1)] h^1(t-t_1) + \int_{t_1}^t \frac{dx_2(\tau)}{d\tau} h^1(t-\tau) d\tau.$$

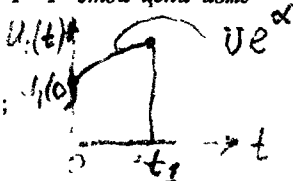
Рис. 6.20. К примеру 6.8

При  $t > t_2$  интервал интегрирования содержит две точки разрыва функции  $x(t)$ . Для определения реакции цепи в этом случае необходимо разбить интервал интегрирования на три промежутка  $]0, t_1[$ ,  $]t_1, t_2[$ ,  $]t_2, t[$  и учесть реакцию цепи на скачки функции в точках  $t_1$  и  $t_2$ . Принимая во внимание, что при  $t > t_2$   $dx(t)/dt = 0$ , получаем

$$y(t) = x_1(0) h^1(t) + \int_0^{t_1} \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} h^1(t-\tau) d\tau + [x_2(t_1) - x_1(t_1)] h^1(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx_2(\tau)}{d\tau} h^1(t-\tau) d\tau - x_2(t_2) h^1(t-t_2).$$

Пример 6.9. Найдем напряжение на зажимах 2—2' цепи, схема которой приведена на рис. 3.12, а, если напряжение на зажимах 1—1' этой цепи изменяется во времени по закону

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U e^{\alpha t} & \text{при } 0 \leq t < t_1; \\ 0 & \text{при } t \geq t_1. \end{cases}$$



Переходная характеристика данной цепи в рассматриваемом включении была определена в примере 6.7:

$$h^1(t) = e^{-Rt/L}.$$

При  $t < 0$  напряжение на зажимах 2—2' тождественно равно нулю.

При  $0 < t < t_1$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_1(0) h^1(t) + \int_0^{t_1} \frac{du_1(\tau)}{d\tau} h^1(t-\tau) d\tau = U e^{-Rt/L} + \\ &+ \int_0^t U \alpha e^{\alpha\tau} e^{-R(t-\tau)/L} d\tau = U e^{-Rt/L} + \frac{U \alpha e^{-Rt/L}}{\alpha + R/L} [e^{(\alpha + R/L)t} - 1] = \\ &= \frac{\alpha e^{\alpha t} + R e^{-Rt/L/L}}{\alpha + R/L} U. \end{aligned}$$

При  $t > t_1$

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_1(0) h^1(t) + \int_0^{t_1} \frac{du_1(\tau)}{d\tau} h^1(t-\tau) d\tau - u_1(t_1) h^1(t-t_1) = U e^{-Rt/L} + \\ &+ \frac{U \alpha e^{-Rt/L}}{\alpha + R/L} [e^{(\alpha + R/L)t_1} - 1] - U e^{\alpha t_1} e^{-R(t-t_1)/L} = \\ &= \frac{U}{\alpha + R/L} \frac{R}{L} e^{-Rt/L} [1 - e^{(\alpha + R/L)t_1}]. \end{aligned}$$

Определение реакции цепи на произвольное внешнее воздействие по ее импульсной характеристике

25.03.96  
17.03.96

Пусть внешнее воздействие на линейную электрическую цепь, импульсная характеристика  $h^{\delta}(t - t_0)$  которой известна, описывается произвольной функцией  $x = x(t)$ , равной нулю при  $t < t_0$  и непрерывной при всех  $t$ , за исключением точки  $t = t_0$ , где функция  $x(t)$  может иметь конечный разрыв (рис. 6.21). Функция  $x(t)$  может быть приближенно представлена в виде суммы импульсов  $x_h(t)$  длительностью  $\Delta\tau$ , сдвинутых один относительно другого на  $\Delta\tau$ :

$$x(t) \approx \sum_k x_h(t). \quad (6.116)$$

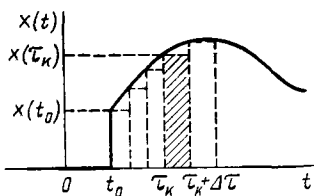


Рис. 6.21. Представление произвольного внешнего воздействия в виде суммы импульсов

Рассматривая элементарный импульс  $x_k(t)$  (на рис. 6.21 заштрихован) как разность двух неединичных скачков  $x(\tau_k)$ , сдвинутых по времени на  $\Delta\tau$ , выражение (6.116) можно представить в форме

$$x(t) \approx \sum_k x(\tau_k) [1(t - \tau_k) - 1(t - \tau_k - \Delta\tau)] = \sum_k S_k \frac{1(t - \tau_k) - 1(t - \tau_k - \Delta\tau)}{\Delta\tau}, \quad (6.117)$$

где  $S_k = x(\tau_k) \Delta\tau$  — площадь элементарного импульса  $x_k(t)$ .

Точность представления внешнего воздействия на цепь с помощью выражения (6.117) возрастает с уменьшением шага разбиения по времени  $\Delta\tau$ .

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1(t - \tau_k) - 1(t - \tau_k - \Delta\tau)}{\Delta\tau} = \delta(t - \tau_k),$$

внешнее воздействие на цепь при достаточно малом шаге разбиения по времени можно представить в виде линейной комбинации единичных импульсов

$$x(t) \approx \sum_k S_k \delta(t - \tau_k). \quad (6.118)$$

В соответствии с определением импульсной характеристики (6.108) реакция цепи  $y_k(t)$  на воздействие одиночного импульса  $x_k = S_k \times \delta(t - \tau_k)$  равна произведению площади импульса  $S_k$  на импульсную характеристику цепи  $h^\delta(t - \tau_k)$ :

$$y_k(t) = S_k h^\delta(t - \tau_k).$$

Следовательно, реакция цепи на воздействие вида (6.118) равна сумме произведений площадей импульсов  $S_k$  на соответствующие импульсные характеристики  $h^\delta(t - \tau_k)$ :

$$y(t) \approx \sum_k S_k h^\delta(t - \tau_k) = \sum_k x(\tau_k) h^\delta(t - \tau_k) \Delta\tau.$$

Устремляя  $\Delta\tau$  к нулю и переходя от суммирования к интегрированию, получаем окончательно

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) h^\delta(t - \tau) d\tau. \quad (6.119)$$

Выражение (6.119) представляет собой одну из форм записи интеграла Дюамеля и его можно получить непосредственно из (6.115), используя правило интегрирования по частям и учитывая соотношения между переходной и импульсной характеристиками цепи (6.112). Выражение (6.119) можно использовать для определения реакции це-

ли и в том случае, когда внешнее воздействие на цепь описывается кусочно-непрерывной функцией, при этом интервал интегрирования разбивается на несколько промежутков в соответствии с интервалами непрерывности функции  $x(t)$ .

25.04.75г.



**Пример 6.10.** Зная импульсную характеристику цепи  $h^\delta(t - t_0)$ , найдем реакцию цепи на внешнее воздействие, описанное в примере 6.8.

Разбиваем ось времени на четыре промежутка в соответствии с интервалами непрерывности функции  $x = x(t)$  и, используя выражение (6.119), определяем реакцию цепи на заданное воздействие на каждом из промежутков:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \int_0^t x_1(\tau) h^\delta(t-\tau) d\tau & \text{при } 0 < t < t_1; \\ \int_0^{t_1} x_1(\tau) h^\delta(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t x_2(\tau) h^\delta(t-\tau) d\tau & \text{при } t_1 < t < t_2; \\ \int_0^{t_1} x_1(\tau) h^\delta(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} x_2(\tau) h^\delta(t-\tau) d\tau & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$



**Пример 6.11.** Используя данные примеров 6.7 и 6.9, найдем реакцию цепи на заданное внешнее воздействие по ее импульсной характеристике

$$h^\delta(t) = \delta(t) - R e^{-Rt/L}/L.$$

Разбиваем ось времени на три интервала в соответствии с интервалами непрерывности функции  $x = x(t)$ . При  $t < 0$  напряжение на зажимах 2—2' тождественно равно нулю.

На участке  $]0, t_1[$  функция  $u_1(t)$  не имеет разрывов, поэтому напряжение на зажимах 2—2' находится непосредственно с помощью выражения (6.119):

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^t u_1(\tau) h^\delta(t-\tau) d\tau = U \int_0^t e^{\alpha\tau} \left[ \delta(t-\tau) - \frac{R}{L} e^{-R(t-\tau)/L} \right] d\tau = \\ &= U \int_0^t e^{\alpha\tau} \delta(t-\tau) d\tau - \frac{R}{L} U e^{-Rt/L} \int_0^t e^{(\alpha+R/L)\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^t e^{\alpha\tau} \delta(t-\tau) d\tau = e^{\alpha t}, \quad \text{а} \quad \int_0^t e^{(\alpha+R/L)\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha+R/L} [e^{(\alpha+R/L)t} - 1],$$

то, выполняя преобразования, получаем выражение для напряжения на зажимах 2—2' при  $0 < t < t_1$ :

$$u_2(t) = \frac{U}{\alpha+R/L} \left[ \alpha e^{\alpha t} + \frac{R}{L} e^{-Rt/L} \right].$$

При  $t > t_1$  интервал интегрирования содержит точку разрыва функции  $u_1(t)$ . Разбивая интервал интегрирования  $]0, t[$  на два промежутка  $]0, t_1[$ ,  $]t_1, t[$  и принимая во внимание, что  $\int_{t_1}^t u_1(\tau) h^\delta(t-\tau) d\tau = 0$  и  $\int_0^{t_1} e^{\alpha\tau} \delta(t-\tau) d\tau = 0$ , получаем выражение для напряжения на зажимах 2—2' при  $t > t_1$ :

$$u_2(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) h^\delta(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_1(\tau) h^\delta(t-\tau) d\tau = U \int_0^{t_1} e^{\alpha\tau} \delta(t-\tau) d\tau - \\ - \frac{R}{L} U e^{-Rt/L} \int_0^{t_1} e^{(\alpha+R/L)\tau} d\tau = \frac{U}{\alpha+R/L} \frac{R}{L} e^{-Rt/L} [1 - e^{(\alpha+R/L)t_1}].$$

Как и следовало ожидать, полученные выражения для реакции рассматриваемой цепи на заданное воздействие, найденные с помощью импульсной характеристики цепи, совпадают с соответствующими выражениями, полученными с использованием переходной характеристики цепи (пример 6.9).

Функция  $f(t)$ , определяемая соотношением

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau,$$

называется сверткой функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Используя известное из математики [7] свойство свертки двух функций

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau,$$

из выражений (6.115) и (6.119) можно получить еще две формы записи интеграла Дюамеля

$$y(t) = x(t_0) h^1(t-t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dx(t-\tau)}{d(t-\tau)} h^1(\tau) d\tau$$

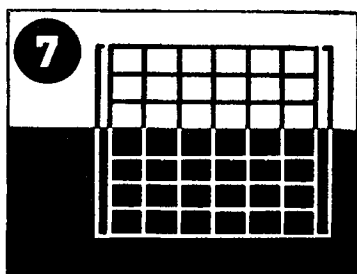
и

$$y(t) = \int_{t_0}^t x(t-\tau) h^\delta(\tau) d\tau.$$

Все приведенные формы записи интеграла Дюамеля равноценны в смысле получаемых результатов, поэтому выбор того или иного выражения определяется только удобством вычислений и не носит принципиального характера.

17.03.96

# Методы анализа цепей, ориентированные на применение ЭВМ



## § 7.1. ЗАДАЧА МАШИННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

### Понятие о ручных и машинных методах анализа цепей

В соответствии с основным методом теории цепей анализ включает в себя следующие основные этапы:

- 1) переход от принципиальной электрической схемы цепи к ее эквивалентной схеме;
- 2) составление уравнений электрического равновесия;
- 3) решение уравнений электрического равновесия и представление полученных результатов.

На первом этапе анализа каждый реальный элемент электрической цепи заменяется его упрощенной моделью, составленной только из идеализированных пассивных и активных элементов. На втором этапе выбирается система независимых переменных, характеризующая процессы в рассматриваемой цепи, и составляется система уравнений электрического равновесия относительно этих переменных. На третьем этапе анализа решается система уравнений электрического равновесия и определяется искомая реакция цепи на заданное воздействие или соотношения, связывающие между собой реакцию цепи и внешнее воздействие.

В течение длительного времени различные средства вычислительной техники, в том числе и электронные вычислительные машины (ЭВМ), применялись только для выполнения третьего из перечисленных этапов. Такое использование ЭВМ было неэффективным, так как требовало большого объема подготовительных работ, выполняемых вручную. Очевидно, что применение ЭВМ для решения системы уравнений электрического равновесия не носит принципиального характера, так как для этой цели можно использовать и другие средства вычислений, включая арифмометры, счетные линейки и инженерные калькуляторы.

Характерной особенностью современного уровня развития методов анализа цепей является широкое применение ЭВМ не только для решения уравнений электрического равновесия, но и для формирования этих уравнений по заданной эквивалентной схеме цепи или для составления эквивалентной схемы цепи и соответствующих уравнений

электрического равновесия по заданной принципиальной электрической схеме цепи. Заметим, что использование ЭВМ для построения эквивалентной схемы цепи и формирования системы уравнений электрического равновесия носит принципиальный характер, так как эти этапы не могут быть выполнены с помощью других средств вычислительной техники. Современные методы анализа цепей, основанные на применении ЭВМ для комплексного выполнения всех трех (или хотя бы двух последних) этапов анализа, получили название методов машинного (автоматизированного) анализа цепей. Методы анализа цепей, в которых формирование уравнений электрического равновесия производится вручную (независимо от того, применяют или не применяют ЭВМ для решения уравнений электрического равновесия), получили название ручных методов анализа.

Автоматизация методов анализа электрических цепей позволяет не только значительно сократить время анализа, но и существенно повысить его точность. *Решение ряда задач анализа, связанных с проектированием современной аппаратуры на больших интегральных микросхемах, каждая из которых может насчитывать несколько тысяч элементов, вообще немыслимо без применения автоматизированных методов анализа.* Широкое применение ЭВМ для анализа цепей оказало существенное влияние и на развитие теории цепей, в частности стимулировало разработку специальных методов анализа, ориентированных на использование ЭВМ.

## **Общие представления о программах машинного анализа цепей**

Разработанные программы машинного анализа цепей условно подразделяют на две большие группы: программы общего назначения, предназначенные для решения широкого круга задач анализа цепей различного типа, и специализированные программы, ориентированные на решение отдельных частных задач анализа, таких, как исследование временных или частотных характеристик линейных цепей, нахождение рабочих точек нелинейных элементов, определение чувствительности цепи к изменению параметров элементов и т. п. Независимо от назначения каждая программа автоматизированного анализа состоит из нескольких основных блоков, соответствующих основным этапам анализа цепей: блок подготовки исходных данных, блок формирования уравнений электрического равновесия, блок решения уравнений электрического равновесия, блок представления результатов анализа.

С помощью первого блока на этапе подготовки исходных данных в ЭВМ вводят информацию о схеме исследуемой цепи, параметрах ее элементов, формулируют конкретную задачу анализа и указывают способ представления результатов. В наиболее развитых программах анализа цепей в ЭВМ вводят составленный определенным образом список элементов принципиальной электрической схемы рассматриваемой цепи с указанием типов элементов, их параметров и номеров узлов, к которым подключены выводы элементов. Переход от принци



пиальной схемы цепи к ее схеме замещения в программах такого типа осуществляется автоматически, с помощью имеющейся в программе библиотеки моделей (схем замещения) всех элементов цепи. При использовании программ анализа цепей более низкого уровня требуется предварительно вручную построить эквивалентную схему цепи. В этом случае в ЭВМ вводят список ветвей идеализированной цепи с указанием характера ветви, ее параметров и ориентации, определяемой порядком перечисления номеров узлов, к которым подключена данная ветвь.

Важнейшим этапом машинного анализа цепей, который наиболее трудно поддается автоматизации, является формирование уравнений электрического равновесия. Рассмотренные ранее алгоритмы составления этих уравнений носят описательный характер, недостаточно формализованы и непригодны для непосредственного применения в программах машинного анализа.

Уравнения электрического равновесия цепи, сформированные любым из методов, можно решать либо в численной, либо в символьной форме. В первом случае находят числовые значения токов и напряжений цепи, соответствующие определенным значениям параметров элементов и величин, характеризующих внешнее воздействие, во втором — решение получают в виде аналитического выражения, справедливого в определенном диапазоне изменения параметров элементов и величин, характеризующих заданное воздействие. К настоящему времени наибольшие успехи достигнуты в области численных методов решения уравнений электрического равновесия, которые основаны на хорошо разработанных методах вычислительной математики и легко поддаются алгоритмизации\*). Символьные методы решения уравнений электрического равновесия не имеют единой математической базы и развиты в меньшей степени. Имеющиеся программы машинного анализа цепей, реализующие решение уравнений электрического равновесия в символьной форме, основаны на использовании метода сигнальных графов или метода обобщенных чисел и позволяют анализировать только линейные цепи малой сложности. Методы символьного решения нелинейных дифференциальных или алгебраических уравнений вообще не разработаны.

Определяющее влияние на выбор методов численного анализа оказывает уровень развития средств вычислительной техники и соответствующего математического обеспечения. В свою очередь используемые методы численного анализа существенным образом влияют на выбор методов формирования уравнений электрического равновесия. Поэтому на каждом этапе развития вычислительной техники на первый план выступают свои методы решения уравнений электрического равновесия и соответствующие им методы формирования этих уравнений.

Заключительным этапом машинного анализа цепей является представление результатов. На этом этапе обрабатываются результаты ре-

\*) Детально ознакомиться с численными методами решения уравнений электрического равновесия можно при изучении курсов «Высшая математика» и «Вычислительная техника в инженерных расчетах и основы САПР».

шения уравнений электрического равновесия, определяются искомыми характеристиками цепи, и полученные данные выводятся из ЭВМ. Результаты анализа цепи поступают либо на автоматические алфавитно-цифровые печатающие устройства, либо на дисплей — визуальные устройства отображения графической и алфавитно-цифровой информации, а при необходимости и на механические графопостроители, которые вычерчивают соответствующие кривые. Современные программы автоматизированного анализа цепей, как правило, организуют работу ЭВМ в диалоговом режиме, при котором пользователь на основе данных предварительного анализа может вводить в ЭВМ директивы, с помощью которых определяется вид анализа, производится изменение схемы исследуемой цепи или параметров ее элементов, задается тот или иной способ представления получаемых результатов.

Программы машинного анализа цепей являются частью современных систем автоматизированного проектирования (САПР) и входят в состав математического обеспечения автоматизированных рабочих мест проектировщика радиоэлектронной аппаратуры. Несмотря на обилие таких программ, постоянно возникает необходимость их усовершенствования или разработки новых программ. Поэтому специалисты в области радиоэлектроники должны четко представлять себе основные принципы, положенные в основу машинных методов анализа цепей.

## **§ 7.2. МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ, ПРЕДНАЗНАЧЕННЫЕ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В ПРОГРАММАХ МАШИННОГО АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ**

### **Компонентные матрицы и компонентные уравнения цепи**

Для составления уравнений электрического равновесия цепи с помощью ЭВМ необходимо формализовать исходные данные о топологии цепи и параметрах входящих в нее элементов. Наиболее удобным является представление этой информации в матричной форме. Известно, что топологические свойства цепи полностью определяются ее графом, которому можно поставить в соответствие различные топологические матрицы: матрицу узлов  $A$ , матрицу главных контуров  $B$ , матрицу главных сечений  $Q$  и др. Эти матрицы связаны между собой определенными соотношениями [5] так, что всегда, зная одну из них, можно определить любую другую. Наиболее просто с помощью ЭВМ формируется матрица узлов, так как при этом не требуется строить дерево цепи и определять соответствующую систему главных контуров или главных сечений.

С помощью ЭВМ можно формировать и компонентные матрицы, применяемые для составления компонентного уравнения цепи в матричной форме. В большинстве программ машинного анализа цепей с целью упрощения и унификации компонентных уравнений ветвей используют расширенное топологическое описание цепи, при котором каждый идеализированный двухполюсный элемент рассматривается в качестве отдельной ветви. Полагая для простоты, что исследуемая

цепь не содержит вырожденных источников, используем один из вариантов расширенного топологического описания цепи, при котором активный двухполюсник, состоящий из идеального источника тока или напряжения и сопротивления, которое можно рассматривать как внутреннее сопротивление соответствующего источника, представляется в виде одной ветви графа.

В зависимости от того, какая из величин (ток или напряжение) выбрана в качестве независимой переменной, компонентные уравнения ветвей, содержащих идеализированные пассивные элементы, могут быть записаны в одной из двух форм: для сопротивления (1.9) или (1.10), для емкости (1.13) или (1.16), для индуктивности (1.22)

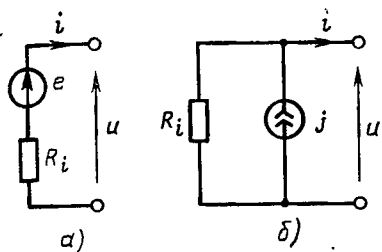


Рис. 7.1. Положительные направления токов и напряжений ветвей, содержащих источники напряжения и тока

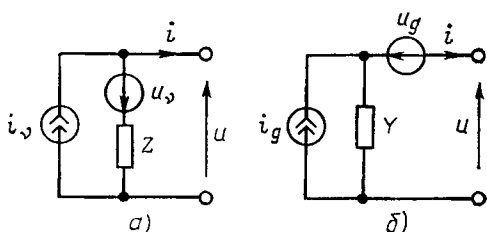


Рис. 7.2. Схемы замещения обобщенных ветвей, соответствующих компонентным уравнениям в форме  $Z$  (а) и в форме  $Y$  (б)

или (1.23). Принимая, что положительные направления токов и напряжений всех ветвей цепи совпадают, компонентные уравнения ветви, содержащей идеальный источник напряжения (рис. 7.1, а), можно представить в виде

$$u = R_i i - e, \quad i = \frac{1}{R_i} (u + e),$$

а компонентные уравнения ветви с источником тока (рис. 7.1, б) в виде

$$u = R_i (i - j), \quad i = j + \frac{1}{R_i} u.$$

Вводя обозначения  $sa = da/dt$ ,  $s^{-1}a = \int_0^t a dt$ , где  $s$  — оператор дифференцирования;  $s^{-1}$  — оператор интегрирования, компонентные уравнения каждой ветви при произвольном внешнем воздействии можно записать (табл. 7.1) либо в форме  $Z$

$$u = u_v + Z (i - i_v), \quad (7.1)$$

либо в форме  $Y$

$$i = i_g + Y (u - u_g). \quad (7.2)$$

Здесь  $u$ ,  $i$  — напряжение и ток ветви;  $Y$ ,  $Z$  — коэффициенты, определяемые характером входящих в ветвь идеализированных пассивных элементов;  $i_v$ ,  $u_v$ ,  $i_g$ ,  $u_g$  — величины, характеризующие внешние

Таблица 7.1. Компонентные уравнения ветвей электрических цепей

Тип ветви	Форма компонентного уравнения	
	$Z$	$Y$
$R$	$u = 0 + R(i - 0)$	$i = 0 + (1/R)(u - 0)$
$C$	$u = u(0) + [1/(sC)](i - 0)$	$i = 0 + sC(u - 0)$
$L$	$u = 0 + sL(i - 0)$	$i = i(0) + [1/(sL)](u - 0)$
$e$	$u = -e + R_i(i - 0)$	$i = 0 + (1/R_i)(u + e)$
$j$	$u = 0 + R_i(i - j)$	$i = j + (1/R_i)(u + 0)$

воздействия на цепь и независимые начальные условия. Уравнениям (7.1), (7.2) можно поставить в соответствие обобщенные ветви, схемы замещения которых приведены на рис. 7.2. При гармоническом внешнем воздействии компонентные уравнения ветвей сохраняют ту же структуру, но мгновенные значения токов и напряжений заменяются их комплексными изображениями, оператор  $s$  — на  $j\omega$ , независимые начальные условия полагают равными нулю.

Если компонентные уравнения всех ветвей цепи представлены в одной и той же форме ( $Z$  или  $Y$ ), то их можно объединить в одно матричное компонентное уравнение цепи соответственно либо в форме  $Z$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_v + \mathbf{Z} \{\mathbf{i} - \mathbf{i}_v\}, \quad (7.3)$$

либо в форме  $Y$

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_g + \mathbf{Y} \{\mathbf{u} - \mathbf{u}_g\}. \quad (7.4)$$

Здесь  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$  — квадратные матрицы, называемые матрицами сопротивлений и проводимостей цепи;  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{u}$  — векторы (матрицы-столбцы) мгновенных значений токов и напряжений ветвей;  $\mathbf{i}_v$ ,  $\mathbf{u}_v$ ,  $\mathbf{i}_g$ ,  $\mathbf{u}_g$  — задающие векторы, характеризующие внешние воздействия на цепь и независимые начальные условия.



Пример 7.1. Сформируем компонентные матрицы цепи, схема которой приведена на рис. 7.3, а. Граф, соответствующий принятому в этой главе топологическому описанию цепи, изображен на рис. 7.3, б.

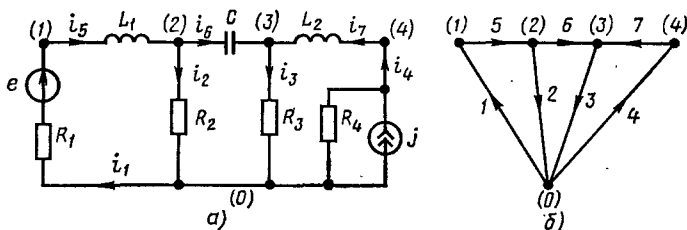


Рис. 7.3. К примеру 7.1

Используя табл. 7.1, запишем компонентные уравнения всех ветвей в форме  $Y$ :

$$\begin{aligned} i_1 &= 0 + (u_1 + e)/R_1; & i_5 &= i_5(0) + (u_5 - 0)/(sL_1); \\ i_2 &= 0 + (u_2 - 0)/R_2; & i_6 &= 0 + sC(u_6 - 0); \\ i_3 &= 0 + (u_3 - 0)/R_3; & i_7 &= i_7(0) + (u_7 - 0)/(sL_2). \\ & & i_4 &= j + (u_4 - 0)/R_4; \end{aligned}$$

Объединяя компонентные уравнения всех ветвей в одно, получаем матричное компонентное уравнение цепи в форме  $Y$ :

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ i_5(0) \\ 0 \\ i_7(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_2)^{-1} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (7.4), находим компонентные матрицы:

$$Y = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_2)^{-1} \end{bmatrix};$$

$$i_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ i_5(0) \\ 0 \\ i_7(0) \end{bmatrix}; \quad u_g = \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Записывая компонентные уравнения всех ветвей той же цепи в форме  $Z$  и приводя их к виду (7.3), получаем компонентные матрицы:

$$Z = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sL_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sC)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sL_2 \end{bmatrix}; \quad u_v = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_g(0) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad i_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом установлено, что зависимости между токами и напряжениями всех ветвей электрической цепи могут быть представлены в виде одного матричного компонентного уравнения в форме (7.3) или (7.4); причем вся информация о характере ветвей и параметрах входящих в них элементов заключается в компонентных матрицах  $Z$ ,  $u_v$ ,  $i_v$  или  $Y$ ,  $u_g$ ,  $i_g$  соответственно.

Алгоритмы формирования компонентных и топологических матриц цепи с помощью ЭВМ рассмотрены в [4, 5].

Необходимо отметить, что введенные компонентные и топологические матрицы цепи относятся к так называемым разреженным матрицам, содержащим большое число нулевых элементов. Хранение таких матриц в памяти ЭВМ в виде двумерных массивов неэкономично (значительная часть памяти будет занята хранением нулевых коэффициентов). Как правило, программы анализа цепей организуют таким образом, чтобы в памяти ЭВМ хранилась информация только о ненулевых элементах матриц. Данные о координатах и значениях ненулевых элементов компонентных и топологических матриц представляют в виде совокупности одномерных массивов, называемых с п и с к а м и. Дополнительно объем памяти ЭВМ можно сэкономить за счет того, что ненулевые элементы топологических матриц могут принимать значения только  $+1$  или  $-1$ .

В связи с тем что элементы компонентных и топологических матриц численно равны коэффициентам компонентных (7.3) или (7.4) и топологических (1.46), (1.52) уравнений, запись в память ЭВМ элементов этих матриц можно рассматривать как занесение в память ЭВМ коэффициентов основной системы уравнений электрического равновесия цепи, а формирование компонентных и топологических матриц равносильно, следовательно, формированию основной системы уравнений электрического равновесия цепи в матричной форме.

При использовании принятого в этой главе топологического описания основная система уравнений электрического равновесия цепи, содержащей  $p$  ветвей, включает в себя  $2p$  уравнений. Количество уравнений электрического равновесия может быть уменьшено за счет исключения из основной системы уравнений зависимых токов и напряжений с помощью методов узловых напряжений и контурных токов.

## Методы узловых напряжений и контурных токов

Известно, что метод узловых напряжений основан на том, что напряжения всех ветвей произвольной электрической цепи могут быть выражены через ее узловые напряжения. В матричной форме зависимость напряжений ветвей от узловых напряжений определяется соотношением, получившим название *узлового преобразования*:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}'\mathbf{u}_{10}. \quad (7.5)$$

Здесь  $\mathbf{A}'$  — транспонированная матрица узлов;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}_{10}$  — матрицы-столбцы мгновенных значений напряжений ветвей и узловых напряжений соответственно



**Пример 7.2.** Убедимся в справедливости соотношения (7.5) на примере цепи, схема которой приведена на рис. 7.3, а. Матрица узлов этой цепи, соответствующая ее графу, изображенному на рис. 7.3, б, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставляя транспонированную матрицу узлов

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

в выражение (7.5), получаем

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \\ u_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{10} \\ u_{20} \\ u_{30} \\ -u_{40} \\ u_{10} - u_{20} \\ u_{20} - u_{30} \\ -u_{30} - u_{40} \end{bmatrix}$$

Аналогичное соотношение может быть получено непосредственно из рассмотрения схемы цепи (рис. 7.3, а).

Для формирования системы узловых уравнений воспользуемся компонентным уравнением цепи в форме  $Y$ . Умножая матрицу узлов на каждое из слагаемых, входящих в выражение (7.4), получаем

$$\mathbf{A}i - \mathbf{A}i_g + \mathbf{A}Y\mathbf{u} - \mathbf{A}Y\mathbf{u}_g.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой матричную запись уравнения баланса токов (1.46), поэтому

$$\mathbf{A} \mathbf{i}_g + \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{u} - \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{u}_g = 0.$$

Выражая напряжения ветвей через узловые напряжения (7.5) и выполняя преобразования, получаем систему узловых уравнений цепи в матричной форме

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^t \mathbf{u}_{i0} = \mathbf{A} \{ \mathbf{Y} \mathbf{u}_g - \mathbf{i}_g \} \quad (7.6)$$

или

$$\mathbf{Y}_{(ij)} \mathbf{u}_{i0} = \mathbf{j}_{i0}. \quad (7.7)$$

Из выражений (7.6), (7.7) видно, что матрица узловых проводимостей исследуемой цепи и матрица-столбец узловых токов

$$\mathbf{Y}_{(ij)} = \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^t \quad \text{и} \quad \mathbf{j}_{i0} = \mathbf{A} \{ \mathbf{Y} \mathbf{u}_g - \mathbf{i}_g \} \quad (7.8)$$

могут быть получены с помощью простых алгебраических операций над матрицей узлов  $\mathbf{A}$  и компонентными матрицами  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{u}_g$ ,  $\mathbf{i}_g$ . Поскольку компонентные и топологические матрицы цепи содержат значительное количество нулевых элементов, при формировании матрицы узловых проводимостей  $\mathbf{Y}_{(ij)}$  и матрицы-столбца узловых токов  $\mathbf{j}_{i0}$  используют специальные алгоритмы, учитывающие разреженность матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{u}_g$ ,  $\mathbf{i}_g$  и исключающие тривиальные операции над нулевыми элементами. Можно убедиться, что система узловых уравнений цепи для мгновенных значений (7.7) и система узловых уравнений той же цепи для комплексных действующих значений (4.22) имеет одинаковую структуру и могут быть получены одна из другой с помощью таких же преобразований, которые необходимы для взаимного преобразования компонентных уравнений для мгновенных значений и компонентных уравнений для комплексных действующих значений.



**Пример 7.3.** Используя выражения (7.8), сформируем матрицу узловых проводимостей и матрицу-столбец узловых токов цепи, схема которой приведена на рис. 7.3, а.

Матрица узлов  $\mathbf{A}$  и компонентные матрицы цепи  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{u}_g$ ,  $\mathbf{i}_g$  были получены в примерах 7.1 и 7.2. Подставляя эти матрицы в (7.8), находим

$$\mathbf{Y}_{(ij)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_1)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_2)^{-1} \end{bmatrix} \times$$



$$\times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL_1}\right); & -\frac{1}{sL_1}; & 0; & 0; \\ -\frac{1}{sL_1}; & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL_1} + sC\right); & -sC; & 0; \\ 0; & -sC; & \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{sL_2} + sC\right); & -\frac{1}{sL_2} \\ 0; & 0; & -\frac{1}{sL_2}; & \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{sL_2}\right) \end{bmatrix};$$

$$i_{i0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_1)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (sL_2)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \\ i_5(0) \\ 0 \\ 0 \\ i_7(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e/R_1 \\ 0 \\ 0 \\ -j \\ -i_5(0) \\ 0 \\ 0 \\ -i_7(0) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e/R_1 - i_5(0) \\ i_5(0) \\ i_7(0) \\ j - i_7(0) \end{bmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что аналогичные выражения могут быть получены и с применением рассмотренного в гл. 4 алгоритма, используемого в ручных методах формирования уравнений электрического равновесия.

Сформировать уравнения электрического равновесия цепи с применением ЭВМ можно и методом контурных токов. Используя компонентное уравнение цепи в форме  $Z$  и учитывая, что токи всех ветвей цепи могут быть выражены через токи главных ветвей с помощью соотношения  $i = B^t i_{ii}$ , называемого контурным преобразованием, нетрудно прийти к системе контурных уравнений цепи в матричной форме

$$Z_{(ij)} i_{ii} = e_{ii}.$$

Здесь  $i_{ii}$  — матрица-столбец контурных токов;  $Z_{(ij)} = BZB^t$  — матрица контурных сопротивлений;  $e_{ii} = B \{Zi_v - u_v\}$  — матрица-столбец контурных э. д. с.,  $B$  и  $B^t$  — матрица главных контуров и транспонированная матрица главных контуров рассматриваемой цепи.

В связи с тем что компонентные матрицы  $Z$  и  $Y$  содержат в общем случае операторы дифференцирования  $s$  и интегрирования  $s^{-1}$ , узловые и контурные уравнения цепи для мгновенных значений наряду с производными содержат интегралы от неизвестных функций времени.

### Метод переменных состояния

Наличие интегралов в уравнениях электрического равновесия цепи, составленных методами узловых напряжений и контурных токов, значительно затрудняет решение этих уравнений и в течение длительного времени ограничивало возможность применения данных методов при машинном анализе цепей. Интегралы, входящие в уравнения электрического равновесия, могут быть устранены путем дифференцирования, однако при этом повышается порядок соответствующих уравнений, что также является нежелательным. Поэтому представляет интерес попытка составить уравнения электрического равновесия таким образом, чтобы они вообще не содержали интегралов. Интегралы в уравнениях электрического равновесия возникают только тогда, когда напряжение емкости выражают через ток

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt$$

или ток индуктивности через напряжение

$$i_L = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt.$$

Если в качестве независимых переменных выбрать не контурные токи или узловые напряжения, а напряжения емкостей и токи индуктивностей, то уравнения электрического равновесия цепи не будут

содержать интегралов от неизвестных функций времени. Такие уравнения называются уравнениями состояния цепи, а независимые переменные (токи индуктивностей и напряжения емкостей) — переменными состояния. Такое название отражает тот факт, что именно токи индуктивностей и напряжения емкостей определяют запасы энергии в реактивных элементах и, следовательно, характеризуют энергетическое состояние цепи.

Рассмотрим методику формирования уравнений состояния на примере простейшей последовательной  $RLC$ -цепи (см. рис. 2.20, а), основная система уравнений электрического равновесия которой имеет вид

$$\begin{aligned} u_R + u_L + u_C &= e; & i_C &= C \frac{du_C}{dt}; \\ i_R = i_L = i_C &= i_e; & u_L &= L \frac{di_L}{dt}. \\ u_R &= Ri_R; \end{aligned} \quad (7.9)$$

Выбирая в качестве независимых переменных (переменных состояния) напряжение емкости и ток индуктивности, выразим остальные переменные, входящие в эти уравнения, через  $u_C$  и  $i_L$ :

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} + u_C = e; \quad i_L = C \frac{du_C}{dt}. \quad (7.10)$$

Получена система уравнений электрического равновесия, в которых в качестве неизвестных фигурируют напряжение емкости и ток индуктивности. Разрешим уравнения (7.10) относительно производных:  $di_L/dt = -Ri_L/L - u_C/L + e/L$ ;  $du_C/dt = i_L/C$  и представим полученную систему уравнений в матричной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

или

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{a}\mathbf{X} + \mathbf{d}\mathbf{u}_s. \quad (7.11)$$

Здесь  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$  — вектор переменных состояния;  $\mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$  — вектор внешних воздействий;  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -R/L; -1/L \\ 1/C; 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1/L; 0 \\ 0; 0 \end{bmatrix}$  — матрицы, элементы которых определяются параметрами пассивных элементов цепи.

Выражение (7.11) является стандартной формой записи уравнений состояния цепи, не содержащей независимых источников энергии. Очевидно, что число независимых уравнений, составляемых по методу переменных состояния, будет равно числу независимо включенных реактивных элементов, т. е. порядку сложности цепи. Если исследуемая цепь содержит топологические вырождения, к которым относятся емкостные контуры и индуктивные сечения, то система уравнений электрического равновесия цепи наряду с дифференциальными уравнениями (7.11) будет содержать алгебраические уравнения, составленные на основании второго или первого законов Кирхгофа и отражающие связь между напряжениями емкостей или токами индуктивностей, входящих в соответствующие контуры или сечения.

Матрицы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$ , входящие в состав уравнений состояния цепи, могут быть выражены через компонентные и топологические матрицы рассматриваемой цепи [4, 5, 8].

### § 7.3. ВЫБОР МЕТОДОВ ФОРМИРОВАНИЯ И РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕПИ

#### Численные методы решения уравнений электрического равновесия

При решении отдельных частных задач теории цепей, таких, как исследование цепей нулевого порядка или анализ установившегося режима постоянного тока в линейных или нелинейных цепях, процессы в электрической цепи можно описывать системой линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Уравнения же электрического равновесия произвольной идеализированной цепи с сосредоточенными параметрами представляют собой систему интегро-дифференциальных уравнений. Интегрирование таких уравнений в современных программах анализа цепей осуществляется, как правило, численными методами, основанными на замене рассматриваемого непрерывного интервала времени последовательностью точек  $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$  на временной оси. Искомая реакция цепи  $y = y(t)$  в этом случае приближенно представляется множеством дискретных значений  $y_0 = y(t_0), y_1 = y(t_1), \dots, y_n = y(t_n), \dots$  определяемых в результате последовательного выполнения ряда шагов интегрирования.

Известные методы численного интегрирования принято разделять на явные и неявные. При использовании явных методов для получения  $y_n$  (решения системы уравнений на  $n$  шаге интегрирования) используют результаты, полученные на  $m$  предыдущих шагах:

$$y_n = F(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}). \quad (7.12)$$

В неявных методах для получения решения  $y_n$  на каждом шаге интегрирования необходимо решать уравнение

$$F(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}) = 0, \quad (7.13)$$

которое в общем случае является нелинейным относительно  $y_n$ . Уравнение (7.13) решают с помощью различных методов последовательного приближения, причем для определения значения  $y_n$  на каждом шаге интегрирования требуется выполнить несколько последовательных приближений (и т е р а ц и й).

Очевидно, что по сравнению с явными методами, реализация одного шага интегрирования с использованием неявных методов требует большего объема вычислений, а следовательно, и больших затрат ресурсов ЭВМ (памяти и машинного времени). Поэтому практическое применение неявных методов стало возможным только в последние годы, в результате разработки мощных ЭВМ третьего и четвертого поколений, обладающих высоким быстродействием и значительным объемом памяти. В большинстве программ машинного анализа, разработанных до недавнего времени, использовались явные методы интегрирования, что объясняется относительной простотой табулирования функции (7.12) на каждом шаге интегрирования. В то же время при использовании явных методов уравнения электрического равновесия должны быть представлены в ф о р м е К о ш и, т. е. разрешены относительно производных от искомой реакции цепи  $dy/dt = f(y, t)$ .

Из всех рассмотренных методов только метод переменных состояния позволяет получить систему уравнений электрического равновесия цепи в форме Коши, причем процесс машинного формирования уравнений электрического равновесия этим методом более трудоемок по сравнению с методами узловых напряжений или контурных токов.

Явные методы интегрирования весьма чувствительны к выбору шага интегрирования  $h = t_n - t_{n-1}$ .

Если  $h > h_{кр}$ , где  $h_{кр}$  — некоторое критическое значение, приближенно равное наименьшей из постоянных времени рассматриваемой цепи, то возникает явление ч и с л о в о й н е у с т о й ч и в о с т и, проявляющееся в возрастании погрешности вычисления, что в конечном счете может привести к переполнению разрядной сетки ЭВМ.

Необходимость интегрирования с весьма малым шагом значительно увеличивает трудоемкость анализа и является существенным ограничением для применения явных методов к анализу цепей большой сложности.

Неявные методы интегрирования не требуют представления исходных уравнений обязательно в форме Коши и менее чувствительны к выбору шага интегрирования. Поэтому, несмотря на высокую трудоемкость определения решения на каждом шаге интегрирования, суммарные затраты машинного времени при использовании неявных методов могут оказаться значительно меньше, чем при использовании явных методов. Вследствие этого в большинстве программ автоматизированного анализа цепей, разрабатываемых в настоящее время и ориентированных на применение современных ЭВМ, используются неявные методы интегрирования.

## Выбор методов формирования уравнений электрического равновесия в программах машинного анализа цепей

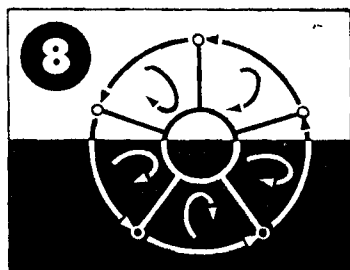
Как правило, каждая программа машинного анализа цепей бывает ориентирована на использование определенного метода формирования системы уравнений электрического равновесия, поэтому необходимость выбора метода формирования системы уравнений возникает только при разработке новых алгоритмов и программ анализа. В течение длительного времени для формирования уравнений электрического равновесия использовался преимущественно метод переменных состояния. Основной положительной особенностью этого метода является формирование уравнений электрического равновесия цепи непосредственно в форме Коши, что допускает применение явных методов интегрирования. Кроме того, выбор в качестве независимых переменных токов индуктивностей и напряжений емкостей значительно облегчает определение вектора начальных условий цепи, необходимого для интегрирования системы уравнений (7.11).

К недостаткам метода переменных состояния относится значительная сложность формирования системы уравнений электрического равновесия, особенно при наличии в цепи топологических вырождений. Для устранения топологических вырождений в эквивалентную схему исследуемой цепи вводятся дополнительные малые сопротивления, а это приводит к возникновению малых постоянных времени. Недостатки метода переменных состояния дополняются отмеченными ранее недостатками явных методов интегрирования.

В связи с разработкой вычислительных машин с большим объемом памяти и высоким быстродействием создались условия для широкого применения неявных методов интегрирования. Это привело к тому, что в последнее время резко увеличился интерес к использованию метода узловых напряжений. Как отмечалось ранее, процесс составления уравнений электрического равновесия цепи по методу узловых напряжений легко поддается автоматизации, причем при составлении уравнений отпадает проблема топологических вырождений.

Метод контурных токов не обладает какими-либо преимуществами по сравнению с методом узловых напряжений, однако процесс формирования уравнений электрического равновесия с помощью этого метода несколько сложнее вследствие необходимости выбора дерева графа исследуемой цепи и связанной с деревом системы независимых контуров. Указанные обстоятельства привели к тому, что большинство отечественных и зарубежных программ анализа цепей, разработанных в последние годы, основаны на использовании метода узловых напряжений и его различных модификаций. Подробные сведения об отечественных и зарубежных программах машинного анализа цепей можно найти в работах [4, 5, 8—13].

# Основы теории четырёхполюсников и многополюсников



## § 8.1. МНОГОПОЛЮСНИКИ И ЦЕПИ С МНОГОПОЛЮСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

### Задача анализа цепей с многополюсными элементами

Известно два подхода к анализу цепей, содержащих многополюсные элементы (лампы, транзисторы, трансформаторы и др.). П е р в ы й — заключается в замене всех входящих в цепь элементов (в том числе и многополюсных) моделирующими цепями, составленными только из идеализированных двухполюсников, с последующим исследованием процессов в полученной идеализированной цепи с помощью рассмотренных ранее методов. Основной недостаток такого подхода заключается в том, что число неизвестных токов и напряжений моделирующей цепи может значительно превышать число интересующих реакций цепи — токов и напряжений на зажимах реальных элементов.

В т о р о й подход заключается в представлении многополюсных элементов в виде многополюсников. (Аналогичным образом можно представлять не только отдельные многополюсные элементы, но и любые участки цепи, имеющие несколько выводов, с помощью которых они соединяются с остальной частью цепи.) Уравнения электрического равновесия идеализированных цепей, содержащих многополюсники, могут быть сформированы на основании соотношений, связывающих токи и напряжения на зажимах многополюсников, причем, как будет показано, число этих соотношений определяется только числом внешних выводов многополюсника и не зависит от его внутренней структуры. Очевидно, что такой подход дает возможность устранить из рассмотрения участки идеализированной электрической цепи, токи и напряжения которых не представляют интереса в рамках решаемой задачи, и, следовательно, существенно уменьшить число одновременно решаемых уравнений электрического равновесия. Для реализации такого подхода необходимо разработать методику получения соотношений, связывающих между собой токи и напряжения на зажимах многополюсников, и методику формирования уравнений электрического равновесия идеализированных цепей на основе этих соотношений. Решение указанных задач составляет основное содержание общей те-

ории многополюсников, развитой главным образом в работах советских специалистов Ю. Т. Величко, Э. В. Зеляха, Г. Е. Пухова, В. П. Сигорского и В. И. Коваленкова. Рассматриваемые далее положения общей теории многополюсников в основном содержат результаты, полученные в работах Э. В. Зеляха и В. П. Сигорского.

### Классификация и схемы включения многополюсников

Напомним, что многополюсником называется участок идеализированной электрической цепи, соединяющийся с остальной частью цепи с помощью нескольких внешних выводов (полюсов). Будем считать, что схема многополюсника и параметры входящих в него элементов известны, хотя это в общем случае не является обязательным. Более того, теория многополюсников позволяет получать эквивалентные схемы устройств, внутренняя структура которых неизвестна. О таких устройствах обычно говорят, что они представляются в виде «черного ящика». Ограничимся рассмотрением только линейных многополюсников, т. е. многополюсников, в состав которых не входят идеализированные нелинейные пассивные и активные элементы.

В соответствии с рассмотренной ранее классификацией цепей многополюсники делятся на активные и пассивные. П а с с и в н ы е м н о г о п о л ю с н и к и не содержат идеализированных активных элементов, а к т и в н ы е м н о г о п о л ю с н и к и содержат управляемые или неуправляемые идеализированные источники энергии. Установить, есть ли в рассматриваемом многополюснике нескомпенсированные независимые источники тока или напряжения, можно путем измерений, производимых на внешних выводах многополюсника.

Если все выводы многополюсника, содержащего неуправляемые источники энергии, соединены между собой (закорочены), то токи хотя бы части выводов будут отличны от нуля. Если все внешние выводы этого многополюсника находятся в режиме холостого хода, то напряжения хотя бы между некоторыми парами полюсов не будут равны нулю. Многополюсники, удовлетворяющие таким условиям, называются а в т о н о м н ы м и. Если в состав многополюсника входят только идеализированные пассивные элементы или идеализированные пассивные элементы и управляемые источники энергии, то токи короткого замыкания всех выводов многополюсника и напряжения холостого хода между его любыми полюсами равны нулю. Многополюсники такого типа называются н е а в т о н о м н ы м и. Таким образом, *к неавтономным многополюсникам относятся все пассивные многополюсники, а также те активные многополюсники, которые не содержат неуправляемых источников тока или напряжения.*

Неавтономные многополюсники занимают особо важное место в теории цепей, так как большинство реальных многополюсных элементов, в частности электронные лампы и транзисторы, при анализе цепей могут быть представлены как неавтономные многополюсники.

В зависимости от того, обладает или не обладает взаимностью (обратимостью) рассматриваемый многополюсник, различают в з а и м н ы е и н е в з а и м н ы е многополюсники. В соответствии с



доказанной ранее теоремой (§ 4.2) любые линейные многополюсники, составленные только из идеализированных пассивных элементов, являются взаимными. Многополюсники, содержащие идеализированные управляемые источники, как правило, являются невзаимными.

Трудоемкость анализа цепей, содержащих многополюсники, также как и трудоемкость анализа цепей, составленных только из идеализированных двухполюсных элементов, в значительной степени зависит от выбора системы независимых токов или напряжений. При описании процессов, протекающих в цепях с многополюсными элементами, в систему уравнений электрического равновесия включают только токи или напряжения, которые можно измерить на полюсах многополюсников, т. е. связанные с их внешними выводами.

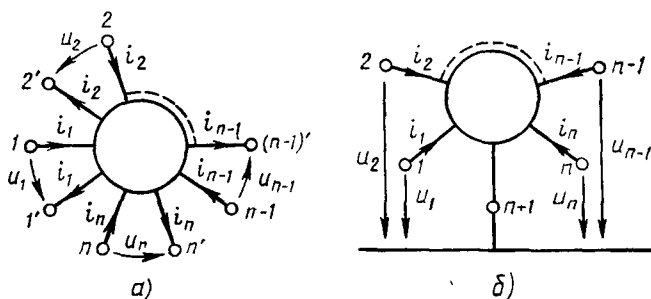


Рис. 8.1.  $2 \times n$ - (а) и  $n+1$ -полюсники (б)

Систему независимых токов и напряжений многополюсника можно выбрать различными способами в зависимости от схемы включения многополюсника, т. е. от того, каким образом он соединен с остальной частью цепи. Одна из возможных схем включения многополюсника была рассмотрена в гл. 3, когда все внешние выводы были разбиты на пары, образующие стороны (порты) многополюсника. Многополюсник, полюсы которого разбиты на пары, образующие  $n$  сторон, обычно называют  $n$ -с т о р о н н и м или  $2 \times n$ -п о л ю с н и к о м (рис. 8.1, а). Внутри многополюсника отдельные полюсы могут быть соединены между собой так, что они являются общими для различных сторон многополюсника. Например, в многополюснике, схема которого приведена на рис. 3.19, а, соединены между собой полюсы  $1'$  и  $3'$ , а также полюсы  $1$  и  $2$ . Многополюсник, у которого один из полюсов является общим для всех  $n$  сторон, называется  $n+1$ -п о л ю с н и к о м (рис. 8.1, б). Заметим, что представление многополюсника в виде  $2 \times n$ - или  $n+1$ -полюсников не связано с его внутренней структурой, а определяется только способом соединения многополюсника с остальной частью цепи. Лисбой многополюсник может быть включен и как  $2 \times n$ -, и как  $n+1$ -полюсник (рис. 8.2).

Представление многополюсника в виде  $2 \times n$ -полюсника обычно используют, если выводы многополюсника могут образовывать стороны только единственным образом. Если стороны могут быть образованы различными способами, то представление многополюсника в

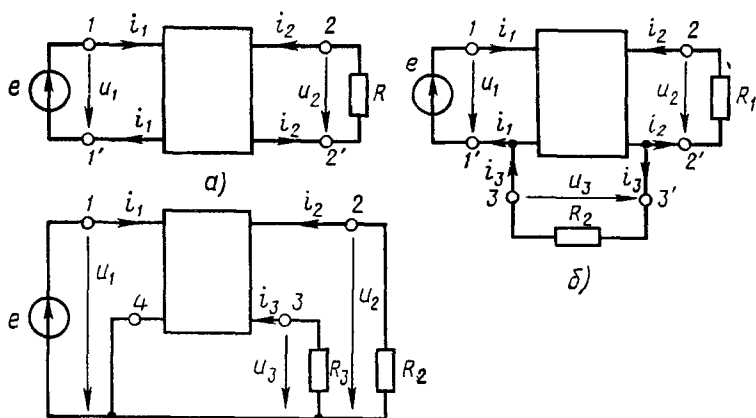


Рис. 8.2. Включение четырехполюсника в качестве  $2 \times 2$ - (а),  $2 \times 3$ - (б) и  $3+1$ -полюсника (в)

виде  $2 \times n$ -полюсника не удобно, так как не позволяет простым способом переходить от системы уравнений, соответствующих одному сочетанию пар полюсов, к уравнениям, соответствующим другому сочетанию. Представление многополюсника в виде  $n + 1$ -полюсника также не универсально, поскольку один из его полюсов поставлен в неравноправное положение по отношению к другим.

Очевидно, что наиболее общий характер носит такая система задания напряжений и токов многополюсника, при которой все его выводы равноправны по отношению к образованию внешних соединений. Этому условию удовлетворяют два способа задания токов и напряжений (рис. 8.3). В первом (рис. 8.3, а) напряжения всех полюсов многополюсника отсчитываются относительно некоторого базисного узла, находящегося вне многополюсника, а токи всех выводов считаются направленными внутрь многополюсника. Такой выбор токов и напряжений удобен при формировании уравнений электрического рав-

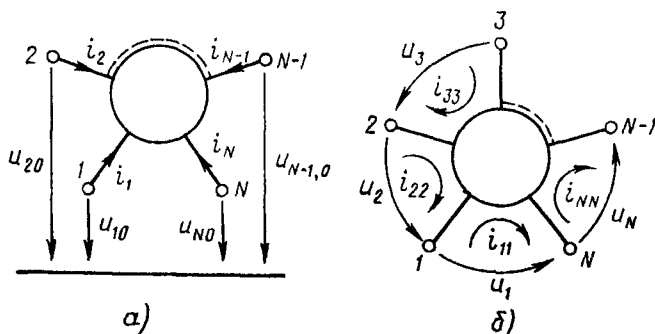


Рис. 8.3. Обобщенные (неопределенные) схемы включения многополюсника

повесия цепи по методу узловых напряжений, поскольку токи и напряжения выводов многополюсника могут быть отождествлены с узловыми токами и узловыми напряжениями тех узлов цепи, к которым подключены соответствующие выводы многополюсника. Второй способ задания токов и напряжений многополюсника (рис. 8.3, б) удобен при использовании метода контурных токов. Процессы в многополюснике характеризуются в этом случае напряжениями между выводами многополюсника и токами контуров, образованных сторонами многополюсника и остальной частью цепи. Рассмотренные схемы включения многополюсников будем называть **о б о б щ е н н ы м и** ( н е о п р е д е л е н н ы м и ).

Анализируя обобщенные схемы, нетрудно установить, что напряжения полюсов многополюсника относительно базисного ( $u_{10}, u_{20}, \dots, \dots, u_{N0}$ ) не связаны между собой какими-либо соотношениями и могут задаваться независимо. В то же время из второго закона Кирхгофа следует, что напряжения между выводами многополюсника  $u_1, u_2, \dots, u_N$  выражаются через напряжения полюсов относительно базисного с помощью соотношений

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10} - u_{N0}, \\ u_2 &= u_{20} - u_{10}; \\ &\dots\dots\dots \\ u_N &= u_{N0} - u_{N-1,0}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Из этих выражений следует, что напряжения между полюсами многополюсника не изменятся, если все напряжения полюсов относительно базисного будут изменены на одно и то же значение, следовательно, напряжения между полюсами не зависят от выбора базисного узла. Суммируя уравнения (8.1), получим, что напряжения между выводами многополюсника связаны соотношением

$$u_1 + u_2 + \dots + u_N = 0. \tag{8.2}$$

Таким образом, только  $N - 1$  напряжений между выводами многополюсника могут быть заданы независимо.

Аналогично можно установить, что токи выводов многополюсника  $i_1, i_2, \dots, i_N$  не зависят от абсолютных значений контурных токов  $i_{11}, i_{22}, \dots, i_{NN}$ , а определяются только их разностью:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{11} - i_{22}, \\ i_2 &= i_{22} - i_{33}, \\ &\dots\dots\dots \\ i_N &= i_{NN} - i_{11}, \end{aligned}$$

**и что токи всех выводов связаны соотношением**

$$i_1 + i_2 + \dots + i_N = 0. \tag{8.3}$$

Таким образом, несмотря на то, что все  $N$  контурных токов  $i_{11}$ ,  $i_{22}$ , ...,  $i_{NN}$  являются независимыми, только  $N - 1$  токов внешних выводов многополюсника могут быть заданы независимо.

В общем случае каждая пара внешних выводов многополюсника может рассматриваться как его сторона (вход или выход), следовательно, для многополюсника, имеющего  $N$  внешних выводов, можно выделить  $C_N^2 = N(N - 1)/2$  сторон (число сочетаний из  $N$  по 2). Стороны многополюсника, напряжения (токи) которых могут быть заданы независимо от напряжений (токов) других сторон, называются независимыми. Из соотношений (8.2), (8.3) следует, что у многополюсника, имеющего  $N$  внешних выводов, можно выделить не более  $N - 1$  независимых сторон. В частности, четырехполюсник имеет не более трех независимых сторон (см. рис. 8.2).

### Основные уравнения и первичные параметры линейных неавтономных многополюсников

Основными уравнениями многополюсника называются соотношения, определяющие связь между токами и напряжениями на его внешних выводах. Коэффициенты, входящие в основные уравнения, называются первичными параметрами многополюсника. В зависимости от схемы включения и того, какие величины выбраны в качестве независимых, а какие — в качестве зависимых переменных, каждому многополюснику можно поставить в соответствие различные системы основных уравнений и соответственно различные системы первичных параметров. Если определитель системы основных уравнений многополюсника не равен нулю, то такая система уравнений называется определенной, в противном случае система основных уравнений является неопределенной. Матрица коэффициентов системы основных уравнений, определитель которой равен нулю, называется особенной, или неопределенной, матрицей первичных параметров многополюсника.

Несмотря на то что число независимых основных уравнений многополюсника равно числу его независимых сторон  $N - 1$ , для описания многополюсников широко используют неопределенные системы основных уравнений, соответствующие обобщенным (неопределенным) схемам включения многополюсников (рис. 8.3), число уравнений в которых равно числу внешних выводов многополюсника  $N$ . Это позволяет применять достаточно простые методы формирования уравнений электрического равновесия цепей с многополюсными элементами. В то же время, зная неопределенные матрицы первичных параметров многополюсника, легко получать определенные матрицы в любой схеме включения.

Рассмотрим линейный неавтономный многополюсник, находящийся под гармоническим внешним воздействием. Пусть напряжения всех выводов многополюсника относительно базисного задаются с помощью независимых источников напряжения (рис. 8.4, а). В соответствии с принципом наложения ток каждого вывода равен сумме частичных



Заменяя в уравнениях (8.4) э. д. с. источников соответствующими напряжениями и используя матричную форму записи, получаем

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1N} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{N1} & \underline{Y}_{N2} & \dots & \underline{Y}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dots \\ \dot{U}_{N0} \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

Уравнения (8.7) будем называть основными уравнениями многополюсника в форме  $\underline{Y}$ . Квадратная матрица

$$\underline{Y}_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1N} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{N1} & \underline{Y}_{N2} & \dots & \underline{Y}_{NN} \end{bmatrix}$$

в правой части уравнений (8.7), называется неопределенной матрицей проводимостей или неопределенной матрицей  $Y$ -параметров многополюсника. Ее можно рассматривать как обобщенный параметр многополюсника, устанавливающий связь между вектором токов выводов многополюсника и вектором напряжений этих выводов относительно некоторого базисного узла. Элементы матрицы  $\underline{Y}_{ij}$  определяются в соответствии с их физическим смыслом по результатам опытов короткого замыкания, которые могут проводиться как экспериментальным, так и расчетным путем.



**Пример 8.1.** Найдем неопределенную матрицу  $Y$ -параметров полевого транзистора, схема замещения которого по переменному току в режиме малого сигнала изображена на рис. 1.19, б.

Присвоим выводу затвора полевого транзистора номер 1, стока — 2, истока — 3, и составим комплексную схему замещения (рис. 8.5, а), на которой элементы, входящие в эквивалентную схему для мгновенных значений, представлены их комплексными проводимостями:  $\underline{Y}_1 = j\omega C_{зи}$ ,  $\underline{Y}_2 = j\omega C_{зс}$ ,  $\underline{Y}_3 = G_i + j\omega C_{си}$ .

Основная система уравнений рассматриваемого многополюсника в форме  $Y$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix}$$

содержит девять неизвестных коэффициентов ( $Y$ -параметров полевого транзистора). Для их нахождения рассчитаем токи транзистора в режимах короткого замыкания на различных парах выводов.

Схема опыта короткого замыкания для определения параметров  $\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{Y}_{21}$ ,  $\underline{Y}_{31}$ , входящих в первый столбец неопределенной матрицы проводимостей, приведена на рис. 8.5, б. Используя эту схему, найдем частичные токи первого, второ-

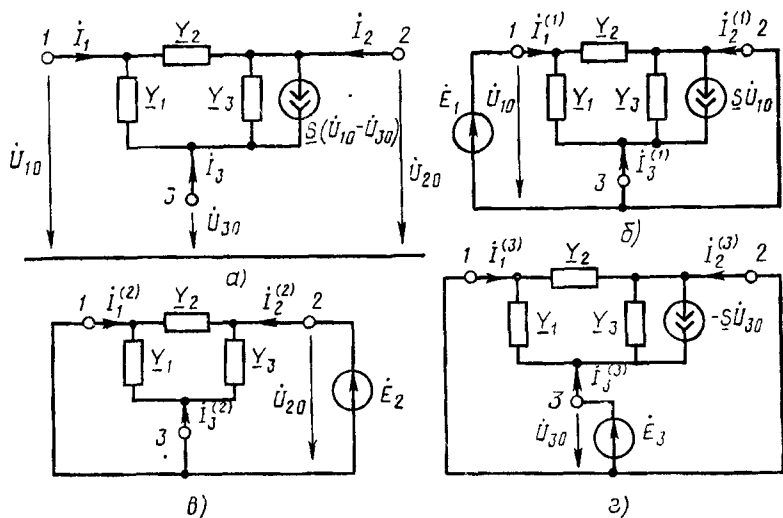


Рис. 8.5. К примеру 8.1

его и третьего выводов транзистора, вызванные действием неуправляемого источника напряжения  $\dot{E}_1 = \dot{U}_{10}$ , включенного между выводом 1 и соединенными вместе остальными выводами транзистора:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1^{(1)} &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \dot{U}_{10} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) \dot{E}_1; \\ \dot{I}_2^{(1)} &= \underline{S} \dot{U}_{10} - \underline{Y}_2 \dot{U}_{10} = (\underline{S} - \underline{Y}_2) \dot{E}_1; \\ \dot{I}_3^{(1)} &= -(\underline{S} + \underline{Y}_1) \dot{U}_{10} = -(\underline{S} + \underline{Y}_1) \dot{E}_1. \end{aligned}$$

Отношения этих частичных токов к э. д. с. вызвавшего их источника напряжения в соответствии с (8.5 и 8.6) являются  $Y$ -параметрами полевого транзистора:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \dot{I}_1^{(1)} / \dot{E}_1 = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2, \\ \underline{Y}_{21} &= \dot{I}_2^{(1)} / \dot{E}_1 = \underline{S} - \underline{Y}_2; \\ \underline{Y}_{31} &= \dot{I}_3^{(1)} / \dot{E}_1 = -(\underline{S} + \underline{Y}_1). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, используя схемы опытов короткого замыкания, приведенные на рис. 8.5, в, г, определим  $Y$ -параметры полевого транзистора, входящие во второй и третий столбцы неопределенной матрицы проводимостей:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{12} &= \dot{I}_1^{(2)} / \dot{E}_2 = -\underline{Y}_2; & \underline{Y}_{13} &= \dot{I}_1^{(3)} / \dot{E}_3 = -\underline{Y}_1; \\ \underline{Y}_{22} &= \dot{I}_2^{(2)} / \dot{E}_2 = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3; & \underline{Y}_{23} &= \dot{I}_2^{(3)} / \dot{E}_3 = -(\underline{Y}_3 + \underline{S}); \\ \underline{Y}_{32} &= \dot{I}_3^{(2)} / \dot{E}_2 = -\underline{Y}_3; & \underline{Y}_{33} &= \dot{I}_3^{(3)} / \dot{E}_3 = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{S}. \end{aligned}$$

Таким образом, неопределенная матрица  $Y$ -параметров полевого транзистора имеет вид

$$\underline{Y}_{ij} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 & -\underline{Y}_1 \\ \underline{S} - \underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 & -(\underline{Y}_3 + \underline{S}) \\ -(\underline{S} + \underline{Y}_1) & -\underline{Y}_3 & \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{S} \end{bmatrix}.$$







## Квадратная матрица

$$\underline{Z}_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \dots & \underline{Z}_{1N} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \dots & \underline{Z}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Z}_{N1} & \underline{Z}_{N2} & \dots & \underline{Z}_{NN} \end{bmatrix},$$

стоящая в правой части уравнений (8.14), называется неопределенной матрицей сопротивлений, или неопределенной матрицей  $Z$ -параметров, многополюсника\*.

Неопределенную матрицу сопротивлений  $\underline{Z}_{ij}$  можно рассматривать как обобщенный параметр многополюсника, устанавливающий связь напряжений между выводами многополюсника с контурными токами внешних по отношению к нему контуров. Элементы неопределенной матрицы сопротивлений определяются в соответствии с их физическим смыслом по результатам опытов холостого хода, причем сумма элементов каждого столбца и сумма элементов каждой строки матрицы  $\underline{Z}_{ij}$  равны нулю.



**Пример 8.2.** Найдем неопределенную матрицу сопротивлений биполярного транзистора, низкочастотная схема замещения которого по переменному току в режиме малого сигнала приведена на рис. 1.19, а.

Присвоим выводам эмиттера, коллектора и базы соответственно номера 1, 2, 3 и построим комплексную схему замещения транзистора, на которой укажем положительные направления напряжений между выводами и положительные направления контурных токов внешних по отношению к транзистору контуров (рис. 8.7, а). Основная система уравнений рассматриваемого многополюсника в форме  $Z$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \\ \dot{I}_{33} \end{bmatrix}$$

содержит девять неизвестных коэффициентов —  $Z$ -параметров транзистора, для определения которых необходимо произвести три опыта холостого хода. Схемы опытов холостого хода, позволяющих найти частичные напряжения между выводами транзистора, вызванные действием каждого из источников тока  $\dot{J}_1 = \dot{I}_{11}$ ,  $\dot{J}_2 = \dot{I}_{22}$  и  $\dot{J}_3 = \dot{I}_{33}$  в отдельности, приведены на рис. 8.7, б, в, г соответственно. Отношения частичных напряжений к токам вызвавшим их источников тока согласно (8.12), (8.13) представляют собой искомые параметры:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \dot{U}_1^{(1)} / \dot{J}_1 = R_9 + R_6; & \underline{Z}_{21} &= \dot{U}_2^{(1)} / \dot{J}_1 = R_m - R_9; \\ \underline{Z}_{12} &= \dot{U}_1^{(2)} / \dot{J}_2 = -R_9; & \underline{Z}_{22} &= \dot{U}_2^{(2)} / \dot{J}_2 = R_k + R_9 - R_m; \\ \underline{Z}_{13} &= \dot{U}_1^{(3)} / \dot{J}_3 = -R_6; & \underline{Z}_{23} &= \dot{U}_2^{(3)} / \dot{J}_3 = -R_k; \\ \underline{Z}_{31} &= \dot{U}_3^{(1)} / \dot{J}_1 = -(R_m + R_6); \\ \underline{Z}_{32} &= \dot{U}_3^{(2)} / \dot{J}_2 = R_m - R_k; \\ \underline{Z}_{33} &= \dot{U}_3^{(3)} / \dot{J}_3 = R_6 + R_H. \end{aligned}$$

\*) Неопределенные матрицы сопротивлений и проводимостей многополюсника  $\underline{Z}_{ij}$  и  $\underline{Y}_{ij}$  не следует путать с матрицами контурных сопротивлений  $\underline{Z}_{(ij)}$  и узловых проводимостей  $\underline{Y}_{(ij)}$ .

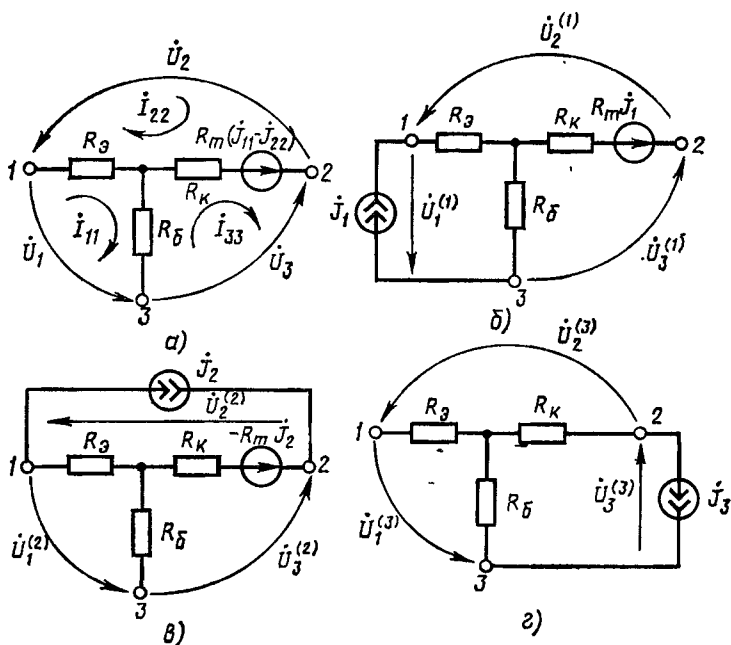


Рис. 8.7. К примеру 8.2

Можно убедиться, что сумма элементов любой строки, как и сумма элементов любого столбца неопределенной матрицы сопротивлений биполярного транзистора

$$\underline{Z}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} R_э + R_б & -R_э & -R_б \\ R_м - R_э & R_к + R_э - R_м & -R_к \\ -(R_м + R_б) & R_м - R_к & R_б + R_к \end{bmatrix} \end{matrix},$$

равна нулю.

При построении основных уравнений многополюсника в формах  $Y$  или  $Z$  в качестве независимых переменных выбирались либо только напряжения, либо только токи, связанные с внешними выводами. В каждом из этих случаев коэффициенты основной системы уравнений имели одинаковую размерность и определялись в одном и том же режиме (короткого замыкания или холостого хода). Системы первичных параметров многополюсника, в которых все параметры имеют одинаковую размерность и определяются в одинаковом режиме, называются однородными.

Если в качестве независимых переменных выбрать токи одних, а напряжения других сторон многополюсника, то коэффициенты полученной системы уравнений будут иметь различную размерность и определяться в различных режимах, причем часть недиагональных элементов соответствующей матрицы параметров может оказать-

ся безразмерной. Если на некоторых сторонах многополюсника и ток и напряжения выбраны в качестве независимых переменных, то безразмерными могут быть и некоторые диагональные элементы. Системы первичных параметров многополюсника, в которые входят параметры, имеющие различную размерность, и которые определяются в различных режимах, называются смешанными (гибридными).

### Основные свойства неопределенных матриц проводимостей и сопротивлений линейных неавтономных многополюсников

Первичные параметры многополюсника при любом выборе системы независимых токов и напряжений имеют физический смысл комплексных частотных характеристик многополюсника в режимах короткого замыкания или холостого хода. Как и любые комплексные частотные характеристики линейных цепей, первичные параметры линейного неавтономного многополюсника не зависят от амплитуд и начальных фаз токов и напряжений, действующих на зажимах многополюсника, а определяются только его внутренней структурой, параметрами входящих в него элементов и частотой внешнего воздействия. При произвольном внешнем воздействии основные уравнения многополюсника сохраняют такую же структуру, как и при гармоническом воздействии, причем его токи и напряжения представляются операторными изображениями, а в выражениях для первичных параметров  $j\omega$  заменяется на  $p$ . Таким образом, *первичные параметры линейного неавтономного многополюсника в общем случае являются функциями комплексной частоты  $p$ .*

В связи с тем что сумма элементов каждой строки и сумма элементов каждого столбца неопределенных матриц сопротивлений и проводимостей равны нулю, столбцы и строки этих матриц линейно зависимы. Следовательно, определители матриц  $\underline{Z}_{ij}$  и  $\underline{Y}_{ij}$  равны нулю и системы уравнений (8.7) и (8.14) не могут быть разрешены относительно напряжений полюсов  $\dot{U}_{j_0}$  или токов внешних контуров  $\dot{I}_{j_j}$  соответственно.

Анализируя структуру основных уравнений многополюсника, нетрудно установить, что  $k$ -му полюсу многополюсника соответствует  $k$ -я строка и  $k$ -й столбец неопределенной матрицы проводимостей, а  $k$ -й стороне многополюсника ( $k$ -му контуру, образованному одной из сторон многополюсника и остальной частью цепи) —  $k$ -я строка и  $k$ -й столбец неопределенной матрицы сопротивлений. *Изменение нумерации полюсов или сторон многополюсника не вызывает изменения элементов неопределенных матриц, а приводит только к перестановке соответствующих строк и соответствующих столбцов.* Так, при взаимной замене номеров двух каких-либо полюсов многополюсника необходимо поменять местами строки и поменять местами столбцы матрицы  $\underline{Y}_{ij}$ , имеющие соответствующие номера. Аналогично при взаимной замене номеров двух каких-либо сторон необходимо произвести перестановки соответствующих строк и соответствующих столбцов матрицы  $\underline{Z}_{ij}$ .

Пример 8.3. Найдем неопределенную матрицу проводимостей полевого транзистора, рассмотренного в примере 8.1 в случае, когда выводам затвора, стока и истока присвоены соответственно номера 2, 3 и 1 (напомним, что в примере 8.1 этим выводам были присвоены номера 1, 2 и 3).

Неопределенная матрица проводимостей, соответствующая такой нумерации выводов, может быть получена способом, приведенным в примере 8.1, однако этот способ весьма трудоемок.

В то же время для решения задачи достаточно в матрице проводимостей, полученной в примере 8.1, переставить первый столбец на место второго, второй столбец — на место третьего, третий столбец — на место первого, первую строку следует перенести на место второй, вторую строку — на место третьей, а третью — на место первой, причем последовательность выполнения перестановок не имеет значения. В результате получим:

$$\underline{Y}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{S} & -(\underline{S} + \underline{Y}_1) & -\underline{Y}_3 \\ -\underline{Y}_1 & \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 \\ -(\underline{Y}_3 + \underline{S}) & \underline{S} - \underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

С помощью неопределенных матриц сопротивлений и проводимостей линейного неавтономного многополюсника можно получить матрицы первичных параметров, соответствующие различным схемам включения этого многополюсника.

Пусть какой-либо вывод многополюсника, например с номером  $N$ , соединен с базисным узлом (выбран в качестве общего или базисного узла). Тогда напряжение  $N$ -го вывода относительно базисного  $\dot{U}_{N0}$  равно нулю и, следовательно, равны нулю частичные токи всех выводов  $I_1^{(N)}$ ,  $I_2^{(N)}$ , ...,  $I_N^{(N)}$ , вызванные действием источника  $\dot{E}_N = \dot{U}_{N0}$ . Исключая из системы уравнений (8.7) уравнение для тока вывода  $N$ , который равен сумме токов остальных выводов, взятой с противоположным знаком, получаем систему основных уравнений многополюсника в рассматриваемой схеме включения

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1,N-1} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{N-1,1} & \underline{Y}_{N-1,2} & \dots & \underline{Y}_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dots \\ \dot{U}_{N-1,0} \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

Матрица первичных параметров многополюсника в этом случае

$$\underline{Y}_{ij}^{(N)} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \dots & \underline{Y}_{1,N-1} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & \underline{Y}_{2,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{N-1,1} & \underline{Y}_{N-1,2} & \dots & \underline{Y}_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

получается из неопределенной матрицы проводимостей этого же многополюсника  $\underline{Y}_{ij}$  путем вычеркивания  $N$ -го столбца и  $N$ -й строки. В общем случае матрица  $Y$ -параметров многополюсника,  $k$ -й полюс которого выбран в качестве базисного ( $\underline{Y}_{ij}^{(k)}$ ), получается из неопределенной матрицы проводимостей этого многополюсника  $\underline{Y}_{ij}$  путем вычеркивания столбца и строки, соответствующих базисному полюсу. Сумма элементов каждой строки и сумма элементов каждого столбца матрицы  $\underline{Y}_{ij}^{(k)}$  не равны нулю. Определитель этой матрицы, как правило, не равен нулю, и, следовательно, система уравнений (8.15) может быть разрешена относительно напряжений полюсов  $\dot{U}_{j0}$ .



**Пример 8.4.** Найдем матрицы  $Y$ -параметров полевого транзистора, включенного по схеме с общим истоком и по схеме с общим затвором.

Неопределенная матрица проводимостей полевого транзистора приведена в примере 8.1.

Вычеркивая из этой матрицы третью строку и третий столбец, получаем матрицу  $Y$ -параметров транзистора в схеме с общим истоком

$$\underline{Y}_{ij}^{(3)} = {}_2 \begin{bmatrix} \overset{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} & -\overset{2}{\underline{Y}_2} \\ \underline{S} - \underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \end{bmatrix},$$

а вычеркивая первую строку и первый столбец, — матрицу  $Y$ -параметров полевого транзистора в схеме с общим затвором

$$\underline{Y}_{ij}^{(1)} = {}_3 \begin{bmatrix} \overset{2}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} & -(\overset{3}{\underline{Y}_3 + \underline{S}}) \\ -\underline{Y}_3 & \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{S} \end{bmatrix}.$$

Зная матрицу проводимостей многополюсника  $\underline{Y}_{ij}^{(k)}$ , включенного по схеме с общим  $k$ -м выводом, можно найти неопределенную матрицу проводимостей этого многополюсника  $\underline{Y}_{ij}$ . С этой целью матрица  $\underline{Y}_{ij}^{(k)}$  дополняется  $k$ -й строкой и  $k$ -м столбцом, элементы которых выбирают из условия равенства нулю суммы элементов каждой строки и каждого столбца неопределенной матрицы проводимостей.

Нетрудно установить, что для перехода от матрицы  $Y$ -параметров многополюсника, включенного по схеме с общим  $k$ -выводом, к матрице  $Y$ -параметров многополюсника с общим  $l$ -м выводом необходимо сначала дополнить матрицу  $\underline{Y}_{ij}^{(k)}$   $k$ -й строкой и  $k$ -м столбцом, элементы которых выбирают из условия равенства нулю суммы элементов каждого столбца и каждой строки неопределенной матрицы проводимостей, а затем вычеркнуть из полученной матрицы  $l$ -й столбец и  $l$ -ю строку.



**Пример 8.5.** Определим матрицу  $Y_{ij}^{(6)}$  биполярного транзистора, включенного по схеме с общей базой, по известной матрице  $Y$ -параметров этого транзистора в схеме с общим эмиттером

$$\underline{Y}_{ij}^{(9)} = \begin{matrix} & \text{б} & \text{к} \\ \begin{matrix} \text{б} \\ \text{к} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11}^{(9)} & \underline{Y}_{12}^{(9)} \\ \underline{Y}_{21}^{(9)} & \underline{Y}_{22}^{(9)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Дополняя  $Y_{ij}^{(9)}$  строкой и столбцом, соответствующими выводу эмиттера

$$\underline{Y}_{ij} = \begin{matrix} & \text{э} & \text{б} & \text{к} \\ \begin{matrix} \text{э} \\ \text{б} \\ \text{к} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11}^{(9)} + \underline{Y}_{12}^{(9)} + \underline{Y}_{21}^{(9)} + \underline{Y}_{22}^{(9)} & -(\underline{Y}_{11}^{(9)} + \underline{Y}_{21}^{(9)}) & -(\underline{Y}_{12}^{(9)} + \underline{Y}_{22}^{(9)}) \\ -(\underline{Y}_{11}^{(9)} + \underline{Y}_{12}^{(9)}) & \underline{Y}_{11}^{(9)} & \underline{Y}_{12}^{(9)} \\ -(\underline{Y}_{21}^{(9)} + \underline{Y}_{22}^{(9)}) & \underline{Y}_{21}^{(9)} & \underline{Y}_{22}^{(9)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

и вычеркивая строку и столбец, соответствующие выводу базы, получаем матрицу проводимостей биполярного транзистора в схеме с общей базой

$$\underline{Y}_{ij}^{(6)} = \begin{matrix} & \text{э} & \text{к} \\ \begin{matrix} \text{э} \\ \text{к} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11}^{(9)} + \underline{Y}_{12}^{(9)} + \underline{Y}_{21}^{(9)} + \underline{Y}_{22}^{(9)} & -(\underline{Y}_{12}^{(9)} + \underline{Y}_{22}^{(9)}) \\ -(\underline{Y}_{21}^{(9)} + \underline{Y}_{22}^{(9)}) & \underline{Y}_{22}^{(9)} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Если два каких-либо вывода многополюсника, например с номерами  $k$  и  $N$ , объединяются в один полюс, которому присваивается номер  $k$ , то напряжение этого полюса относительно базисного узла равно  $\dot{U}_{k0}$ , а его ток равен сумме токов  $k$ -го и  $N$ -го выводов. При этом в основной системе уравнений многополюсника (8.7) уравнения для токов  $k$ -го и  $N$ -го выводов

$$I_k = \underline{Y}_{k1} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{k2} \dot{U}_{20} + \dots + \underline{Y}_{kr} \dot{U}_{r0} + \dots + \underline{Y}_{k,N-1} \dot{U}_{N-1,0} + \underline{Y}_{kN} \dot{U}_{N0},$$

$$I_N = \underline{Y}_{N1} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{N2} \dot{U}_{20} + \dots + \underline{Y}_{Nk} \dot{U}_{k0} + \dots + \underline{Y}_{N,N-1} \dot{U}_{N-1,0} + \underline{Y}_{NN} \dot{U}_{N0}$$

заменяются одним уравнением

$$I_k = (\underline{Y}_{k1} + \underline{Y}_{N1}) \dot{U}_{10} + (\underline{Y}_{k2} + \underline{Y}_{N2}) \dot{U}_{20} + \dots + (\underline{Y}_{kr} + \underline{Y}_{kN} + \underline{Y}_{Nr} + \underline{Y}_{NN}) \times \\ \times \dot{U}_{r0} + \dots + (\underline{Y}_{k,N-1} + \underline{Y}_{N,N-1}) \dot{U}_{N-1,0}.$$

Следовательно, при объединении  $k$ -го и  $N$ -го полюсов в один  $k$ -й полюс  $k$ -я и  $N$ -я строки неопределенной матрицы проводимостей многополюсника суммируются и становятся  $k$ -й строкой, а  $k$ -й и  $N$ -й столбцы суммируются и становятся  $k$ -м столбцом.



**Пример 8.6.** Зная неопределенную матрицу проводимостей многополюсника *A*, приведенного на рис. 8.8, а,

$$\underline{Y}_{ijA} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} & \underline{Y}_{14} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} & \underline{Y}_{24} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} & \underline{Y}_{34} \\ \underline{Y}_{41} & \underline{Y}_{42} & \underline{Y}_{43} & \underline{Y}_{44} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

определяем неопределенную матрицу проводимостей  $\underline{Y}_{ijB}$  нового многополюсника *B*, получающего из исходного в результате объединения полюсов 3 и 4 (рис. 8.8, б).

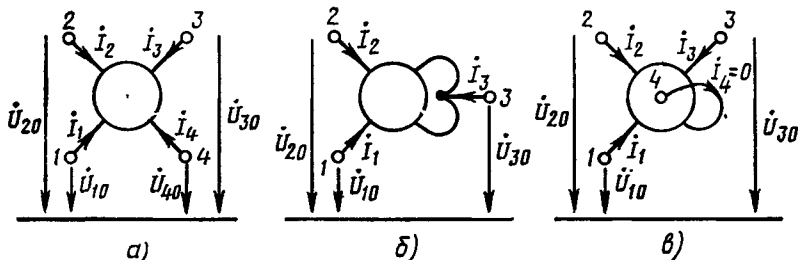


Рис. 8.8. К примерам 8.6 и 8.7

Основные уравнения исходного многополюсника в форме *Y* имеют вид

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{12} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{13} \dot{U}_{30} + \underline{Y}_{14} \dot{U}_{40};$$

$$\dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{23} \dot{U}_{30} + \underline{Y}_{24} \dot{U}_{40};$$

$$\dot{I}_3 = \underline{Y}_{31} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{32} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{33} \dot{U}_{30} + \underline{Y}_{34} \dot{U}_{40};$$

$$\dot{I}_4 = \underline{Y}_{41} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{42} \dot{U}_{20} + \underline{Y}_{43} \dot{U}_{30} + \underline{Y}_{44} \dot{U}_{40}.$$

У многополюсника, полученного из исходного путем объединения выводов 3 и 4, напряжение объединенного вывода равно  $U_{30}$ , а ток — сумме токов третьего и четвертого выводов исходного многополюсника:

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{12} \dot{U}_{20} + (\underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{14}) \dot{U}_{30};$$

$$\dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{20} + (\underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{24}) \dot{U}_{30};$$

$$\dot{I}_3 = (\underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{41}) \dot{U}_{10} + (\underline{Y}_{32} + \underline{Y}_{42}) \dot{U}_{20} + (\underline{Y}_{33} + \underline{Y}_{34} + \underline{Y}_{43} + \underline{Y}_{44}) \dot{U}_{30};$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{14} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{24} \\ \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{41} & \underline{Y}_{32} + \underline{Y}_{42} & \underline{Y}_{33} + \underline{Y}_{34} + \underline{Y}_{43} + \underline{Y}_{44} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{Y}_{ijB} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix}.$$



Таким образом, элементы третьей строки и третьего столбца матрицы  $\underline{Y}_{i,jB}$  действительно равны сумме соответствующих элементов третьей и четвертой строк и третьего и четвертого столбцов неотгражденной матрицы проводимостей исходного многополюсника.

Если какой-либо вывод многополюсника, например  $N$ -й, не используется при его соединении с остальной частью цепи, т. е. является внутренним узлом многополюсника, то ток этого вывода

$$I_N = \underline{Y}_{N1} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{N2} \dot{U}_{20} + \dots + \underline{Y}_{N,N-1} \dot{U}_{N-1,0} + \underline{Y}_{NN} \dot{U}_{N0} = 0. \quad (8.16)$$

Определяя из уравнения (8.16) напряжение  $N$ -го вывода

$$\dot{U}_{N0} = -\underline{Y}_{N1} \dot{U}_{10} / \underline{Y}_{NN} - \underline{Y}_{N2} \dot{U}_{20} / \underline{Y}_{NN} - \dots - \underline{Y}_{N,N-1} \dot{U}_{N-1,0} / \underline{Y}_{N,N}$$

и исключая  $\dot{U}_{N0}$  из основной системы уравнений электрического равновесия исходного многополюсника, получаем

$$\begin{aligned} I_1 = & \left( \underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{1N} \underline{Y}_{N1}}{\underline{Y}_{NN}} \right) \dot{U}_{10} + \left( \underline{Y}_{12} - \frac{\underline{Y}_{1N} \underline{Y}_{N2}}{\underline{Y}_{NN}} \right) \dot{U}_{20} + \dots \\ & \dots + \left( \underline{Y}_{1,N-1} - \frac{\underline{Y}_{1N} \underline{Y}_{N,N-1}}{\underline{Y}_{NN}} \right) \dot{U}_{N-1,0}; \\ I_2 = & \left( \underline{Y}_{21} - \frac{\underline{Y}_{2N} \underline{Y}_{N1}}{\underline{Y}_{NN}} \right) \dot{U}_{10} + \left( \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{2N} \underline{Y}_{N2}}{\underline{Y}_{NN}} \right) \dot{U}_{20} + \dots + \\ & + \left( \underline{Y}_{2,N-1} - \frac{\underline{Y}_{2N} \underline{Y}_{N,N-1}}{\underline{Y}_{NN}} \right) \dot{U}_{N-1,0}; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} I_{N-1} = & \left( \underline{Y}_{N-1,1} - \frac{\underline{Y}_{N-1,N} \underline{Y}_{N1}}{\underline{Y}_{NN}} \right) \dot{U}_{10} + \left( \underline{Y}_{N-1,2} - \frac{\underline{Y}_{N-1,N} \underline{Y}_{N2}}{\underline{Y}_{NN}} \right) \dot{U}_{20} + \dots + \\ & + \left( \underline{Y}_{N-1,N-1} - \frac{\underline{Y}_{N-1,N} \underline{Y}_{N,N-1}}{\underline{Y}_{NN}} \right) \dot{U}_{N-1,0}. \end{aligned}$$

Система уравнений (8.17) может быть представлена в матричной форме

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_{N-1} \end{bmatrix} = \underline{Y}_{ij} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dots \\ \dot{U}_{N-1,0} \end{bmatrix},$$

где матрица

$$\underline{Y}'_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{1N}\underline{Y}_{N2}}{\underline{Y}_{NN}}; & \underline{Y}_{12} - \frac{\underline{Y}_{1N}\underline{Y}_{N2}}{\underline{Y}_{NN}}; & \dots; & \underline{Y}_{1,N-1} - \frac{\underline{Y}_{1N}\underline{Y}_{N,N-1}}{\underline{Y}_{NN}} \\ \underline{Y}_{21} - \frac{\underline{Y}_{2N}\underline{Y}_{N1}}{\underline{Y}_{NN}}; & \underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{2N}\underline{Y}_{N2}}{\underline{Y}_{NN}}; & \dots; & \underline{Y}_{2,N-1} - \frac{\underline{Y}_{2N}\underline{Y}_{N,N-1}}{\underline{Y}_{NN}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{N-1,1} - \frac{\underline{Y}_{N-1,N}\underline{Y}_{N1}}{\underline{Y}_{NN}}; & \underline{Y}_{N-1,2} - \frac{\underline{Y}_{N-1,N}\underline{Y}_{N2}}{\underline{Y}_{NN}}; & \dots; & \underline{Y}_{N-1,N-1} - \frac{\underline{Y}_{N-1,N}\underline{Y}_{N,N-1}}{\underline{Y}_{NN}} \end{bmatrix}$$

получается из неопределенной матрицы проводимостей исходного многополюсника путем вычеркивания  $N$ -й строки и  $N$ -го столбца и замены остальных элементов  $\underline{Y}_{ij}$  новыми  $\underline{Y}'_{ij}$ , определяемыми с помощью соотношения

$$\underline{Y}'_{ij} = \underline{Y}_{ij} - \frac{\underline{Y}_{iN}\underline{Y}_{Nj}}{\underline{Y}_{NN}}. \quad (8.18)$$



**Пример 8.7.** Зная неопределенную матрицу проводимостей многополюсника, приведенного на рис. 8.8, а (см. пример 8.6), найдем неопределенную матрицу проводимостей  $\underline{Y}_{ijB}$  многополюсника, который получается из исходного, если полюс 4 становится внутренним (рис. 8.8, в).

Неопределенная матрица проводимостей многополюсника, приведенного на рис. 8.11, в, получается из неопределенной матрицы проводимостей исходного многополюсника путем вычеркивания строки 4 и столбца 4, а также замены остальных элементов новыми, рассчитанными с помощью выражения (8.18):

$$\underline{Y}_{ijB} = \begin{bmatrix} & \overset{1}{\underline{Y}_{11} - \frac{\underline{Y}_{14}\underline{Y}_{41}}{\underline{Y}_{44}}} & \overset{2}{\underline{Y}_{12} - \frac{\underline{Y}_{14}\underline{Y}_{42}}{\underline{Y}_{44}}} & \overset{3}{\underline{Y}_{13} - \frac{\underline{Y}_{14}\underline{Y}_{43}}{\underline{Y}_{44}}} \\ \overset{1}{\underline{Y}_{21} - \frac{\underline{Y}_{24}\underline{Y}_{41}}{\underline{Y}_{44}}} & \overset{2}{\underline{Y}_{22} - \frac{\underline{Y}_{24}\underline{Y}_{42}}{\underline{Y}_{44}}} & \overset{3}{\underline{Y}_{23} - \frac{\underline{Y}_{24}\underline{Y}_{43}}{\underline{Y}_{44}}} \\ \overset{3}{\underline{Y}_{31} - \frac{\underline{Y}_{34}\underline{Y}_{41}}{\underline{Y}_{44}}} & \overset{2}{\underline{Y}_{32} - \frac{\underline{Y}_{34}\underline{Y}_{42}}{\underline{Y}_{44}}} & \overset{3}{\underline{Y}_{33} - \frac{\underline{Y}_{34}\underline{Y}_{43}}{\underline{Y}_{44}}} \end{bmatrix}$$

Нетрудно убедиться, что сумма элементов любой строки и сумма элементов любого столбца матрицы  $\underline{Y}_{ijB}$  равны нулю.

Рассматривая основные уравнения многополюсника в форме  $Z$ , можно установить, что при размыкании какого-либо из внешних по отношению к многополюснику контуров, например  $k$ -го (контурный ток этого контура  $I_{kk}$  становится равным нулю), из неопределенной матрицы сопротивлений многополюсника вычеркивают  $k$ -ю строку и  $k$ -й столбец. Полученная в результате этого матрица сопротивлений

$\underline{Z}_{ij}^{(k)}$ , как правило, не является особенной, поэтому основная система уравнений многополюсника, один из внешних контуров которого разомкнут, может быть разрешена относительно токов остальных контуров.

В отличие от неопределенных матриц сопротивлений и проводимостей многополюсника матрицы  $\underline{Z}_{ij}^{(k)}$  и  $\underline{Y}_{ij}^{(k)}$ , получаемые из матриц  $\underline{Z}_{ij}$  и  $\underline{Y}_{ij}$  путем вычеркивания строки и столбца, будем называть укороченными матрицами сопротивлений и проводимостей многополюсника.

При объединении  $k$ -го и  $N$ -го выводов многополюсника в один  $k$ -й вывод из неопределенной матрицы сопротивлений исходного многополюсника вычеркивают  $N$ -ю строку и  $N$ -й столбец, а остальные элементы исходной матрицы  $\underline{Z}_{ij}$  заменяют новыми  $\underline{Z}'_{ij}$ , рассчитанными по формуле

$$\underline{Z}'_{ij} = \underline{Z}_{ij} - \underline{Z}_{iN} \underline{Z}_{Nj} / \underline{Z}_{NN}.$$

Если какой-либо из полюсов многополюсника, например  $k$ -й, являющийся общим для  $k$ -го и  $l$ -го контуров, становится внутренним, то контуры  $k$  и  $l$  объединяются в один  $l$ -й контур. В этом случае в неопределенной матрице сопротивлений многополюсника вычеркивают  $k$ -ю строку и  $k$ -й столбец, а к элементам  $l$ -й строки и  $l$ -го столбца прибавляют соответствующие элементы  $k$ -й строки и  $k$ -го столбца.

### Соотношения между элементами неопределенных матриц проводимостей и сопротивлений многополюсника

Основные уравнения произвольного линейного неавтономного многополюсника в формах  $Y$  и  $Z$  описывают зависимости между токами и напряжениями на зажимах этого многополюсника. Очевидно, что коэффициенты основных уравнений ( $Y$  и  $Z$  параметры многополюсника) должны быть связаны между собой соотношениями, позволяющими найти элементы одной из неопределенных матриц многополюсника по известным элементам другой. Определить эти соотношения путем сопоставления выражений для одноименных величин, например токов или напряжений полюсов, полученных из уравнений (8.6) и (8.13), невозможно, поскольку матрицы  $\underline{Z}_{ij}$  и  $\underline{Y}_{ij}$  являются особенными и уравнения (8.6) не могут быть разрешены относительно напряжений полюсов, а уравнения (8.13) — относительно токов внешних по отношению к многополюснику контуров. Однако, как было установлено ранее, укороченные матрицы сопротивлений и проводимостей многополюсника не являются особенными и, следовательно, основные уравнения многополюсника, один из выводов которого выбран в качестве общего или один из внешних по отношению к которому контуров является разомкнутым, могут быть разрешены относительно одноименных величин.



**Пример 8.8.** Определим соотношения между  $Y$ - и  $Z$ -параметрами линейного неавтономного трехполюсника (рис. 8.9, а). Пусть неопределенная матрица проводимостей этого трехполюсника известна

$$\underline{Y}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Выберем любой из полюсов трехполюсника, например полюс 3 в качестве общего (рис. 8.9, б) и найдем соответствующую этому случаю укороченную матрицу проводимостей

$$\underline{Y}_{ij}^{(3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Основная система уравнений трехполюсника в данной схеме включения имеет вид

$$\dot{I}_1 = \underline{Y}_{11} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{12} \dot{U}_{20}; \quad \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21} \dot{U}_{10} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{20}. \quad (8.19)$$

Выразим токи полюсов трехполюсника  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$  через токи внешних контуров  $\dot{I}_{11}, \dot{I}_{33}$  (рис. 8.9, в)

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}, \quad \dot{I}_2 = -\dot{I}_{33}, \quad (8.20)$$

а напряжения полюсов трехполюсника относительно базисного  $\dot{U}_{10}, \dot{U}_{20}$  через напряжения между полюсами

$$\dot{U}_{10} = \dot{U}_1; \quad \dot{U}_{20} = -\dot{U}_3. \quad (8.21)$$

Подставляя соотношения (8.20), (8.21) в (8.19) и решая полученную систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{I}_{11} &= \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 - \underline{Y}_{12} \dot{U}_3; \\ -\dot{I}_{33} &= \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 - \underline{Y}_{22} \dot{U}_3 \end{aligned}$$

относительно  $\dot{U}_1, \dot{U}_3$ , переходим от основных уравнений трехполюсника с общим полюсом 3 (рис. 8.9, б) к основным уравнениям трехполюсника с разомкнутым внешним контуром 2 (рис. 8.9, в):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Y}_{22} \dot{I}_{11} / (\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}) + \underline{Y}_{12} \dot{I}_{33} / (\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}); \\ \dot{U}_3 &= \underline{Y}_{21} \dot{I}_{11} / (\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}) + \underline{Y}_{11} \dot{I}_{33} / (\underline{Y}_{11} \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12} \underline{Y}_{21}) \end{aligned}$$

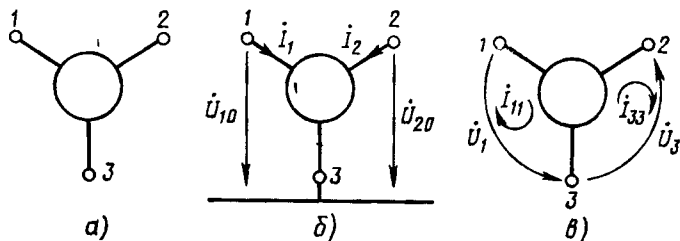


Рис. 8.9. К примеру 8.8

или

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = \underline{Z}_{ij}^{(2)} \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{33} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\underline{Z}_{ij}^{(2)}$  — укороченная матрица сопротивлений трехполюсника, внешний контур 2 которого разомкнут:

$$\underline{Z}_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} & \frac{Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} & \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \end{bmatrix}.$$

Дополняя укороченную матрицу сопротивлений второй строкой и вторым столбцом и вынося из матрицы общий для всех элементов множитель, находим неопределенную матрицу сопротивлений рассматриваемого трехполюсника:

$$\underline{Z}_{ij} = \frac{1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \begin{bmatrix} Y_{22} & -(Y_{12} + Y_{22}) & Y_{12} \\ -(Y_{21} + Y_{22}) & Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22} & -(Y_{11} + Y_{12}) \\ Y_{21} & -(Y_{11} + Y_{21}) & Y_{11} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Полученные выражения для  $Z$ -параметров могут быть упрощены, если принять во внимание, что сумма элементов любой строки и сумма элементов любого столбца матрицы  $\underline{Y}_{ij}$  равны нулю:

$$\underline{Z}_{ij} = \frac{1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \begin{bmatrix} Y_{22} & Y_{32} & Y_{12} \\ Y_{23} & Y_{33} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{31} & Y_{11} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

Используя аналогичные преобразования, нетрудно выразить элементы неопределенной матрицы проводимостей трехполюсника через элементы неопределенной матрицы сопротивлений:

$$\underline{Y}_{ij} = \frac{1}{Z_{11}Z_{33} - Z_{13}Z_{31}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \begin{bmatrix} Z_{33} & Z_{13} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{11} & Z_{21} \\ Z_{32} & Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

Как видно из выражений (8.22), (8.23), взаимные преобразования неопределенных матриц проводимостей  $\underline{Y}_{ij}$  и сопротивлений  $\underline{Z}_{ij}$  многополюсника возможны только в том случае, если укороченные матрицы проводимостей  $\underline{Y}_{ij}^{(k)}$  и сопротивлений  $\underline{Z}_{ij}^{(k)}$  не являются особенными.

### Уравнения электрического равновесия цепей с многополюсными элементами

Уравнения электрического равновесия линейных цепей, содержащих неавтономные многополюсники, формируют с помощью предложенных проф. В. П. Сигорским обобщенных методов узловых напряжений и контурных токов. Основные идеи обобщенного метода

узловых напряжений состоят в следующем. Если считать, что неопределенная матрица проводимостей трехполюсника известна

$$\underline{Y}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (8.24)$$

а внешние выводы трехполюсника 1, 2, и 3 подключены соответственно к узлам  $k$ ,  $l$  и  $s$  цепи (рис. 8.10, а), то при изменении нумерации столбцов и строк матрицы (8.24) в соответствии с нумерацией узлов

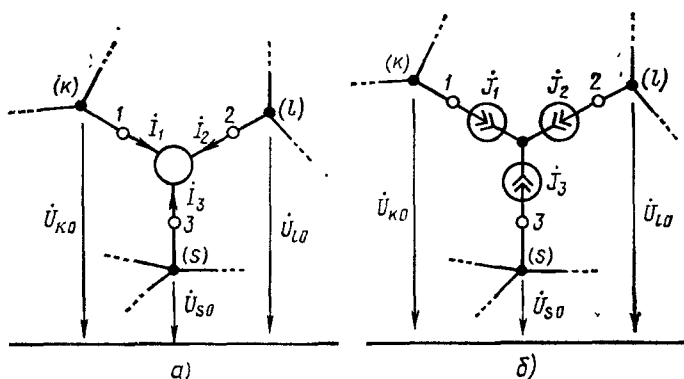


Рис. 8.10. К обоснованию обобщенного метода узловых напряжений

цепи и выборе в качестве базисного узла для отсчета напряжений внешних выводов трехполюсника базисного узла рассматриваемой цепи напряжения внешних выводов трехполюсника относительно базисного будут совпадать с узловыми напряжениями соответствующих узлов цепи, а токи внешних выводов трехполюсника смогут быть выражены через узловые напряжения исследуемой цепи:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} k & l & s \\ \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{13} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \underline{Y}_{23} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{Y}_{32} & \underline{Y}_{33} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{k0} \\ \underline{U}_{l0} \\ \underline{U}_{s0} \end{bmatrix}.$$

Токи и напряжения цепи не изменятся, если вместо выводов трехполюсника к узлам  $k$ ,  $l$  и  $s$  подключить источники тока  $\underline{J}_1$ ,  $\underline{J}_2$  и  $\underline{J}_3$ .

$$\begin{aligned} \underline{J}_1 = \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_{k0} + \underline{Y}_{12} \underline{U}_{l0} + \underline{Y}_{13} \underline{U}_{s0}; \\ \underline{J}_2 = \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \underline{U}_{k0} + \underline{Y}_{22} \underline{U}_{l0} + \underline{Y}_{23} \underline{U}_{s0}; \\ \underline{J}_3 = \underline{I}_3 &= \underline{Y}_{31} \underline{U}_{k0} + \underline{Y}_{32} \underline{U}_{l0} + \underline{Y}_{33} \underline{U}_{s0}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Рассматриваемая цепь содержит только идеализированные двухполюсные элементы и для нее можно составить систему узловых

уравнений

$$\underline{Y}_{(ij)} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dots \\ \dot{U}_{k0} \\ \dots \\ \dot{U}_{l0} \\ \dots \\ \dot{U}_{s0} \\ \dots \\ \dot{U}_{m0} \end{bmatrix} = \dot{J}_{i0}, \quad (8.26)$$

где  $m = q - 1$  — число независимых узлов цепи, а  $\underline{Y}_{(ij)}$  и  $\dot{J}_{i0}$  — матрица узловых проводимостей и матрица-столбец узловых токов цепи (рис. 8.10, б), которые соответственно равны:

$$\underline{Y}_{(ij)} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{(11)} & \underline{Y}_{(12)} & \dots & \underline{Y}_{(1k)} & \dots & \underline{Y}_{(1l)} & \dots & \underline{Y}_{(1s)} & \dots & \underline{Y}_{(1m)} \\ \underline{Y}_{(21)} & \underline{Y}_{(22)} & \dots & \underline{Y}_{(2k)} & \dots & \underline{Y}_{(2l)} & \dots & \underline{Y}_{(2s)} & \dots & \underline{Y}_{(2m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{(k1)} & \underline{Y}_{(k2)} & \dots & \underline{Y}_{(kk)} & \dots & \underline{Y}_{(kl)} & \dots & \underline{Y}_{(ks)} & \dots & \underline{Y}_{(km)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{(l1)} & \underline{Y}_{(l2)} & \dots & \underline{Y}_{(lk)} & \dots & \underline{Y}_{(ll)} & \dots & \underline{Y}_{(ls)} & \dots & \underline{Y}_{(lm)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{(s1)} & \underline{Y}_{(s2)} & \dots & \underline{Y}_{(sk)} & \dots & \underline{Y}_{(sl)} & \dots & \underline{Y}_{(ss)} & \dots & \underline{Y}_{(sm)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Y}_{(m1)} & \underline{Y}_{(m2)} & \dots & \underline{Y}_{(mk)} & \dots & \underline{Y}_{(ml)} & \dots & \underline{Y}_{(ms)} & \dots & \underline{Y}_{(mm)} \end{bmatrix};$$

$$\dot{J}_{i0} = \begin{bmatrix} J_{10} \\ \dot{j}_{20} \\ \dots \\ \dot{J}_{k0} - J_1 \\ \dots \\ \dot{J}_{l0} - J_2 \\ \dots \\ \dot{J}_{s0} - J_3 \\ \dots \\ J_{m0} \end{bmatrix}.$$





В общем случае исследуемая цепь может содержать не один, а несколько многополюсных элементов с произвольным количеством выводов. Формирование уравнений электрического равновесия такой цепи в соответствии с обобщенным методом узловых напряжений производят в следующем порядке:

- 1) выбирают базисный узел и нумеруют независимые узлы цепи;
- 2) изменяют нумерацию столбцов и строк неопределенных матриц проводимостей всех многополюсников в соответствии с нумерацией узлов, к которым подключены выводы этих многополюсников;
- 3) из неопределенных матриц проводимостей всех многополюсников вычеркивают строки и столбцы, соответствующие тем выводам многополюсника, которые соединены с базисным узлом (элементы этих столбцов и строк не учитывают при формировании узловых уравнений исследуемой цепи);
- 4) из исследуемой цепи удаляют все многополюсники, для оставшейся вспомогательной цепи, содержащей только идеализированные двухполюсные элементы, формируют систему узловых уравнений;
- 5) от узловых уравнений вспомогательной цепи переходят к узловым уравнениям исследуемой цепи, для чего последовательно рассматривают все входящие в цепь многополюсники и элементы неопределенных матриц проводимостей многополюсников суммируют с соответствующими элементами матрицы узловых проводимостей вспомогательной цепи.

Очевидно, что количество независимых уравнений электрического равновесия, формируемых с помощью обобщенного метода узловых напряжений, не зависит от внутренней структуры входящих в цепь многополюсников и определяется только числом независимых узлов внешней по отношению к многополюсникам части цепи.

Отметим, что обобщенный метод узловых напряжений является весьма универсальным и не накладывает никаких ограничений на топологию цепи и количество входящих в нее многополюсных элементов.



**Пример 8.9.** Составим систему узловых уравнений усилительного каскада на полевых транзисторах, принципиальная электрическая схема которого приведена на рис. 8.11, а. Используем комплексную схему замещения (рис. 8.11, б), где в виде многополюсника представлена модель полевого транзистора по переменному току в режиме малого сигнала.

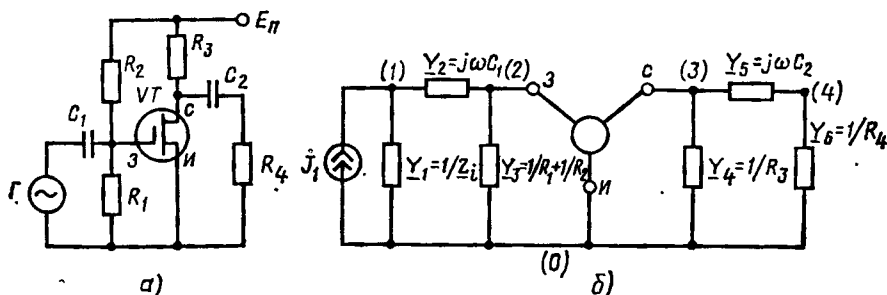


Рис. 8.11. К примеру 8.9

Изменяя нумерацию столбцов и строк неопределенной матрицей проводимостей полевого транзистора (пример 8.1) в соответствии с нумерацией узлов рассматриваемой цепи, получаем

$$\underline{Y}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} j\omega(C_{\text{вн}} + C_{\text{зс}}) & -j\omega C_{\text{зс}} & -j\omega C_{\text{эи}} \\ \underline{S} - j\omega C_{\text{зс}} & G_i + j\omega(C_{\text{зс}} + C_{\text{сн}}) & -(\underline{S} + G_i + j\omega C_{\text{сн}}) \\ 0 & -(G_i + j\omega C_{\text{сн}}) & \underline{S} + G_i + j\omega(C_{\text{вн}} + C_{\text{сн}}) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Строка и столбец неопределенной матрицы проводимостей, соответствующие выводу транзистора, соединенному с базисным узлом цепи, могут быть вычеркнуты из матрицы, так как элементы этой строки и этого столбца не будут учитываться при составлении уравнений электрического равновесия.

Составим систему узловых уравнений вспомогательной цепи, которая получается из цепи (рис. 8.11, б) при удалении из нее многополюсного элемента

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 & 0 & 0 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 & -\underline{Y}_5 \\ 0 & 0 & -\underline{Y}_5 & \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \\ \dot{U}_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Прибавляя к элементам матрицы узловых проводимостей вспомогательной цепи, расположенным на пересечении столбцов 2, 3 и строк 2, 3 соответствующие элементы неопределенной матрицы проводимостей полевого транзистора, получаем систему узловых уравнений рассматриваемой цепи

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 & 0 & 0 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + j\omega(C_{\text{вн}} + C_{\text{зс}}) & -j\omega C_{\text{зс}} & 0 \\ 0 & \underline{S} - j\omega C_{\text{зс}} & \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + G_i + j\omega(C_{\text{зс}} + C_{\text{сн}}) & -\underline{Y}_5 \\ 0 & j\omega & -\underline{Y}_5 & \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \\ \dot{U}_{40} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



**Пример 8.10.** Используя обобщенный метод узловых напряжений, составим систему уравнений электрического равновесия комбинированного усилителя, содержащего полевой и биполярный транзисторы (рис. 8.12, а). Комплексная схема замещения усилителя в диапазоне низких частот приведена на рис. 8.12, б.

Неопределенная матрица проводимостей полевого транзистора  $V T_A$  была найдена в примере 8.1:

$$\underline{Y}_{i/A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} j\omega(C_{\text{вн}} + C_{\text{зс}}) & -j\omega C_{\text{зс}} & -j\omega C_{\text{эи}} \\ \underline{S} - j\omega C_{\text{зс}} & G_i + j\omega(C_{\text{зс}} + C_{\text{сн}}) & -(\underline{S} + G_i + j\omega C_{\text{сн}}) \\ 0 & -(\underline{S} + j\omega C_{\text{эи}}) & \underline{S} + G_i + j\omega(C_{\text{вн}} + C_{\text{сн}}) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

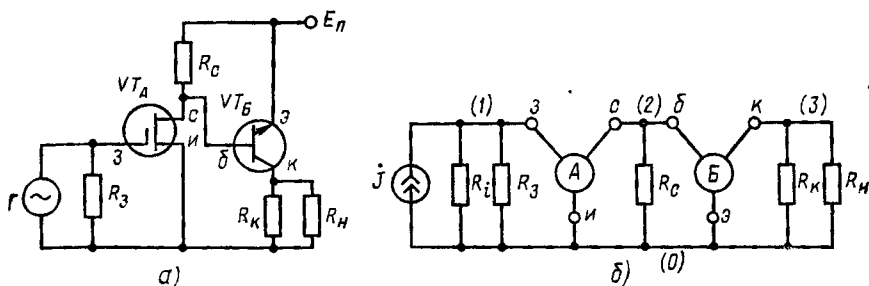


Рис. 8.12. К примеру 8.10

Для получения неопределенной матрицы проводимостей биполярного транзистора  $VT_B$  воспользуемся неопределенной матрицей сопротивлений этого транзистора (см. пример 8.2) и формулами перехода (8.23):

$$\underline{Y}_{i/jB} = \begin{matrix} & 0 & 3 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} (R_6 + R_K)/\Delta_T & -R_6/\Delta_T & -R_6/\Delta_T \\ -(R_6 + R_m)/\Delta_T & (R_3 + R_6)\Delta_T & (R_m - R_3)/\Delta_T \\ (R_m - R_K)/\Delta_T & -R_3/\Delta_T & (R_K + R_3 - R_m)/\Delta_T \end{bmatrix} \end{matrix}$$

где  $\Delta_T = (R_K + R_6)R_3 + (R_K - R_m)R_6$ .

Составляя систему узловых уравнений вспомогательной цепи

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1/R_i + 1/R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_c & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_K + 1/R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и суммируя элементы неопределенных матриц проводимостей транзисторов с соответствующими элементами матрицы узловых проводимостей этой цепи, получаем окончательно

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1/R_i + 1/R_3 + & -j\omega C_{3c} & 0 \\ +j\omega(C_{3и} + C_{3c}) & 1/R_c + G_i + j\omega C_{3c} + C_{3и} + & -R_3/\Delta_T \\ S - j\omega C_{3c} & + (R_K + R_3 - R_m)/\Delta_T & 1/R_K + 1/R_N + \\ 0 & (R_m - R_3)/\Delta_T & + (R_3 + R_6)/\Delta_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \dot{U}_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Обобщенный метод контурных токов имеет несколько меньшую универсальность, чем обобщенный метод узловых напряжений, и может применяться только при анализе цепей, схема замещения которых является планарной. Формирование уравнений электрического равновесия произвольной линейной цепи, содержащей один или несколько неавтономных многополюсников, в соответствии с обобщенным методом контурных токов выполняется в такой последовательности:



Нумерация сторон многополюсника, а следовательно, и нумерация строк и столбцов неопределенной матрицы сопротивлений произведена в соответствии с рис. 8.5 и 8.9. Выберем нумерацию контуров рассматриваемой цепи, как указано на рис. 8.13, и соответственно изменим нумерацию строк и столбцов неопределенной матрицы сопротивлений полевого транзистора

$$\underline{Z}_{ij} = \frac{1}{\Delta} \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & & 0 & & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} G_i + j\omega(C_{зс} + C_{си}) & -(G_i + j\omega C_{си}) & -j\omega C_{зс} \\ -(S + G_i + j\omega C_{си}) & S + G_i + j\omega(C_{си} + C_{зи}) & -j\omega C_{зи} \\ S - j\omega C_{зс} & -(S + j\omega C_{зи}) & j\omega(C_{зи} + C_{зс}) \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Удалим из рассматриваемой цепи многополюсный элемент, точки присоединения его выводов соединим между собой и составим систему контурных уравнений для полученной таким образом вспомогательной цепи

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_3 & 0 & 0 \\ & -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 & 0 \\ & 0 & 0 & \underline{Z}_4 \\ & 0 & 0 & -\underline{Z}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{22} \\ i_{33} \\ i_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Прибавляя элементы неопределенной матрицы сопротивлений полевого транзистора, расположенные на пересечениях строк 2, 3 со столбцами 2, 3, к соответствующим элементам матрицы контурных сопротивлений вспомогательной цепи, получаем систему контурных уравнений исследуемой цепи

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 & -\underline{Z}_3 & 0 & 0 \\ +\underline{Z}_3 & \underline{Z}_3 + [G_i + j\omega \times & -j\omega C_{зс} / \Delta & 0 \\ -\underline{Z}_3 & \times (C_{зс} + C_{си}) / \Delta & & \\ 0 & (S - j\omega C_{зс}) / \Delta & \underline{Z}_4 + [j\omega \times & -\underline{Z}_4 \\ & & \times (C_{зи} + C_{зс}) / \Delta & \\ 0 & 0 & -\underline{Z}_4 & \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{22} \\ i_{33} \\ i_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## § 8.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ПЕРВИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

### Классификация проходных четырехполюсников

Значительное место в теории цепей занимает исследование многополюсников с двумя сторонами ( $2 \times 2$ -полюсников), которые в отечественной литературе называются проходными четырехполюсниками. В виде проходных четырехполюсников могут быть представлены различные устройства, имеющие две пары внешних зажимов, служащих для подключения источника энергии и нагрузки.

К исследованию проходных четырехполюсников сводятся задачи определения комплексных частотных и операторных характеристик произвольных цепей, в том числе задача нахождения параметров неопределенных матриц сопротивлений и проводимостей неавтономных многополюсников. Как и все многополюсники, проходные четырехполюсники подразделяют на линейные и нелинейные, активные и пассивные, автономные и неавтономные, взаимные и невзаимные. Кроме того, различают симметричные и несимметричные, уравновешенные и неуравновешенные проходные четырехполюсники.

К симметричным относятся такие проходные четырехполюсники, у которых с помощью внешних измерений невозможно установить разницу между входными  $1-1'$  и выходными  $2-2'$  зажимами. Токи и напряжения цепи, к которой подключен симметричный четырехполюсник, не изменятся, если пары зажимов  $1-1'$  и  $2-2'$  поменять местами. Четырехполюсники, не обладающие такими свойствами, являются несимметричными. Очевидно, что все невзаимные четырехполюсники относятся к несимметричным. Достаточным условием симметричности четырехполюсника является симметричность его

схемы относительно поперечной

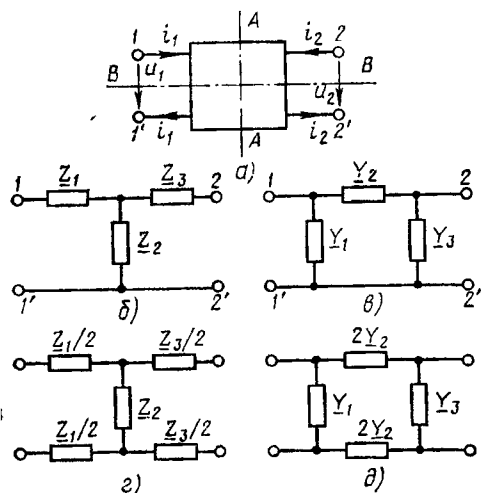


Рис. 8.14. К определению симметричного и несимметричного, уравновешенного и неуравновешенного четырехполюсников (а); примеры симметричных и несимметричных, уравновешенных (г, д) и неуравновешенных (б, в) четырехполюсников

ной (вертикальной) оси  $A-A$  (рис. 8.14, а). Так, четырехполюсники, схемы которых приведены на рис. 8.14, б, в, будут симметричными, если  $Z_1 = Z_3$ ,  $Y_1 = Y_3$ , и несимметричными, если  $Z_1 \neq Z_3$ ,  $Y_1 \neq Y_3$ .

В зависимости от того, изменятся или не изменятся токи и напряжения цепи, к которой подключен четырехполюсник, при взаимной замене зажимов  $1$  и  $1'$ ,  $2$  и  $2'$ , т. е. «при повороте» четырехполюсника относительно продольной (горизонтальной) оси  $B-B$  (рис. 8.15, а), различают уравновешенные и неуравновешенные проходные четырехполюсники.

Достаточным условием уравновешенности четырехполюсника является симметричность его схемы относительно продольной оси. Четырехполюсники, схемы которых приведены на рис. 8.14, г, д, уравновешенные. Если один из внешних зажимов четырехполюсника является общим для обеих сторон, то такой четырехполюсник является предельно неуравновешенным (рис. 8.14, б, в).

## Основные уравнения и первичные параметры неавтономных проходных четырехполюсников

Основные уравнения проходных четырехполюсников составляются в терминах токов и напряжений внешних по отношению к четырехполюсникам ветвей, подключенных к зажимам 1—1' и 2—2'. В зависимости от решаемой задачи положительные направления токов этих ветвей можно выбирать различным образом (рис. 8.15). Будем обозначать  $i_1 \doteq I_1$  и  $i_2 \doteq I_2$  токи, втекающие в четырехполюсник через зажимы 1 и 2, и  $i'_1 = -i_1 \doteq I'_1 = -I_1$ ,  $i'_2 = -i_2 \doteq I'_2 = -I_2$  — токи, вытекающие через эти зажимы. Токи и напряжения, фигурирующие в ос-

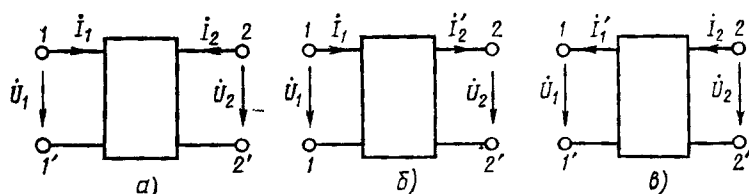


Рис. 8.15. Варианты выбора положительных направлений токов и напряжений проходного четырехполюсников

новных уравнениях проходных четырехполюсников, не совпадают непосредственно с токами и напряжениями, принятыми при рассмотрении неопределенных схем включения многополюсников (см. рис. 8.3, а, б), но могут быть выражены через них с помощью простых соотношений.

В связи с тем что число независимых основных уравнений многополюсника равно числу его независимых сторон, зависимость между токами и напряжениями на зажимах проходного четырехполюсника может быть описана с помощью системы из двух независимых основных уравнений. Вид этих уравнений зависит от того, какие две величины из четырех токов и напряжений рассматриваются в качестве независимых переменных, а какие — в качестве зависимых. Учитывая, что число сочетаний из четырех токов и напряжений по два равно шести, приходим к заключению, что основные уравнения проходного четырехполюсника могут быть записаны в шести различных формах.

Форма Y:

$$\begin{aligned} I_1 &= \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{U}_2; \\ I_2 &= \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Форма Z:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_{11} I_1 + \underline{Z}_{12} I_2; \\ \dot{U}_2 &= \underline{Z}_{21} I_1 + \underline{Z}_{22} I_2; \end{aligned} \quad (8.29)$$

Форма  $H$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{H}_{11} \dot{I}_1 + \underline{H}_{12} \dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 &= \underline{H}_{21} \dot{I}_1 + \underline{H}_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Форма  $G$ :

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \underline{G}_{11} \dot{U}_1 + \underline{G}_{12} \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= \underline{G}_{21} \dot{U}_1 + \underline{G}_{22} \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Форма  $A$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{A}_{11} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \dot{I}'_2; \\ \dot{I}_1 &= \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{22} \dot{I}'_2. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Форма  $B$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \underline{B}_{11} \dot{U}_1 + \underline{B}_{12} \dot{I}'_1, \\ \dot{I}_2 &= \underline{B}_{21} \dot{U}_1 + \underline{B}_{22} \dot{I}'_1. \end{aligned} \quad (8.33)$$

При составлении основных уравнений проходного четырехполюсника в формах  $Y$ ,  $Z$ ,  $H$  и  $G$  положительные направления токов и напряжений выбирают в соответствии с рис. 8.15, *а*, при составлении основных уравнений в форме  $A$  — в соответствии с рис. 8.15, *б*, а при составлении основных уравнений в форме  $B$  — в соответствии с рис. 8.15, *в*.

Коэффициенты основных уравнений (8.28)—(8.33) называются соответственно  $Y$ -,  $Z$ -,  $H$ -,  $G$ -,  $A$ - и  $B$ -параметрами четырехполюсника.

Как и любые первичные параметры линейных неавтономных многополюсников, каждый из этих параметров имеет физический смысл какой-либо комплексной частотной характеристики проходного четырехполюсника, определенной в режиме короткого замыкания или холостого хода.

Например, параметр  $\underline{Y}_{11} = \dot{I}'_1 / \dot{U}_1 |_{\dot{U}_2=0}$  имеет физический смысл комплексной входной проводимости четырехполюсника со стороны зажимов  $1-1'$  в режиме короткого замыкания на зажимах  $2-2'$ , а параметр  $\underline{A}_{11} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 |_{\dot{I}'_2=0}$  — физический смысл величины, обратной комплексному коэффициенту передачи по напряжению от зажимов  $1-1'$  к зажимам  $2-2'$  при холостом ходе на зажимах  $2-2'$ .

Математически системы уравнений (8.28)—(8.33) являются равносильными, поэтому коэффициенты уравнений должны быть связаны между собой с помощью элементарных алгебраических соотношений. Для определения этих соотношений соответствующие уравнения должны быть разрешены относительно одних и тех же токов и напряжений. Например, разрешая уравнения (8.28) относительно напряжений  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Y}_{22} \dot{I}_1 / \Delta_Y + (-\underline{Y}_{12}) \dot{I}_2 / \Delta_Y; \\ \dot{U}_2 &= -\underline{Y}_{21} \dot{I}_1 / \Delta_Y + \underline{Y}_{11} \dot{I}_2 / \Delta_Y, \end{aligned} \quad (8.34)$$



где  $\Delta_Y = \underline{Y}_{22}\underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}$  — определитель основной системы уравнений в форме  $Y$ , и сравнивая коэффициенты уравнений (8.29) и (8.34),  $Z$ -параметры неавтономного проходного четырехполюсника можно выразить через  $Y$ -параметры того же четырехполюсника:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{22}/\Delta_Y & -\underline{Y}_{12}/\Delta_Y \\ -\underline{Y}_{21}/\Delta_Y & \underline{Y}_{11}/\Delta_Y \end{bmatrix}. \quad (8.35)$$

Соотношения типа (8.35) называются формулами перехода (см. приложение 2). Определители каждой из систем основных уравнений также могут быть выражены через определители или коэффициенты других систем уравнений (см. приложение 3).

### Методы определения первичных параметров неавтономных проходных четырехполюсников

Первичные параметры проходных четырехполюсников, как и первичные параметры любых неавтономных многополюсников, могут быть определены в соответствии с их физическим смыслом по результатам опытов холостого хода и короткого замыкания.



**Пример 8.12.** Определим  $A$ -параметры  $\Gamma$ -образного четырехполюсника, схема которого приведена на рис. 8.16, а.

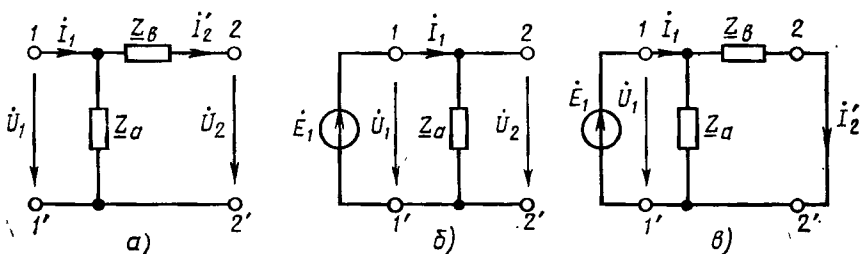


Рис. 8.16. К примеру 8.12

Как следует из основных уравнений четырехполюсника в форме  $A$  (8.32), параметры  $\underline{A}_{11} = \dot{U}_1/\dot{U}_2 | i_2' = 0$  и  $\underline{A}_{21} = \dot{I}_1/\dot{U}_2 | i_2' = 0$  определяются в режиме холостого хода (рис. 8.16, б), а параметры  $\underline{A}_{12} = \dot{U}_1/\dot{I}_2' | \dot{U}_2 = 0$  и  $\underline{A}_{22} = \dot{I}_1/\dot{I}_2' | \dot{U}_2 = 0$  — в режиме короткого замыкания на зажимах 2—2' (рис. 8.16, в). Из этих схем видно, что в режиме холостого хода

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 = \dot{E}_1; \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_1/\underline{Z}_a = \dot{E}_1/\underline{Z}_a,$$

а в режиме короткого замыкания

$$\dot{I}_2' = \dot{U}_1/\underline{Z}_b = \dot{E}_1/\underline{Z}_b; \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_1 (1/\underline{Z}_a + 1/\underline{Z}_b) = (\underline{Z}_a + \underline{Z}_b) \dot{E}_1/(\underline{Z}_a \underline{Z}_b).$$

Используя полученные соотношения, находим

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= 1; \underline{A}_{12} = \dot{E}_1 \underline{Z}_b / \dot{E}_1 = \underline{Z}_b; \\ \underline{A}_{21} &= \dot{E}_1 / (\underline{Z}_a \dot{E}_1) = 1 / \underline{Z}_a; \\ \underline{A}_{22} &= \dot{E}_1 (\underline{Z}_a + \underline{Z}_b) \underline{Z}_b / (\underline{Z}_a \dot{Z}_b \dot{E}_1) = 1 + \underline{Z}_b / \underline{Z}_a \end{aligned}$$

или

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z}_b \\ 1 / \underline{Z}_a & 1 + \underline{Z}_b / \underline{Z}_a \end{bmatrix}.$$



**Пример 8.13.** Определим  $H$ -параметры  $\Gamma$ -образного четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 8.17, а.

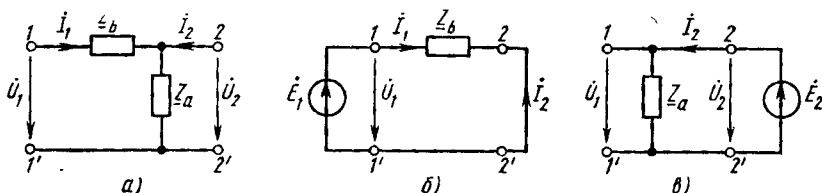


Рис. 8.17. К примеру 8.13

Из основных уравнений четырехполюсника в форме  $H$  (8.30) следует, что параметры четырехполюсника  $\underline{H}_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 |_{\dot{U}_2=0}$  и  $\underline{H}_{21} = \dot{I}_2 / \dot{I}_1 |_{\dot{U}_2=0}$  определяются в режиме короткого замыкания на зажимах 2—2', а параметры  $\underline{H}_{12} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 |_{\dot{I}_1=0}$  и  $\underline{H}_{22} = \dot{I}_2 / \dot{U}_2 |_{\dot{I}_1=0}$  в режиме холостого хода на зажимах 1—1'. Выполняя опыты короткого замыкания (рис. 8.17, б) и холостого хода (рис. 8.17, в), находим матрицу  $H$ -параметров рассматриваемого четырехполюсника:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_b; & 1 \\ -1; & 1 / \underline{Z}_a \end{bmatrix}.$$



**Пример 8.14.** Определим  $Z$ -параметры симметричного мостового четырехполюсника (рис. 8.18, а).

Анализируя основную систему уравнений четырехполюсника в форме  $Z$  (8.29), нетрудно установить, что параметры  $\underline{Z}_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 |_{\dot{I}_2=0}$  и  $\underline{Z}_{21} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 |_{\dot{I}_2=0}$

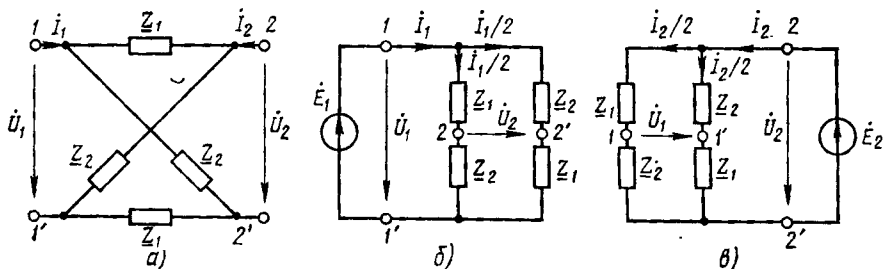


Рис. 8.18. К примеру 8.14

определяются в режиме холостого хода на зажимах 2—2' (рис. 8.18, б), а параметры  $\underline{Z}_{12} = \dot{U}_1 / \dot{I}_2 |_{\dot{I}_1=0}$  и  $\underline{Z}_{22} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 |_{\dot{I}_1=0}$  — в режиме холостого хода на зажимах 1—1' (рис. 8.18, в). В режиме холостого хода на зажимах 2—2'

$$\dot{I}_1 = 2\dot{U}_1 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2); \dot{U}_2 = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1) \dot{I}_1 / 2,$$

а в режиме холостого хода на зажимах 1—1'

$$\dot{I}_2 = 2\dot{U}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2); \dot{U}_1 = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1) \dot{I}_2 / 2,$$

откуда

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1)/2; & (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1)/2 \\ (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1)/2; & (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1)/2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотренный метод определения первичных параметров проходных четырехполосников является наиболее универсальным и широко используется на практике. В то же время процесс нахождения первичных параметров проходных четырехполосников во многих случаях может быть существенно упрощен за счет использования ряда других, менее общих методов. В частности, если для рассматриваемого четырехполосника известны первичные параметры, образующие систему любого типа, то для определения первичных параметров любого другого типа целесообразно воспользоваться формулами перехода.



**Пример 8.15.** Определим  $A$ -параметры  $\Gamma$ -образного четырехполосника (см. рис. 8.17 а).

Используя известные значения  $H$ -параметров данного четырехполосника (см. пример 8.13) и применяя формулы перехода (см. приложение 2), находим

$$\underline{A}_{11} = -\Delta_H / \underline{H}_{21} = 1 + \underline{Z}_b / \underline{Z}_a; \underline{A}_{12} = -\underline{H}_{11} / \underline{H}_{21} = \underline{Z}_b;$$

$$\underline{A}_{21} = -\underline{H}_{22} / \underline{H}_{21} = 1 / \underline{Z}_a; \underline{A}_{22} = -1 / \underline{H}_{21} = 1.$$



**Пример 8.16.** Определим  $A$ -параметры симметричного мостового четырехполосника, рассмотренного в примере 8.14.

Используя формулы перехода, находим

$$\underline{A}_{11} = \underline{Z}_{11} / \underline{Z}_{21} = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1) / (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1); \underline{A}_{12} = \Delta_Z / \underline{Z}_{21} = 2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1); \underline{A}_{21} =$$

$$= 1 / \underline{Z}_{21} = 2 / (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1); \underline{A}_{22} = \underline{Z}_{22} / \underline{Z}_{21} = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1) / (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1).$$

Первичные параметры несложных четырехполосников могут быть определены путем преобразования соответствующих уравнений электрического равновесия непосредственно к одной из форм записи основных уравнений четырехполосника (8.28)—(8.33).



**Пример 8.17.** Определим  $A$ -параметры идеального трансформатора, комплексная схема замещения которого приведена на рис. 2.54, а.

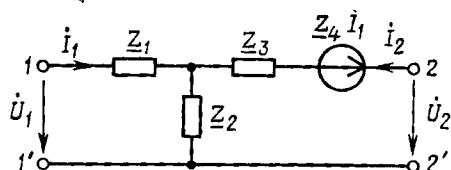
Токи и напряжения первичной и вторичной обмоток идеального трансформатора связаны соотношениями (2.182), представляющими собой не что иное, как основные уравнения трансформатора в форме  $A$ . Сравнивая уравнения (2.182) и (8.32), находим

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1/n; & 0 \\ 0; & n \end{bmatrix}.$$



**Пример 8.18.** Определим  $Z$ -параметры четырехполюсника рис. 8.19, а.

Подключая к зажимам 1—1' и 2—2' источники напряжения  $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$ ,  $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$  и составляя систему уравнений электрического равновесия полученной цепи (рис. 8.19, б) по методу контурных токов:



$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \dot{I}_{11} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{22} = \dot{E}_1;$$

$$(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \dot{I}_{22} + \underline{Z}_2 \dot{I}_{11} = \dot{E}_2 - \underline{Z}_4 \dot{I}_{11},$$

где  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_1$ ;  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_2$ ,

получаем

$$\dot{U}_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) \dot{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \dot{I}_2;$$

откуда

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2; & \underline{Z}_2 \\ \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4; & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{bmatrix}.$$

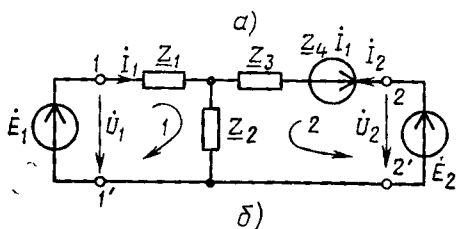


Рис. 8.19. К примеру 8.18

Если для какого-либо многополюсника известна неопределенная матрица проводимостей или сопротивлений, то параметры проходного четырехполюсника, который получается из данного многополюсника при определенном выборе пар входных и выходных зажимов, могут быть определены с использованием ранее рассмотренных свойств неопределенных матриц первичных параметров неавтономных многополюсников.



**Пример 8.19.** Определим  $Y$ -параметры проходного четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 8.20.

Сравнивая схемы, приведенные на рис. 8.20 и 8.5, устанавливаем, что проходной четырехполюсник исследуемого типа получается из многополюсника, рассмотренного в примере 8.1, при  $\dot{U}_{30} = 0$  и  $\underline{S} = \underline{Y}_4$ . Следовательно, матрица

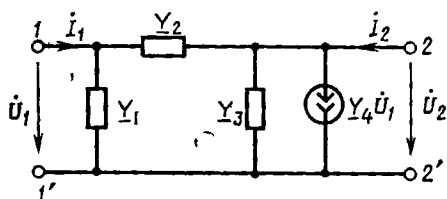


Рис. 8.20. К примеру 8.19

$Y$ -параметров проходного четырехполюсника может быть получена из неопределенной матрицы проводимостей такого многополюсника путем вычеркивания строки и столбца, соответствующих выводу 3, и замены  $\underline{S}$  на  $\underline{Y}_4$ :

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2; & -\underline{Y}_2 \\ \underline{Y}_4 - \underline{Y}_2; & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \end{bmatrix}.$$

Пример 8.20. У неавтономного многополюсника (рис. 8.21, а) выделены две пары зажимов 1—5 и 2—3. Найдем Z-параметры полученного проходного четырехполюсника (рис. 8.21, б) по известной матрице сопротивлений исходного многополюсника\*)

$$\underline{Z}_{ij}^* = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}^* & \underline{Z}_{12}^* & \underline{Z}_{13}^* & \underline{Z}_{14}^* & \underline{Z}_{15}^* \\ \underline{Z}_{21}^* & \underline{Z}_{22}^* & \underline{Z}_{23}^* & \underline{Z}_{24}^* & \underline{Z}_{25}^* \\ \underline{Z}_{31}^* & \underline{Z}_{32}^* & \underline{Z}_{33}^* & \underline{Z}_{34}^* & \underline{Z}_{35}^* \\ \underline{Z}_{41}^* & \underline{Z}_{42}^* & \underline{Z}_{43}^* & \underline{Z}_{44}^* & \underline{Z}_{45}^* \\ \underline{Z}_{51}^* & \underline{Z}_{52}^* & \underline{Z}_{53}^* & \underline{Z}_{54}^* & \underline{Z}_{55}^* \end{bmatrix}.$$

Из сравнения рис. 8.21, а, б видно, что проходной четырехполюсник получается из многополюсника путем размыкания сторон 2, 4 и 5. Матрица Z-параметров многополюсника с разомкнутыми сторонами получается из неопределенной матрицы сопротивлений при вычеркивании столбцов и строк, соответствующих разомкнутым сторонам:

$$\underline{Z}_{ij}^{*(2)(4)(5)} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}^* & \underline{Z}_{13}^* \\ \underline{Z}_{31}^* & \underline{Z}_{33}^* \end{bmatrix}.$$

Основная система уравнений многополюсника с разомкнутыми сторонами 2, 4, 5 имеет вид

$$\dot{U}_1^* = \underline{Z}_{11}^* \dot{I}_1^* + \underline{Z}_{13}^* \dot{I}_3^*;$$

$$\dot{U}_3^* = \underline{Z}_{31}^* \dot{I}_1^* + \underline{Z}_{33}^* \dot{I}_3^*.$$

Учитывая соотношения между токами и напряжениями проходного четырехполюсника и исходного многополюсника с разомкнутыми сторонами  $\dot{U}_1^* = \dot{U}_1$ ;  $\dot{U}_3^* = -\dot{U}_2$ ;  $\dot{I}_1^* = \dot{I}_1$ ;  $\dot{I}_3^* = -\dot{I}_2$ , получаем

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}^* \dot{I}_1 - \underline{Z}_{13}^* \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = -\underline{Z}_{31}^* \dot{I}_1 + \underline{Z}_{33}^* \dot{I}_2,$$

откуда

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}^* & -\underline{Z}_{13}^* \\ -\underline{Z}_{31}^* & \underline{Z}_{33}^* \end{bmatrix}.$$

Первичные параметры линейного неавтономного проходного четырехполюсника могут быть выражены через элементы матриц контурных сопротивлений или узловых проводимостей. Рассмотрим произвольный линейный неавтономный проходной четырехполюсник (рис. 8.22). Используя теорему компенсации, заменим ветви, подклю-

\*) Все величины, относящиеся к исходному многополюснику, выделены звездочкой.

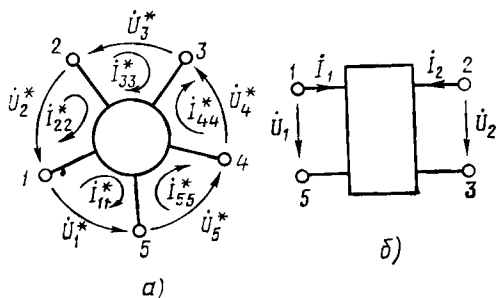


Рис. 8.21. К примеру 8.20

ченые к зажимам 1—1' и 2—2', идеальными источниками напряжения  $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$  и  $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$ . Выберем дерево полученной цепи таким образом, чтобы ветви, содержащие источники напряжения, не вошли в состав ветвей дерева, и пронумеруем независимые контуры так, чтобы контур, в состав которого входит источник  $\dot{E}_1$ , был первым, а контур с источником  $\dot{E}_2$  — вторым (общее число контуров равно  $n$ ). В связи

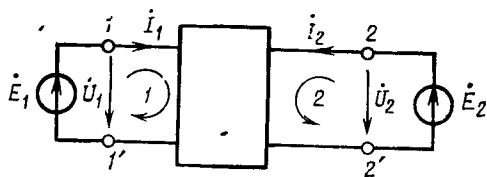


Рис. 8.22. К определению  $Y$ -параметров четырехполюсника через элементы матрицы контурных сопротивлений

с тем что рассматриваемый четырехполюсник неавтономный и, следовательно, не содержит неуправляемых источников энергии, контурные э. д. с. всех контуров, кроме первого и второго, равны нулю ( $\dot{E}_{11} = \dot{E}_1$ ,  $\dot{E}_{22} = \dot{E}_2$ ,  $\dot{E}_{33} = \dot{E}_{44} = \dots = \dot{E}_{nn} = 0$ ).

Составляя систему контурных уравнений рассмат-

риваемой цепи и решая ее относительно токов первого  $\dot{I}_{11} = \dot{I}_1$  и второго  $\dot{I}_{22} = \dot{I}_2$  контуров, получаем

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \Delta_{11} \dot{E}_1 / \Delta + \Delta_{21} \dot{E}_2 / \Delta = \Delta_{11} \dot{U}_1 / \Delta + \Delta_{21} \dot{U}_2 / \Delta; \\ \dot{I}_2 &= \Delta_{12} \dot{E}_1 / \Delta + \Delta_{22} \dot{E}_2 / \Delta = \Delta_{12} \dot{U}_1 / \Delta + \Delta_{22} \dot{U}_2 / \Delta. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Из уравнений (8.36) и (8.28) следует, что  $Y$ -параметры произвольного линейного неавтономного проходного четырехполюсника могут быть выражены через определитель  $\Delta$  и алгебраические дополнения элементов  $\Delta_{ij}$  системы контурных уравнений четырехполюсника:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \Delta_{11} / \Delta; & \underline{Y}_{12} &= \Delta_{21} / \Delta; \\ \underline{Y}_{21} &= \Delta_{12} / \Delta; & \underline{Y}_{22} &= \Delta_{22} / \Delta. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Аналогичным образом, применяя метод узловых напряжений,  $Z$ -параметры неавтономного проходного четырехполюсника могут быть выражены через определитель  $\Delta$  и алгебраические дополнения элементов  $\Delta_{ij}$  матрицы узловых проводимостей:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \Delta_{11} / \Delta; & \underline{Z}_{12} &= \Delta_{21} / \Delta; \\ \underline{Z}_{21} &= \Delta_{12} / \Delta; & \underline{Z}_{22} &= \Delta_{22} / \Delta. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Используя соотношения (8.37), (8.38) и формулы перехода (см. приложение 2), любой из первичных параметров проходного четырехполюсника можно выразить либо через элементы матрицы его контурных сопротивлений, либо через элементы матрицы его узловых проводимостей.

Рассмотренный метод не нашел широкого применения для практического определения первичных параметров четырехполюсников, однако является весьма удобным при исследовании общих свойств матриц первичных параметров проходных четырехполюсников. В частности, анализируя выражения (8.37), (8.38), можно установить, что

матрицы  $Y$ - и  $Z$ -параметров взаимного четырехполюсника ( $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ ) симметричны относительно главной диагонали:

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}, \quad (8.39)$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}, \quad (8.40)$$

а матрицы  $Y$ - и  $Z$ -параметров симметричного четырехполюсника — относительно обеих диагоналей:

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}; \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}; \quad (8.41)$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}. \quad (8.42)$$

С помощью формул перехода и выражений (8.39)—(8.42) аналогичные соотношения устанавливаются между  $A$ -,  $H$ -,  $G$ - и  $B$ -параметрами взаимного и симметричного четырехполюсников (см. приложение 4).

В результате получаем, что из четырех первичных параметров, образующих любую из систем первичных параметров проходного неавтономного четырехполюсника, в случае взаимного четырехполюсника только три, а в случае симметричного четырехполюсника — только два параметра линейно независимы.

### Первичные параметры составных четырехполюсников

С о с т а в н ы м называется такой четырехполюсник, который может быть представлен как соединение нескольких более простых (элементарных) четырехполюсников. Если при соединении элементарных четырехполюсников не происходит изменения соотношений между напряжениями и токами на их зажимах, то первичные параметры составного четырехполюсника могут быть выражены через первичные пара-

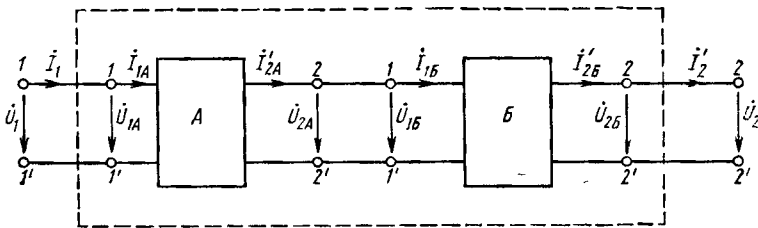


Рис. 8.23. Каскадное соединение проходных четырехполюсников

метры исходных четырехполюсников. Соединение элементарных четырехполюсников, удовлетворяющее такому условию, называется р е г у л я р н ы м. При этом токи, вытекающие через зажимы 1 и 2 каждого элементарного четырехполюсника, равны токам, вытекающим соответственно через зажимы 1' и 2'. Рассмотрим основные виды соединений элементарных четырехполюсников и получим соотношения между их первичными параметрами и параметрами составных четырехполюсников.

К а с к а д н о е с о е д и н е н и е. При каскадном, или цепочечном, соединении четырехполюсников А и Б (рис. 8.23) выходные зажимы одного из них (в данном случае А) соединены с входными зажи-

мами другого (Б). Ток и напряжение на зажимах 2—2' четырехполюсника А равны соответственно току и напряжению на зажимах 1—1' четырехполюсника Б\*):

$$I_{1Б} = I'_{2А}; \quad \dot{U}_{1Б} = \dot{U}_{2А}. \quad (8.43)$$

Ток  $I_1$  и напряжение  $\dot{U}_1$  на входе составного четырехполюсника (пунктир на рис. 8.23) совпадают с током  $I'_{1А}$  и напряжением  $\dot{U}'_{1А}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}'_{1А} \\ I'_{1А} \end{bmatrix}, \quad (8.44)$$

а ток  $I'_2$  и напряжение  $\dot{U}_2$  на выходе составного четырехполюсника совпадают с током  $I'_{2Б}$  и напряжением  $\dot{U}'_{2Б}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ I'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}'_{2Б} \\ I'_{2Б} \end{bmatrix}. \quad (8.45)$$

Из рис. 8.23 видно, что при каскадном соединении четырехполюсников ток, вытекающий через один из зажимов любой из сторон четырехполюсников А и Б, равен току, вытекающему через другой зажим той же стороны. Поэтому каскадное соединение любых четырехполюсников является регулярным.

Предположим, что первичные параметры элементарных четырехполюсников известны, и составим их основные уравнения в форме А

$$\begin{bmatrix} \dot{U}'_{1А} \\ I'_{1А} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}_А \begin{bmatrix} \dot{U}'_{2А} \\ I'_{2А} \end{bmatrix}; \quad (8.46)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}'_{1Б} \\ I'_{1Б} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}_Б \begin{bmatrix} \dot{U}'_{2Б} \\ I'_{2Б} \end{bmatrix}. \quad (8.47)$$

Используя соотношения (8.43)—(8.47), выразим ток и напряжение на входе составного четырехполюсника через ток и напряжение на его выходе:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}'_{1А} \\ I'_{1А} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}_А \begin{bmatrix} \dot{U}'_{2А} \\ I'_{2А} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}_А \begin{bmatrix} \dot{U}'_{1Б} \\ I'_{1Б} \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\underline{A}}_А \underline{\underline{A}}_Б \begin{bmatrix} \dot{U}'_{2Б} \\ I'_{2Б} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}_А \underline{\underline{A}}_Б \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ I'_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Сопоставляя выражения (8.48) и (8.32), устанавливаем, что матрица А-параметров составного четырехполюсника равна произведению матриц А-параметров входящих в него элементарных четырехполюсников А и Б:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_А \underline{\underline{A}}_Б. \quad (8.49)$$

\*) Здесь и в дальнейшем индексы «А» и «Б» присвоены всем величинам, относящимся соответственно к элементарным четырехполюсникам А и Б.



Выполняя аналогичные преобразования, можно показать, что при каскадном соединении  $N$  четырехполюсников матрица  $A$ -параметров составного четырехполюсника равна произведению матрицы  $A$ -параметров всех входящих в него элементарных четырехполюсников:

$$\underline{A} = \underline{A}_1 \underline{A}_2 \dots \underline{A}_N. \quad (8.50)$$

В связи с тем что произведение матриц в общем случае не подчиняется переместительному закону, порядок расположения матриц в выражении (8.50) должен соответствовать порядку следования четырехполюсников в цепочке.



**Пример 8.21.** Симметричный  $\Pi$ -образный четырехполюсник (рис. 8.24, а) может быть представлен в виде каскадного соединения двух  $\Gamma$ -образных четырехполюсников А и Б (рис. 8.24, б),  $A$ -параметры которых были определены в примерах 8.12 и 8.15:

$$\underline{A}_A = \begin{bmatrix} 1; & \underline{Z}_1/2 \\ 1/(2\underline{Z}_2); & 1 + \underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2) \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}_B = \begin{bmatrix} 1 + \underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2); & \underline{Z}_1/2 \\ 1/(2\underline{Z}_2); & 1 \end{bmatrix}.$$

Перемножая матрицы  $A$ -параметров элементарных четырехполюсников, находим матрицу первичных параметров симметричного  $\Pi$ -образного четырехполюсника

$$\underline{A}_\Pi = \underline{A}_A \underline{A}_B = \begin{bmatrix} 1 + \underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2); & \underline{Z}_1 \\ (1/\underline{Z}_2)(1 + \underline{Z}_1/4\underline{Z}_2); & 1 + \underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2) \end{bmatrix}.$$

Если элементарные четырехполюсники, включенные каскадно, поменять местами (рис. 8.24, в), то полученный таким образом составной четырехполюсник будет представлять собой симметричный  $T$ -образный четырехполюсник (рис.

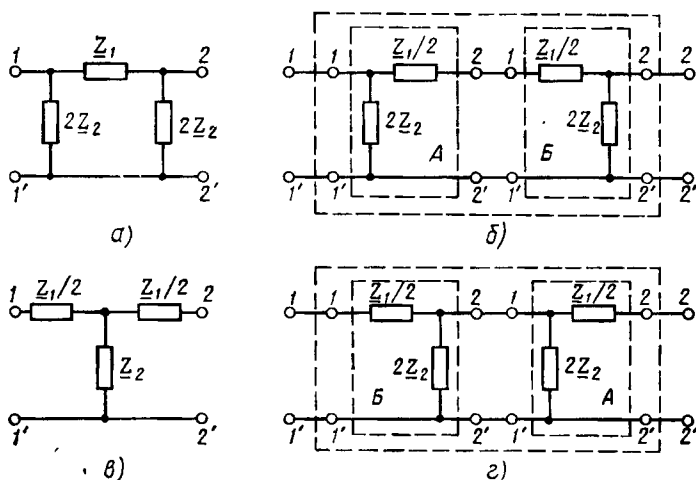


Рис. 8.24. К примеру 8.20

8.27, в). Матрица  $A$ -параметров такого четырехполюсника может быть получена путем умножения матрицы  $A$ -параметров четырехполюсника  $B$  на матрицу  $A$ -параметров четырехполюсника  $A$ :

$$\underline{A}_T = \underline{A}_B \underline{A}_A = \begin{bmatrix} 1 + \underline{Z}_1 / (2\underline{Z}_2); & \underline{Z}_1 (1 + \underline{Z}_1 / 4\underline{Z}_2) \\ 1 / \underline{Z}_2; & 1 + \underline{Z}_1 / (2\underline{Z}_2) \end{bmatrix}.$$

Параллельное соединение. При параллельном соединении четырехполюсника  $A$  и  $B$  (рис. 8.25) напряжение на входных и выходных зажимах составного четырехполюсника равны соответственно напряжениям на входных и выходных зажимах элементарных четырехполюсников:

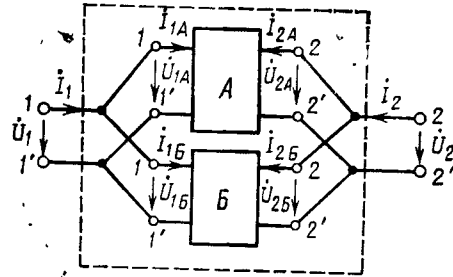


Рис. 8.25. Параллельное соединение проходных четырехполюсников

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1A} \\ \dot{U}_{2A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{1B} \\ \dot{U}_{2B} \end{bmatrix}, \quad (8.51)$$

а токи его входных и выходных зажимов — сумме токов входных и выходных зажимов элементарных четырехполюсников

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} + \dot{I}_{1B} \\ \dot{I}_{2A} + \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_{1B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix}. \quad (8.52)$$

Если параллельное соединение четырехполюсников  $A$  и  $B$  удовлетворяет условию регулярности, то матрица  $Y$ -параметров составного четырехполюсника равна сумме матриц  $Y$ -параметров элементарных четырехполюсников. Действительно, используя основные уравнения элементарных четырехполюсников в форме  $Y$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} = \underline{Y}_A \begin{bmatrix} \dot{U}_{1A} \\ \dot{U}_{2A} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_{1B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} = \underline{Y}_B \begin{bmatrix} \dot{U}_{1B} \\ \dot{U}_{2B} \end{bmatrix}$$

и соотношения (8.51), (8.52), токи входных и выходных зажимов составного четырехполюсника можно выразить через напряжения этих зажимов:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{1A} \\ \dot{I}_{2A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}_{1B} \\ \dot{I}_{2B} \end{bmatrix} = \underline{Y}_A \begin{bmatrix} \dot{U}_{1A} \\ \dot{U}_{2A} \end{bmatrix} + \underline{Y}_B \begin{bmatrix} \dot{U}_{1B} \\ \dot{U}_{2B} \end{bmatrix} = \\ = (\underline{Y}_A + \underline{Y}_B) \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (8.53)$$

откуда следует, что

$$\underline{Y} = \underline{Y}_A + \underline{Y}_B. \quad (8.54)$$

Используя аналогичную методику, можно показать, что при последовательном соединении элементарных четырехполюсников (рис. 8.26) матрица  $Z$ -параметров составного четырехполюсника равна сумме матриц  $Z$ -параметров элементарных четырехполюсников

$$\underline{Z} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_B. \quad (8.55)$$

При параллельно-последовательном соединении четырехполюсников (рис. 8.27, а) суммируются матрицы  $G$ -параметров

$$\underline{G} = \underline{G}_A + \underline{G}_B, \quad (8.56)$$

а при последовательно-параллельном соединении (рис. 8.27, б) — матрицы  $H$ -параметров

$$\underline{H} = \underline{H}_A + \underline{H}_B. \quad (8.57)$$

Формулы (8.54)—(8.57) можно обобщить на случай регулярного соединения произвольного количества четырехполюсников.

Нетрудно убедиться, что попытки выразить первичные параметры составных четырехполюсников (см. рис. 8.23, 8.25—8.27) через коэф-

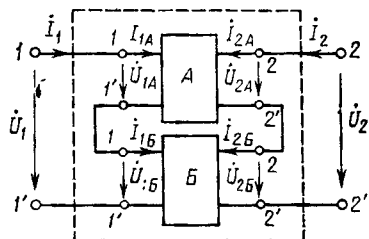


Рис. 8.26. Последовательное соединение проходных четырехполюсников

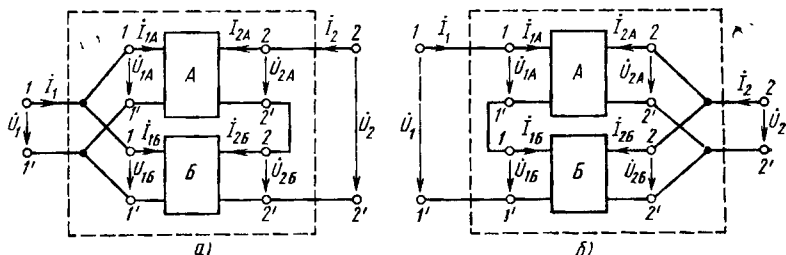


Рис. 8.27. Параллельно-последовательное (а) и последовательно-параллельное (б) соединения проходных четырехполюсников

фициенты других систем первичных параметров элементарных четырехполюсников приводят к более сложным по сравнению с (8.49), (8.54)—(8.57) соотношениям.

Таким образом, каждому из рассмотренных основных способов соединения четырехполюсников соответствует определенная система первичных параметров, применяя которую, можно получить наиболее простые соотношения между первичными параметрами составного четырехполюсника и первичными параметрами входящих в него элементарных четырехполюсников.

Наиболее сложным этапом определения первичных параметров составных четырехполюсников является проверка регулярности соединения элементарных четырехполюсников. Заметим, что соединение че-

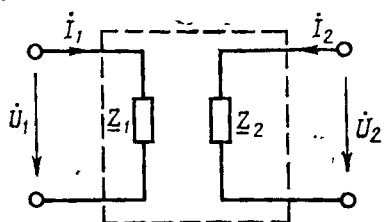


Рис. 8.28. Разорванный четырехполюсник

тырехполюсников будет регулярным, если каждый из параллельно включенных четырехполюсников является уравновешенным, если при параллельном или последовательном соединении четырехполюсников, имеющих один общий вывод, все общие выводы объединяются; если произвольный четырехполюсник соединяется любым способом с так называемым «разорванным» четырехполюсником (рис. 8.28) и если произвольный четырехполюсник соединяется любым способом с четырехполюсником, ко входу и (или) выходу которого подключен линейный трансформатор (см. рис. 2.52).



**Пример 8.22.** Определим первичные параметры составного четырехполюсника (рис. 8.29, а), если известна матрица  $Y$ -параметров входящего в него элементарного четырехполюсника  $A$  (полевой транзистор в схеме с общим истоком):

$$\underline{Y}_A = \begin{bmatrix} j\omega (C_{зв} + C_{зс}); & -j\omega C_{зс} \\ \underline{S} - j\omega C_{зс} & G_i + j\omega (C_{зс} + C_{сн}) \end{bmatrix}$$

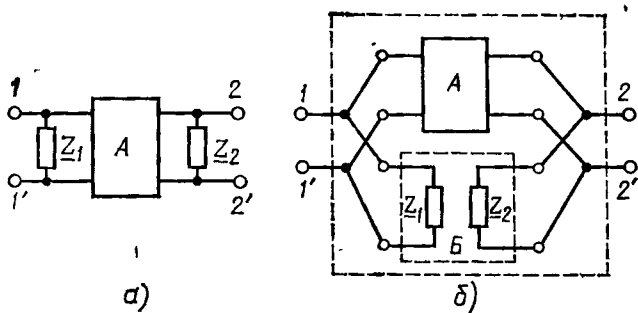


Рис. 8.29. К примеру 8.22

Представим составной четырехполюсник в виде параллельного соединения четырехполюсника  $A$  и «разорванного» четырехполюсника  $B$  (рис. 8.29, б), тогда

$$\underline{Y}_B = \begin{bmatrix} 1/\underline{Z}_1; & 0 \\ 0; & 1/\underline{Z}_2 \end{bmatrix}$$

В связи с тем что параллельное соединение «разорванного» четырехполюсника с любыми четырехполюсниками является регулярным,  $Y$ -параметры составного четырехполюсника находятся суммированием соответствующих параметров четырехполюсников  $A$  и  $B$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_A + \underline{Y}_B = \begin{bmatrix} 1/\underline{Z}_1 + j\omega (C_{зв} + C_{зс}); & -j\omega C_{зс} \\ \underline{S} - j\omega C_{зс}; & G_i + (1/\underline{Z}_2) + j\omega (C_{зс} + C_{сн}) \end{bmatrix}$$

## Схемы замещения неавтономных проходных четырехполюсников

Ранее было установлено, что соотношения между токами и напряжениями на зажимах любого линейного неавтономного проходного четырехполюсника независимо от числа входящих в него элементов и способа их соединения могут быть описаны системой из двух уравнений, содержащих в общем случае не более четырех независимых коэффициентов. Убедимся, что такой системе уравнений всегда можно поставить в соответствие идеализированную электрическую цепь, содержащую не более четырех элементов, параметры которых могут быть выражены через независимые коэффициенты основной системы уравнений четырехполюсника (условное графическое изображение такой цепи называется эквивалентной схемой или схемой замещения четырехполюсника).

Таким образом, каждому линейному неавтономному проходному четырехполюснику может быть поставлена в соответствие эквивалентная схема, содержащая не более четырех элементов.

Для каждого четырехполюсника можно построить несколько эквивалентных схем, имеющих различную топологию и отличающихся как типом изображенных на них элементов, так и значениями их параметров. Выбор той или иной эквивалентной схемы определяется удобством ее применения в рамках решаемой задачи и, в частности, простотой нахождения параметров ее элементов по заданным выражениям для первичных параметров четырехполюсника. Широкое распространение на практике получили Т-образная (см. рис. 8.19, а) и П-образная (см. рис. 8.20) схемы замещения, получившие название канонических схем замещения линейного неавтономного четырехполюсника. Параметры элементов Т-образной схемы замещения связаны с Z-параметрами четырехполюсника соотношениями

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}; & \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_{12}; \\ \underline{Z}_3 &= \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}; & \underline{Z}_4 &= \underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{12}, \end{aligned} \quad (8.58)$$

а параметры элементов П-образной схемы замещения можно найти по известным значениям Y-параметров

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 &= \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12}; & \underline{Y}_2 &= -\underline{Y}_{12}; \\ \underline{Y}_3 &= \underline{Z}_{22} + \underline{Y}_{12}; & \underline{Y}_4 &= \underline{Y}_{21} - \underline{Y}_{12} \end{aligned} \quad (8.59)$$

с помощью соотношений, полученных в примерах 8.18 и 8.19 соответственно.

Первичные параметры взаимного четырехполюсника связаны между собой соотношениями (8.39), (8.40), поэтому коэффициенты управления управляемых источников напряжения (см. рис. 8.19, а) и тока (см. рис. 8.20) равны нулю ( $\underline{Z}_4 = 0$ ,  $\underline{Y}_4 = 0$ ). Вследствие этого канонические схемы замещения взаимных четырехполюсников (см. рис. 8.14, б в) не содержат управляемых источников тока или напряжения. Пара-

метры элементов эквивалентных схем симметричных четырехполюсников, кроме того, связаны соотношениями

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12};$$

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12}.$$

T- и П-образные схемы, изображенные на рис. 8.14, б, в, представляют собой канонические схемы замещения взаимных неуравновешенных четырехполюсников. Для взаимных уравновешенных четырехполюсников используют эквивалентные схемы, приведенные на

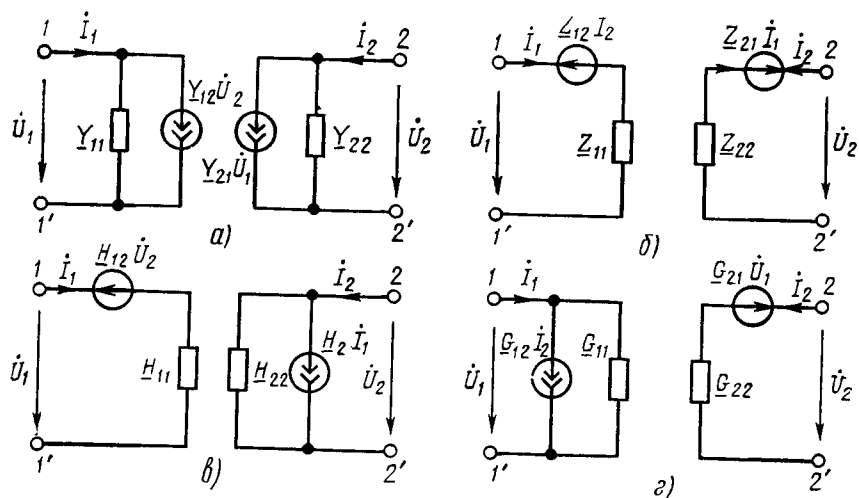


Рис. 8.30. Схемы замещения проходных четырехполюсников

рис. 8.14, г, д. Параметры элементов этих эквивалентных схем также рассчитываются по формулам (8.58) и (8.59), а выражения для первичных параметров уравновешенных четырехполюсников совпадают соответственно с выражениями для первичных параметров неуравновешенных четырехполюсников. При решении ряда конкретных задач может оказаться удобным применить эквивалентные схемы четырехполюсника, изображенные на рис. 8.30, параметры элементов которых выражаются через  $Y$ -,  $Z$ -,  $H$ - и  $G$ -параметры четырехполюсника соответственно.

Широко применяют в теории цепей (особенно при решении задач синтеза) мостовую схему замещения симметричного четырехполюсника (см. рис. 8.18, а). Параметры элементов этой эквивалентной схемы весьма просто выражаются через  $Z$ -параметры четырехполюсника (см. пример 8.14):  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{12}$ ;  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}$ .

Следует иметь в виду, что комплексным схемам замещения четырехполюсников (см. рис. 8.14, б—д, 8.19, а, 8.20 и 8.30) не всегда можно поставить в соответствие идеализированную электрическую цепь, состоящую из элементов с положительными вещественными параметрами

(с подобной ситуацией сталкивались при знакомстве с эквивалентными преобразованиями цепей со связанными индуктивностями). Несмотря на это, применение таких эквивалентных схем значительно облегчает изучение процессов в цепях.

### Автономные проходные четырехполюсники

Рассмотрим произвольный линейный автономный проходной четырехполюсник  $AЧ$ , схема и параметры элементов которого известны. Заменим внешние по отношению к четырехполюснику ветви источниками напряжения  $\dot{E}_1 = \dot{U}_{1A}$ ,  $\dot{E}_2 = \dot{U}_{2A}$  (рис. 8.31, а) и, используя метод контурных токов, найдем токи входных и выходных зажимов четырехполюсника. Если система независимых контуров рассматриваемой цепи выбрана таким образом, что ветвь, содержащая источ-

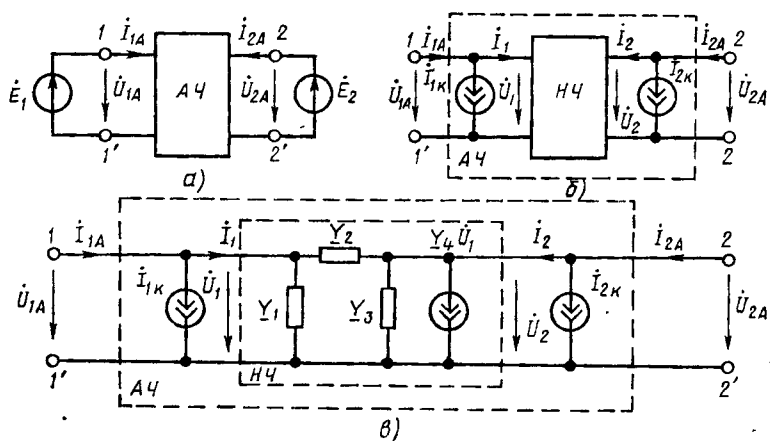


Рис. 8.31. К определению  $\Pi$ -образной схемы замещения автономного проходного четырехполюсника

ник напряжения  $\dot{E}_1$ , входит только в контур 1, а ветвь, содержащая источник напряжения  $\dot{E}_2$ , — только в контур 2, то искомые токи будут равны контурным токам первого и второго контуров:

$$\begin{aligned} I_{1A} &= \Delta_{11} \dot{E}_1 / \Delta + \Delta_{21} \dot{E}_2 / \Delta + \dot{I}_{1K}; \\ I_{2A} &= \Delta_{12} \dot{E}_1 / \Delta + \Delta_{22} \dot{E}_2 / \Delta + \dot{I}_{2K}, \end{aligned} \quad (8.60)$$

где

$$\dot{I}_{1K} = \Delta_{11} (\dot{E}_{11} - \dot{E}_1) / \Delta + \Delta_{21} (\dot{E}_{22} - \dot{E}_2) / \Delta + \sum_{j=3}^n \Delta_{j1} \dot{E}_{jj} / \Delta$$

и

$$\dot{I}_{2K} = \Delta_{12} (\dot{E}_{11} - \dot{E}_1) / \Delta + \Delta_{22} (\dot{E}_{22} - \dot{E}_2) / \Delta + \sum_{j=3}^n \Delta_{j2} \dot{E}_{jj} / \Delta -$$

составляющие контурных токов первого и второго контуров, вызванные действием независимых источников, находящихся внутри четырехполюсника  $A4$ .

Как видно из уравнений (8.60), при одновременном закорачивании источников  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  токи  $\dot{I}_{1A}$  и  $\dot{I}_{2A}$  равны соответственно  $\dot{I}_{1K}$  и  $\dot{I}_{2K}$ . Следовательно,  $\dot{I}_{1K}$  и  $\dot{I}_{2K}$  являются токами короткого замыкания внешних выводов автономного четырехполюсника (напомним, что токи короткого замыкания неавтономного четырехполюсника равны нулю). Входящие в уравнения (8.60) коэффициенты  $\Delta_{11}/\Delta$ ,  $\Delta_{12}/\Delta$ ,  $\Delta_{21}/\Delta$  и  $\Delta_{22}/\Delta$  в соответствии с выражениями (8.37) представляют собой  $Y$ -параметры неавтономного четырехполюсника, который получается из рассматриваемого автономного при выключении всех входящих в него независимых источников. Переходя в (8.60) от э. д. с.  $E_1, E_2$  к напряжениям  $\dot{U}_{1A}, \dot{U}_{2A}$  и используя выражения (8.37), получаем систему основных уравнений автономного четырехполюсника в форме  $Y$ :

$$\begin{aligned} \dot{I}_{1A} &= \underline{Y}_{11} \dot{U}_{1A} + \underline{Y}_{12} \dot{U}_{2A} + \dot{I}_{1K}; \\ \dot{I}_{2A} &= \underline{Y}_{21} \dot{U}_{1A} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{2A} + \dot{I}_{2K}. \end{aligned}$$

Введем токи, равные разности токов выводов автономного четырехполюсника и соответствующих токов короткого замыкания:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_{1A} - \dot{I}_{1K} = \underline{Y}_{11} \dot{U}_{1A} + \underline{Y}_{12} \dot{U}_{2A} = \underline{Y}_{11} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_{2A} - \dot{I}_{2K} = \underline{Y}_{21} \dot{U}_{1A} + \underline{Y}_{22} \dot{U}_{2A} = \underline{Y}_{21} \dot{U}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{U}_2. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Система уравнений (8.61) по форме совпадает с системой основных уравнений неавтономного четырехполюсника, полученного из рассматриваемого автономного четырехполюсника путем выключения всех входящих в него независимых источников и замены  $\dot{U}_{1A}$  и  $\dot{U}_{2A}$  на  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ . Используя эту систему, четырехполюснику  $AЧ$  можно поставить в соответствие эквивалентную схему, содержащую неавтономный четырехполюсник  $НЧ$ , характеризующийся параметрами  $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{21}, \underline{Y}_{22}$ , и два независимых источника тока  $\dot{J}_{1K} = \dot{I}_{1K}$  и  $\dot{J}_{2K} = \dot{I}_{2K}$  (рис. 8.31, б). Заменяя  $НЧ$  канонической  $\Pi$ -образной схемой замещения, получаем полную эквивалентную схему автономного четырехполюсника, содержащую в общем случае шесть элементов (рис. 8.31, в).

Если внешние по отношению к автономному четырехполюснику ветви заменить источниками тока  $\dot{J}_1 = \dot{I}_{1A}$  и  $\dot{J}_2 = \dot{I}_{2A}$  (рис. 8.32, а), то, анализируя полученную цепь с помощью метода узловых напряжений, можно получить основные уравнения автономного четырехполюсника в форме  $Z$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1A} &= \underline{Z}_{11} \dot{I}_{1A} + \underline{Z}_{12} \dot{I}_{2A} + \dot{U}_{1K}; \\ \dot{U}_{2A} &= \underline{Z}_{21} \dot{I}_{1A} + \underline{Z}_{22} \dot{I}_{2A} + \dot{U}_{2K}. \end{aligned} \quad (8.62)$$



Здесь  $\underline{Z}_{11}$ ,  $\underline{Z}_{12}$ ,  $\underline{Z}_{21}$ ,  $\underline{Z}_{22}$  — первичные параметры  $HЧ$ , получающегося из  $AЧ$  путем выключения всех независимых источников;  $\dot{U}_{1x}$  и  $\dot{U}_{2x}$  — напряжения холостого хода на входных и выходных зажимах автономного четырехполюсника. В соответствии с уравнениями (8.62)  $AЧ$  можно поставить в соответствие схему замещения, состоящую из  $HЧ$  и независимых источников напряжения  $\dot{E}_{1x} = \dot{U}_{1x}$ ,  $\dot{E}_{2x} = \dot{U}_{2x}$

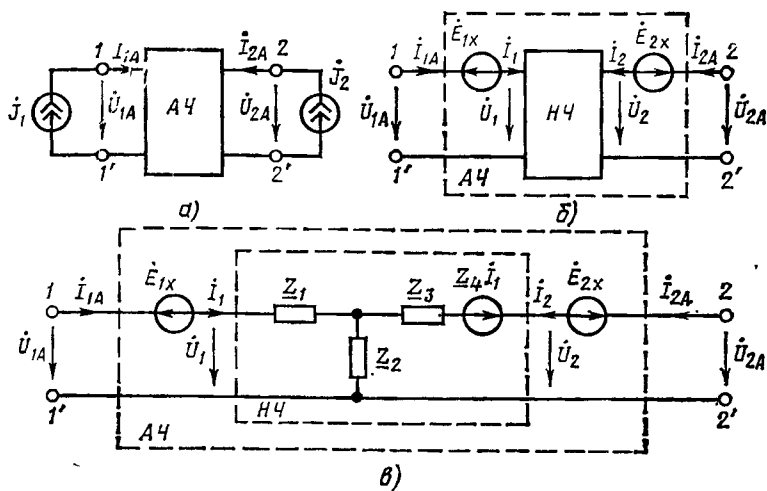


Рис. 8.32. К определению Т-образной схемы замещения автономного проходного четырехполюсника

(рис. 8.32, б). Представляя неавтономный четырехполюсник Т-образной канонической схемой замещения, получаем полную эквивалентную схему автономного четырехполюсника (рис. 8.32, в).

Из полученных результатов видно, что автономный проходной четырехполюсник в общем случае характеризуется шестью независимыми параметрами, из которых четыре представляют собой первичные параметры неавтономного четырехполюсника, получающегося из данного автономного путем выключения всех независимых источников, а два параметра являются либо напряжениями холостого хода, либо токами короткого замыкания, измеряемыми при одновременном размыкании или одновременном закорачивании внешних по отношению к автономному четырехполюснику ветвей.

### § 8.3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕАВТОНОМНЫХ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

**Комплексные частотные характеристики четырехполюсников при произвольной внешней нагрузке**

Несмотря на то что первичные параметры четырехполюсника представляют собой только некоторые комплексные частотные характеристики, измеренные в одном из предельных режимов (холостого хода

или короткого замыкания), зная первичные параметры четырехполюсника, образующие любую из систем первичных параметров, можно найти его любые комплексные частотные характеристики при произвольной внешней нагрузке. Если, например, известны значения  $A$ -параметров неавтономного проходного четырехполюсника, можно определить его комплексное входное сопротивление со стороны зажимов  $1-1'$   $Z_{11}(j\omega)$  и комплексные коэффициенты передачи по напряжению  $K_{21}(j\omega)$  и току  $G_{21}(j\omega)$  от зажимов  $1-1'$  к зажимам  $2-2'$  при произвольной нагрузке  $Z_{H2}$ , подключенной к зажимам  $2-2'$  (рис. 8.33, а).

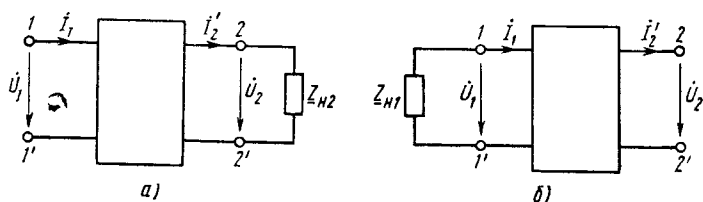


Рис. 8.33. К определению комплексных частотных характеристик проходного четырехполюсника при произвольной нагрузке

Ток и напряжение на выходных зажимах четырехполюсника в рассматриваемом режиме связаны соотношением  $I_2' = U_2/Z_{H2}$ , используя которое, основные уравнения четырехполюсника в форме  $A$  (8.32) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 - \underline{A}_{11} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \dot{U}_2 / \underline{Z}_{H2} &= (\underline{A}_{11} \underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{12}) \dot{U}_2 / \underline{Z}_{H2} = (\underline{A}_{11} \underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{12}) \dot{I}_2'; \\ \dot{I}_1 &= \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{22} \dot{U}_2 / \underline{Z}_{H2} = (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{22}) \dot{U}_2 / \underline{Z}_{H2} = \\ &= (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{22}) \dot{I}_2'. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Из уравнений (8.63) следует, что

$$Z_{11}(j\omega) = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = (\underline{A}_{11} \underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{12}) / (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{22}); \quad (8.64)$$

$$K_{21}(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \underline{Z}_{H2} / (\underline{A}_{11} \underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{12}); \quad (8.65)$$

$$G_{21}(j\omega) = \dot{I}_2' / \dot{I}_1 = 1 / (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{H2} + \underline{A}_{22}). \quad (8.66)$$

В режиме холостого хода ( $\underline{Z}_{H2} = \infty$ ) коэффициент передачи четырехполюсника по току равен нулю, а входное сопротивление со стороны зажимов  $1-1'$  и коэффициент передачи по напряжению от зажимов  $1-1'$  к зажимам  $2-2'$  определяются выражениями

$$Z_{11x}(j\omega) = \underline{A}_{11} / \underline{A}_{21}; \quad K_{21x}(j\omega) = 1 / \underline{A}_{11}. \quad (8.67)$$

В режиме короткого замыкания ( $\underline{Z}_{H2} = 0$ ) коэффициент передачи по напряжению равен нулю, а входное сопротивление и коэффициент передачи по току определяются соотношениями

$$Z_{11k}(j\omega) = \underline{A}_{12} / \underline{A}_{22}; \quad G_{21k}(j\omega) = 1 / \underline{A}_{22}. \quad (8.68)$$

Рассмотрим случай так называемого обратного включения, когда сопротивление нагрузки

$$\underline{Z}_{н1} = -\dot{U}_1 / \dot{I}_1 \quad (8.69)$$

подключено к зажимам  $1-1'$  (рис. 8.33, б). Разрешая основные уравнения четырехполюсника (8.32) относительно  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}'_2$  и учитывая (8.69), получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= -(\underline{A}_{22} \underline{Z}_{н1} + \underline{A}_{12}) \dot{I}_1 / \Delta_A = (\underline{A}_{22} \underline{Z}_{н1} + \underline{A}_{12}) \dot{U}_1 / (\underline{Z}_{н1} \Delta_A); \\ \dot{I}'_2 &= (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{н1} + \underline{A}_{11}) \dot{I}_1 / \Delta_A = -(\underline{A}_{21} \underline{Z}_{н1} + \underline{A}_{11}) \dot{U}_1 / (\underline{Z}_{н1} \Delta_A). \end{aligned} \quad (8.70)$$

Используя (8.70), определяем входное сопротивление четырехполюсника и коэффициенты передачи четырехполюсника по напряжению и току в обратном включении:

$$Z_{22}(j\omega) = \dot{U}_2 / -\dot{I}'_2 = (\underline{A}_{22} \underline{Z}_{н1} + \underline{A}_{12}) / (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{н1} + \underline{A}_{11}); \quad (8.71)$$

$$K_{12}(j\omega) = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 = \underline{Z}_{н1} \Delta_A / (\underline{A}_{22} \underline{Z}_{н1} + \underline{A}_{12}); \quad (8.72)$$

$$G_{12}(j\omega) = -\dot{I}_1 / -\dot{I}'_2 = \Delta_A / (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{н1} + \underline{A}_{11}). \quad (8.73)$$

В отличие от  $Z_{22}(j\omega)$ ,  $K_{12}(j\omega)$  и  $G_{12}(j\omega)$  величины  $Z_{11}(j\omega)$ ,  $K_{21}(j\omega)$  и  $G_{21}(j\omega)$  называются входными сопротивлением и коэффициентами передачи четырехполюсника по напряжению и току в прямом включении. В режиме холостого хода на зажимах  $1-1'$  ( $\underline{Z}_{н1} = \infty$ ):

$$Z_{22x}(j\omega) = \underline{A}_{22} / \underline{A}_{21}; \quad K_{12x}(j\omega) = \Delta_A / \underline{A}_{22}, \quad (8.74)$$

а в режиме короткого замыкания ( $\underline{Z}_{н1} = 0$ )

$$Z_{22к}(j\omega) = \underline{A}_{12} / \underline{A}_{11}; \quad G_{12к}(j\omega) = \Delta_A / \underline{A}_{11}. \quad (8.75)$$

Используя аналогичную методику, выражения для любых комплексных частотных характеристик четырехполюсника как в прямом, так и в обратном включении могут быть найдены также в терминах  $Y$ ,  $Z$ -,  $H$ -,  $G$ - или  $B$ -параметров.

### Характеристические сопротивления неавтономного проходного четырехполюсника

Характеристическими сопротивлениями четырехполюсника называют пару сопротивлений  $\underline{Z}_{с1}$  и  $\underline{Z}_{с2}$ , которые выбраны таким образом, что при подключении к зажимам  $2-2'$  сопротивления  $\underline{Z}_{н2} = \underline{Z}_{с2}$ , входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов  $1-1'$  равно  $\underline{Z}_{с1}$ , а при подключении к зажимам  $1-1'$  сопротивления  $\underline{Z}_{н1} = \underline{Z}_{с1}$ , входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов  $2-2'$  равно  $\underline{Z}_{с2}$ . Сопротивление  $\underline{Z}_{с1}$  называется характеристическим входным, а  $\underline{Z}_{с2}$  — характеристическим выходным сопротивлением четырехполюсника. Подставляя в выражения для

входных сопротивлений четырехполюсника в прямом (8.64) и обратном (8.71) включениях  $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{C2}$ ,  $\underline{Z}_{11}(j\omega) = \underline{Z}_{C1}$ ,  $\underline{Z}_{H1} = \underline{Z}_{C1}$ ,  $\underline{Z}_{22}(j\omega) = \underline{Z}_{C2}$  и решая полученную систему уравнений

$$\underline{Z}_{C1} = (\underline{A}_{11} \underline{Z}_{C2} + \underline{A}_{12}) / (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{C2} + \underline{A}_{22});$$

$$\underline{Z}_{C2} = (\underline{A}_{22} \underline{Z}_{C1} + \underline{A}_{12}) / (\underline{A}_{21} \underline{Z}_{C1} + \underline{A}_{11})$$

относительно  $\underline{Z}_{C1}$  и  $\underline{Z}_{C2}$ , находим

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{12} / (\underline{A}_{21} \underline{A}_{22})}; \quad (8.76)$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12} / (\underline{A}_{21} \underline{A}_{11})}. \quad (8.77)$$

Используя выражения (8.67), (8.68), (8.74) и (8.75), убеждаемся, что характеристическое входное сопротивление четырехполюсника может быть определено как среднее геометрическое из его входных сопротивлений в прямом включении в режимах холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\underline{Z}_{11x}(j\omega) \underline{Z}_{11k}(j\omega)},$$

а характеристическое выходное сопротивление — как среднее геометрическое из его выходных сопротивлений в обратном включении в режимах холостого хода и короткого замыкания

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\underline{Z}_{22x}(j\omega) \underline{Z}_{22k}(j\omega)}.$$

Таким образом, характеристические сопротивления четырехполюсника могут быть найдены непосредственно по результатам опытов холостого хода и короткого замыкания.

Четырехполюсник, к зажимам 2—2' которого подключено сопротивление  $\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{C2}$ , будем называть четырехполюсником с согласованной нагрузкой на выходе. В соответствии с (8.65), (8.66) коэффициенты передачи такого четырехполюсника по току и напряжению от зажимов 1—1' к зажимам 2—2' определяются выражениями

$$K_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big|_{\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{C2}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}} \frac{1}{\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}}; \quad (8.78)$$

$$G_{21}(j\omega) = \frac{\dot{I}'_2}{I_1} \Big|_{\underline{Z}_{H2} = \underline{Z}_{C2}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} \frac{1}{\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}}, \quad (8.79)$$

откуда

$$K_{21}(j\omega) = \underline{A}_{22} G_{21}(j\omega) / \underline{A}_{11} = \underline{Z}_{C2} G_{21}(j\omega) / \underline{Z}_{C1}.$$

Для четырехполюсника с согласованной нагрузкой на входе ( $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{C1}$ ), аналогичным образом находим

$$K_{12}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{C1}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} \frac{\Delta_A}{\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}}; \quad (8.80)$$

$$G_{12}(j\omega) = \frac{-\dot{I}_1}{-\dot{I}'_2} \Big|_{\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{C1}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}} \frac{\Delta_A}{\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}} \quad (8.81)$$

и, следовательно,

$$K_{12}(j\omega) = \underline{A}_{11} G_{12}(j\omega) / \underline{A}_{22} = \underline{Z}_{C1} G_{12}(j\omega) / \underline{Z}_{C2}.$$

Если  $A$ -параметры четырехполюсника удовлетворяют условию  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ , то его характеристические входное и выходное сопротивления одинаковы:

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C = \sqrt{\underline{A}_{12} / \underline{A}_{21}}. \quad (8.82)$$

Коэффициенты передачи такого четырехполюсника по напряжению в прямом и обратном включениях равны соответственно коэффициентам передачи по току в прямом и обратном включениях:

$$K_{21}(j\omega) = G_{21}(j\omega) = 1 / (\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}); \quad (8.83)$$

$$K_{12}(j\omega) = G_{12}(j\omega) = \Delta_A / (\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}). \quad (8.84)$$

Из выражений (8.83), (8.84) следует, что у симметричного четырехполюсника,  $A$ -параметры которого связаны между собой соотношениями

$$\Delta_A = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1; \quad \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}, \quad (8.85)$$

коэффициенты передачи по току и напряжению в прямом и обратном включениях при согласованной нагрузке также одинаковы

$$K_{21}(j\omega) = G_{21}(j\omega) = K_{12}(j\omega) = G_{12}(j\omega) = 1 / (\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}). \quad (8.86)$$

Таким образом, отношение напряжений на зажимах 2—2' и 1—1' симметричного четырехполюсника с согласованной нагрузкой и на входе или выходе равно отношению соответствующих токов:

$$\dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \dot{I}'_2 / \dot{I}_1.$$

Очевидно, что входные сопротивления симметричного четырехполюсника в прямом и обратном включениях при согласованной нагрузке равны характеристическому сопротивлению четырехполюсника:  $\underline{Z}_{11}(j\omega) = \underline{Z}_{22}(j\omega) = \underline{Z}_C = \sqrt{\underline{A}_{12} / \underline{A}_{21}}$ .

## Характеристические постоянные передачи неавтономного проходного четырехполюсника

Характеристическими постоянными передачами неавтономного проходного четырехполюсника в прямом и обратном включениях называются два комплексных числа  $\underline{\Gamma}_1$  и  $\underline{\Gamma}_2$ , определяемые соотношениями

$$\underline{\Gamma}_1 = -\ln \sqrt{K_{21}(j\omega) G_{21}(j\omega)}; \quad (8.87)$$

$$\underline{\Gamma}_2 = -\ln \sqrt{K_{12}(j\omega) G_{12}(j\omega)}. \quad (8.88)$$

Здесь  $K_{21}(j\omega)$  и  $G_{21}(j\omega)$  — коэффициенты передачи по напряжению (8.78) и току (8.79) четырехполюсника с согласованной нагрузкой на выходе;  $K_{12}(j\omega)$  и  $G_{12}(j\omega)$  — коэффициенты передачи по напряжению (8.80) и току (8.81) четырехполюсника с согласованной нагрузкой на входе.

Подставляя соотношения (8.78)—(8.81) в (8.87), (8.88) и выполняя несложные преобразования, выражаем характеристические постоянные передачи четырехполюсника через его  $A$ -параметры:

$$\underline{\Gamma}_1 = \ln \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right); \quad (8.89)$$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_2 &= \ln \left[ \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right) / \Delta_A \right] = \\ &= -\ln \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} - \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right) \end{aligned} \quad (8.90)$$

или

$$e^{\underline{\Gamma}_1} = \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}, \quad (8.91)$$

$$e^{\underline{\Gamma}_2} = \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right) / \Delta_A = 1 / \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} - \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right). \quad (8.92)$$

Характеристические сопротивления четырехполюсника  $\underline{Z}_{C1}$ ,  $\underline{Z}_{C2}$  и характеристические постоянные передачи  $\underline{\Gamma}_1$ ,  $\underline{\Gamma}_2$  называются его характеристическими (вторичными) параметрами. Подобно первичным, характеристические параметры образуют систему независимых параметров неавтономного проходного четырехполюсника, определяющих соотношения между токами и напряжениями на его зажимах. Зная первичные параметры четырехполюсника и используя соотношения (8.76), (8.77), (8.89), (8.90), всегда можно найти его характеристические параметры  $\underline{Z}_{C1}$ ,  $\underline{Z}_{C2}$ ,  $\underline{\Gamma}_1$  и  $\underline{\Gamma}_2$ . В свою очередь первичные параметры четырехполюсника могут быть однозначно определены через его характеристические параметры. Действительно, используя (8.76), (8.77), получаем

$$\sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}} = \sqrt{\underline{Z}_{C1} \underline{Z}_{C2}}; \quad \sqrt{\underline{A}_{22}/\underline{A}_{11}} = \sqrt{\underline{Z}_{C2}/\underline{Z}_{C1}},$$

а используя (8.91), (8.92) —

$$\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} = (e^{\underline{\Gamma}_1} + e^{-\underline{\Gamma}_2})/2;$$

$$\sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} = (e^{\underline{\Gamma}_1} - e^{-\underline{\Gamma}_2})/2,$$

откуда

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\underline{Z}_{C1}/\underline{Z}_{C2}} (e^{\underline{\Gamma}_1} + e^{-\underline{\Gamma}_2})/2;$$

$$\underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{C1} \underline{Z}_{C2}} (e^{\underline{\Gamma}_1} - e^{-\underline{\Gamma}_2})/2;$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{C1} \underline{Z}_{C2}}} (e^{\underline{\Gamma}_1} + e^{-\underline{\Gamma}_2})/2;$$

$$\underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} (e^{\underline{\Gamma}_1} - e^{-\underline{\Gamma}_2})/2. \quad (8.93)$$

Таким образом, неавтономный проходной четырехполюсник в общем случае имеет четыре независимых характеристических параметра  $\underline{Z}_{C1}$ ,  $\underline{Z}_{C2}$ ,  $\underline{\Gamma}_1$  и  $\underline{\Gamma}_2$ .



**Пример 8.23.** Найдем характеристические параметры неавтономного четырехполюсника, схема которого приведена на рис. 8.34.

Используя данные, полученные из расчетов опытов холостого хода и короткого замыкания, находим матрицу первичных параметров четырехполюсника

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1, K & \underline{Z}_2/K \\ 1/(\underline{Z}_1 K) & \underline{Z}_2/(\underline{Z}_1 K) \end{bmatrix}.$$

Далее, применяя соотношения (8.76), (8.77), определяем характеристические входное и выходное сопротивления  $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_2$ .

Характеристические постоянные передачи четырехполюсника найдем с помощью соотношений (8.91), (8.92):  $e^{\underline{\Gamma}_1} = \frac{2}{K} \sqrt{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}}$ ;  $e^{-\underline{\Gamma}_2} = 0$ , откуда  $\underline{\Gamma}_1 =$

$$= \ln \left( \frac{2}{K} \sqrt{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}} \right); \quad \underline{\Gamma}_2 = \infty.$$

Рассматриваемый четырехполюсник имеет два различных по значению характеристических сопротивления и две различные по значению характеристические постоянные передачи.

Как видно из приложения 4, определитель матрицы A-параметров взаимного четырехполюсника  $\Delta_A = 1$ , поэтому характеристические постоянные передачи взаимного четырехполюсника в прямом и обратном включениях одинаковы:

$$\underline{\Gamma}_1 = \underline{\Gamma}_2 = \underline{\Gamma} = \ln \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right). \quad (8.94)$$

Следовательно, взаимный четырехполюсник имеет в общем случае три независимых характеристических параметра.

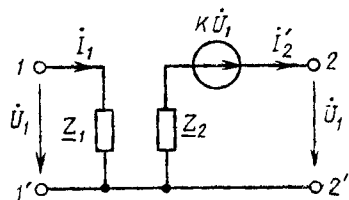


Рис. 8.34. К примеру 8.23

Переходя в (8.93) от экспонент к гиперболическим функциям

$$\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = (e^{\underline{\Gamma}} + e^{-\underline{\Gamma}})/2; \quad \operatorname{sh} \underline{\Gamma} = (e^{\underline{\Gamma}} - e^{-\underline{\Gamma}})/2, \quad (8.95)$$

получаем выражения для первичных параметров взаимного четырехполюсника:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \operatorname{ch} \underline{\Gamma}; & \underline{A}_{12} &= \sqrt{\underline{Z}_{C1} \underline{Z}_{C2}} \operatorname{sh} \underline{\Gamma}; \\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{C1} \underline{Z}_{C2}}} \operatorname{sh} \underline{\Gamma}; & \underline{A}_{22} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \operatorname{ch} \underline{\Gamma}. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Исследуя (8.96), устанавливаем важные соотношения между А-параметрами взаимного четырехполюсника

$$\sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} = \operatorname{ch} \underline{\Gamma}; \quad \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} = \operatorname{sh} \underline{\Gamma}, \quad (8.97)$$

откуда вытекают весьма удобные и широко используемые на практике формулы для определения его характеристической постоянной передачи

$$\underline{\Gamma} = \operatorname{Arch} \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} = \operatorname{Arsh} \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}. \quad (8.98)$$



**Пример 8.24.** Найдем характеристические параметры взаимных  $\Gamma$ -образных четырехполюсников А и Б, схемы которых приведены на рис. 8.16, а, 8.17, а.

В связи с тем что четырехполюсник А (рис. 8.16, а) может быть получен из четырехполюсника Б (рис. 8.17 а) путем перемены мест входных и выходных зажимов, характеристические постоянные передачи обоих четырехполюсников одинаковы

$$\underline{\Gamma}_A = \underline{\Gamma}_B = \operatorname{Arch} \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} = \operatorname{Arch} \sqrt{1 + \underline{Z}_b / \underline{Z}_a},$$

а характеристическое входное сопротивление одного четырехполюсника равно характеристическому выходному сопротивлению другого:

$$\underline{Z}_{C1A} = \underline{Z}_{C2B} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_a \underline{Z}_b}{1 + \underline{Z}_b / \underline{Z}_a}};$$

$$\underline{Z}_{C2A} = \underline{Z}_{C1B} = \sqrt{\underline{Z}_a \underline{Z}_b (1 + \underline{Z}_b / \underline{Z}_a)}.$$

Первичные параметры симметричного четырехполюсника связаны соотношениями (8.85), поэтому он имеет только два независимых характеристических параметра  $\underline{Z}_C$  и  $\underline{\Gamma}$ , определяемых с помощью соотношений (8.82) и (8.94).

Первичные параметры симметричного четырехполюсника могут быть выражены через его характеристические параметры:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \operatorname{ch} \underline{\Gamma}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\Gamma}; \quad \underline{A}_{21} = (\operatorname{sh} \underline{\Gamma}) / \underline{Z}_C. \quad (8.99)$$



**Пример 8.25.** Определим характеристические параметры симметричного П-образного (см. рис. 8.24, а) и симметричного Т-образного (см. рис. 8.24, в) четырехполюсников.



Используя выражения для первичных параметров этих четырехполюсников, полученные в примере 8.21, и соотношения (8.82) и (8.98), находим

$$\underline{Z}_{\text{СП}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2)}}; \quad \underline{\Gamma}_{\text{П}} = \text{Arch} [1 + \underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2)];$$

$$\underline{Z}_{\text{СТ}} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 [1 + \underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2)]}; \quad \underline{\Gamma}_{\text{Т}} = \text{Arch} [1 + \underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2)],$$

Как видно из полученных выражений, рассматриваемые четырехполюсники имеют одинаковые характеристические постоянные передачи и различные характеристические сопротивления. Сравнивая выражения для характеристических параметров  $\Gamma$ -образных (см. пример 8.24),  $\Pi$ -образных и  $T$ -образных четырехполюсников и принимая во внимание, что обратные гиперболические функции связаны между собой соотношением  $\text{Arch } x + \text{Arch } y = \text{Arch} (xy + \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)})$ , устанавливаем, что характеристическая постоянная передачи  $\Pi$ -образного или  $T$ -образного четырехполюсника равна сумме характеристических постоянных  $\Gamma$ -образных четырехполюсников, схемы которых приведены на рис. 8.16, а и 8.17, а (см. пример 8.24) при  $\underline{Z}_a = 2\underline{Z}_2$  и  $\underline{Z}_b = \underline{Z}_1/2$ :

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_A + \underline{\Gamma}_B &= 2 \text{Arch} \sqrt{1 + \underline{Z}_b/\underline{Z}_a} = 2 \text{Arch} \sqrt{1 + \underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2)} = \\ &= \text{Arch} [1 + \underline{Z}_1/(2\underline{Z}_2)] = \underline{\Gamma}_{\text{П}} = \underline{\Gamma}_{\text{Т}}. \end{aligned}$$

Характеристическое сопротивление  $\Pi$ -образного четырехполюсника равно характеристическому входному сопротивлению  $\Gamma$ -образного (см. рис. 8.16, а), называемого  $\Gamma$ -образным четырехполюсником с  $\Pi$ -входом:

$$\underline{Z}_{\text{С1А}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_a \underline{Z}_b}{1 + \underline{Z}_b/\underline{Z}_a}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2)}} = \underline{Z}_{\text{СП}},$$

а характеристическое сопротивление  $T$ -образного четырехполюсника равно характеристическому входному сопротивлению  $\Gamma$ -образного (см. рис. 8.17, а) ( $\Gamma$ -образный четырехполюсник с  $T$ -входом):

$$\underline{Z}_{\text{С1Б}} = \sqrt{\underline{Z}_a \underline{Z}_b (1 + \underline{Z}_b/\underline{Z}_a)} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 [1 + \underline{Z}_1/(4\underline{Z}_2)]} = \underline{Z}_{\text{СТ}}.$$

Ранее было показано, что комплексные частотные характеристики неавтономного проходного четырехполюсника с произвольной нагрузкой могут быть выражены через первичные параметры этого четырехполюсника. Аналогично комплексные частотные характеристики неавтономного проходного четырехполюсника могут быть представлены в терминах его характеристических параметров. Для четырехполюсников с согласованной нагрузкой соответствующие выражения принимают особенно простой вид. Так, для неавтономного проходного четырехполюсника общего вида с согласованной нагрузкой на выходе выражения для коэффициентов передачи по напряжению и току (8.78), (8.79) могут быть представлены в форме

$$K_{21}(j\omega) = \sqrt{\underline{Z}_{\text{С2}}/\underline{Z}_{\text{С1}}} e^{-\underline{\Gamma}_1}, \quad (8.100)$$

$$G_{21}(j\omega) = \sqrt{\underline{Z}_{\text{С1}}/\underline{Z}_{\text{С2}}} e^{-\underline{\Gamma}_1}, \quad (8.101)$$

а для четырехполосника с согласованной нагрузкой на входе

$$K_{12}(j\omega) = \sqrt{\underline{Z}_{C1}/\underline{Z}_{C2}} e^{-\underline{\Gamma}_2}; \quad (8.102)$$

$$G_{12}(j\omega) = \sqrt{\underline{Z}_{C2}/\underline{Z}_{C1}} e^{-\underline{\Gamma}_2}. \quad (8.103)$$

Входное сопротивление этого четырехполосника в первом случае равно  $\underline{Z}_{C1}$ , а во втором —  $\underline{Z}_{C2}$ .

Выражения для комплексных частотных характеристик взаимного четырехполосника получаются из (8.100)—(8.103) при  $\underline{\Gamma}_1 = \underline{\Gamma}_2 = \underline{\Gamma}$ . Для симметричного четырехполосника ( $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C$ ,  $\underline{\Gamma}_1 = \underline{\Gamma}_2 = \underline{\Gamma}$ ) выражения (8.100)—(8.103) еще более упрощаются.

$$K_{21}(j\omega) = K_{12}(j\omega) = G_{21}(j\omega) = G_{12}(j\omega) = e^{-\underline{\Gamma}}. \quad (8.104)$$

Как видно из выражения (8.104), характеристическая постоянная передачи симметричного четырехполосника с согласованной нагрузкой равна натуральному логарифму отношения комплексных действующих значений напряжений (токов) внешних по отношению к четырехполоснику ветвей, содержащих источник энергии и нагрузку. При согласованной нагрузке на выходе имеем

$$\underline{\Gamma} = \ln(\dot{U}_1/\dot{U}_2) = \ln(\dot{I}_1/\dot{I}_2) = A + jB. \quad (8.105)$$

Для определения вещественной  $A$  и мнимой  $B$  составляющих характеристической постоянной передачи представим напряжения и токи на зажимах четырехполосника в показательной форме

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= \ln \frac{U_1 e^{j\psi_{u1}}}{U_2 e^{j\psi_{u2}}} = \ln \frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{u1} - \psi_{u2}); \\ \underline{\Gamma} &= \ln \frac{I_1 e^{j\psi_{i1}}}{I_2 e^{j\psi_{i2}}} = \ln \frac{I_1}{I_2} + j(\psi_{i1} - \psi_{i2}). \end{aligned} \quad (8.106)$$

Из выражений (8.105), (8.106) следует, что вещественная составляющая характеристической постоянной передачи симметричного четырехполосника с согласованной нагрузкой на выходе равна натуральному логарифму отношения действующих значений напряжений (токов) на входе и на выходе четырехполосника:  $A = \ln(U_1/U_2) = \ln(I_1/I_2)$ , а мнимая составляющая характеристической постоянной передачи — разности начальных фаз этих напряжений (токов):

$$B = \psi_{u1} - \psi_{u2} = \psi_{i1} - \psi_{i2}.$$

В литературе величины  $A$  и  $B$  называют постоянными ослабления и фазы четырехполосника соответственно. Постоянная ослабления характеризует изменение действующих значений напряжения или тока при передаче энергии от источника к нагрузке. Ее выражают в дБ (дБ) и белах (Б). Ослаблению в 1 дБ соответствует уменьшение действующего значения напряжения или тока в  $\approx 2,718$  раз. Постоянная ослабления симметричного четырех-

полюсника, выраженная в беллах, определяется десятичным логарифмом отношения полных мощностей на входе и выходе четырехполюсника:

$$A_B = \lg(P_{s1}/P_{s2}) = \lg \left[ \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \right] = \lg(U_1/U_2)^2 = \\ = \lg(I_1/I_2)^2 = 2 \lg(U_1/U_2) = 2 \lg(I_1/I_2).$$

На практике для измерения ослабления широко используют децибелы (дБ):

$$A_{дБ} = 10A_B = 20 \lg(U_1/U_2) = 20 \lg(I_1/I_2).$$

Для перехода от одних единиц ослабления к другим можно использовать соотношения: 1 Нп  $\approx$  8,686 дБ; 1 дБ  $\approx$  0,115 Нп.

Полезно запомнить, что уменьшению мощности в 2 раза (уменьшению напряжения или тока в  $\sqrt{2}$  раз) соответствует  $A \approx 3$  дБ, уменьшению мощности в 10 раз — ослабление 10 дБ, уменьшению напряжения в 10 раз — ослабление 20 дБ.

Постоянная фазы  $B$  четырехполюсника характеризует изменение начальной фазы напряжения или тока при передаче энергии от источника к нагрузке. Эту величину выражают в угловых единицах — радианах или градусах.

### Согласованное каскадное соединение неавтономных проходных четырехполюсников

Каскадное соединение четырехполюсников А и Б (рис. 8.35) называется **с о г л а с о в а н н ы м**, если их характеристические параметры и сопротивление нагрузки выбраны таким образом, что  $\underline{Z}_{C2B} = \underline{Z}_{H2}$ ,  $\underline{Z}_{C2A} = \underline{Z}_{C1B}$  или  $\underline{Z}_{C1A} = \underline{Z}_{H1}$ ,  $\underline{Z}_{C1B} = \underline{Z}_{C2A}$ .

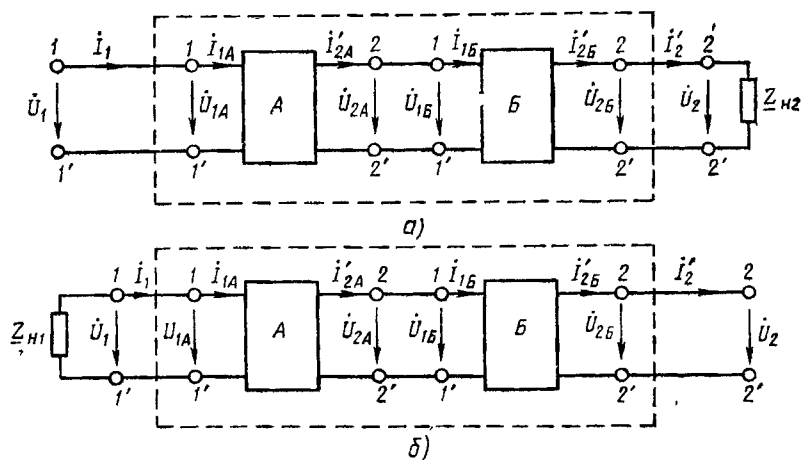


Рис. 8.35. Каскадное соединение четырехполюсников согласованное: а — на выходе; б — на входе

Рассмотрим каскадное соединение четырехполюсников с согласованной нагрузкой на выходе (рис. 8.35, а). Можно убедиться, что при таком включении каждый из четырехполюсников имеет согласованную нагрузку на выходе, причем входное сопротивление цепочки четырехполюсников со стороны зажимов  $I-I'$  четырехполюсника А равно характеристическому входному сопротивлению четырехполюсника А:

$$Z_{11}(j\omega) = \underline{Z}_{C1A}. \quad (8.107)$$

Коэффициент передачи рассматриваемой цепочки четырехполюсников по напряжению  $K_{21}(j\omega)$  равен произведению коэффициентов передачи по напряжению четырехполюсников А и Б:

$$\begin{aligned} K_{21}(j\omega) &= \dot{U}_2/\dot{U}_1 = \dot{U}_{2B}/\dot{U}_{1A} = \dot{U}_{2B}\dot{U}_{2A}/(\dot{U}_{1B}\dot{U}_{1A}) = \\ &= K_{21A}(j\omega)K_{21B}(j\omega). \end{aligned} \quad (8.108)$$

Выражая коэффициенты передачи четырехполюсников А и Б через их характеристические параметры (8.98), получаем

$$\begin{aligned} K_{21}(j\omega) &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2A}}{\underline{Z}_{C1A}}} e^{-\Gamma_{1A}} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2B}}{\underline{Z}_{C1B}}} e^{-\Gamma_{1B}} = \\ &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2B}}{\underline{Z}_{C1A}}} e^{-(\Gamma_{1A} + \Gamma_{1B})}. \end{aligned} \quad (8.109)$$

При каскадном соединении четырехполюсников с согласованной нагрузкой на входе (рис. 8.35, б) аналогичным образом находим

$$Z_{22}(j\omega) = \underline{Z}_{C2B}; \quad (8.110)$$

$$K_{12}(j\omega) = \sqrt{\underline{Z}_{C1A}/\underline{Z}_{C2B}} e^{-\Gamma_{2A} + \Gamma_{2B}}. \quad (8.111)$$

Как видно из выражений (8.107), (8.109)—(8.111), цепочка согласованно включенных четырехполюсников может быть заменена одним эквивалентным четырехполюсником, характеристическое входное сопротивление которого  $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C1A}$ , характеристическое выходное сопротивление  $\underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_{C2B}$ , а характеристические постоянные передачи

$$\underline{\Gamma}_1 = \underline{\Gamma}_{1A} + \underline{\Gamma}_{1B}, \quad \underline{\Gamma}_2 = \underline{\Gamma}_{2A} + \underline{\Gamma}_{2B}.$$

При согласованном каскадном соединении произвольного количества  $N$  одинаковых симметричных четырехполюсников с характеристическими параметрами  $\underline{Z}_{C0}$  и  $\underline{\Gamma}_0$ , характеристическое сопротивление эквивалентного четырехполюсника  $\underline{Z}_C = \underline{Z}_{C0}$ , а характеристическая постоянная передачи —  $\underline{\Gamma} = N\underline{\Gamma}_0$ .

## § 8.4. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

### Электрические фильтры

Электрические цепи, предназначенные для выделения колебаний, лежащих в определенном диапазоне частот, называются электрическими фильтрами. Диапазон частот, пропускаемых фильтром, называется полосой прозрачности или пропускания фильтра. Остальная область частот, подавляемая фильтром, называется его полосой задерживания или непрозрачности.

В соответствии с диапазоном частот, пропускаемых фильтром различают фильтры: нижних частот (полоса пропускания от 0 до некоторой частоты  $f_c$ , называемой частотой среза), верхних частот (полоса пропускания от частоты  $f_c$  до  $\infty$ ), полосовые (полоса пропускания от  $f_{c1}$  до  $f_{c2}$ ) и заграждающие (полоса задерживания от  $f_{c1}$  до  $f_{c2}$ ). Амплитудно-частотные характеристики коэффициента передачи по напряжению идеальных фильтров приведены на рис. 8.36.

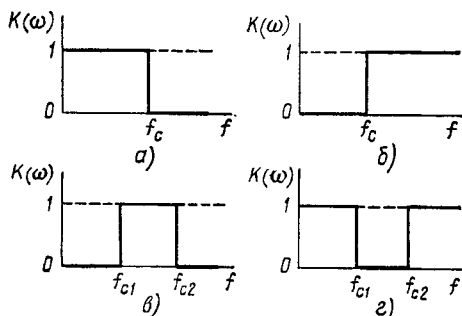


Рис. 8.36. АЧХ идеальных фильтров: а — нижних частот; б — верхних частот; в — полосового; з — задерживающего

В зависимости от наличия в фильтрах усилительных элементов, различают пассивные фильтры, которые состоят только из пассивных элементов (резисторов, конденсаторов, индуктивных катушек), и активные фильтры — устройства, содержащие усилительные элементы и пассивные фильтры. В свою очередь пассивные фильтры (в зависимости от типа входящих в них элементов) подразделяют на реактивные (или LC-) фильтры, безындуктивные (или RC-) фильтры и пьезоэлектрические (или кварцевые) фильтры.

Рассмотрим основные свойства реактивных фильтров, т. е. фильтров, составленных только из индуктивных катушек и конденсаторов с высокой добротностью. При упрощенном анализе процессов в таких фильтрах потерями в их элементах, как правило, пренебрегают, поэтому в эквивалентной схеме реактивного фильтра содержатся только идеализированные реактивные элементы — емкости и индуктивности.

Реактивные фильтры обычно собирают путем согласованного каскадного соединения отдельных звеньев. Простейший тип звена — Г-образное, представляет собой Г-образный четырехполюсник с П- или Т-входом. При согласованном каскадном соединении таких звеньев получаются симметричные П- или Т-образные звенья. Как было показано в примере 8.25, характеристическое сопротивление симметричного П-образного четырехполюсника (см. рис. 8.24, а) равно характе-

ристическому входному сопротивлению Г-образного четырехполюсника с П-входом, а характеристическое сопротивление симметричного Т-образного четырехполюсника (см. рис. 8.24, в) — характеристическому входному сопротивлению Г-образного четырехполюсника с Т-входом.

Характеристические постоянные передачи Т- и П-образных симметричных четырехполюсников одинаковы и равны удвоенной характеристической постоянной Г-образного звена

$$\text{ch } \underline{\Gamma} = 1 + \underline{Z}_1 / (2\underline{Z}_2). \quad (8.112)$$

Если фильтр образован путем согласованного каскадного соединения  $N$  идентичных симметричных звеньев, то коэффициент передачи фильтра по напряжению равен произведению коэффициентов передачи отдельных звеньев (8.108), а АЧХ фильтра определяется только зависимостью постоянной ослабления каждого звена от частоты  $A(\omega) = A = \text{Re } [\underline{\Gamma}]$ :

$$K(\omega) = e^{-NA(\omega)}. \quad (8.113)$$

Из выражения (8.113) видно, что для обеспечения близости АЧХ фильтра к характеристикам идеальных фильтров необходимо, чтобы в полосе пропускания постоянная ослабления каждого звена была равна нулю, а в полосе задерживания имела по возможности большее значение, причем условия согласования фильтра должны выполняться хотя бы в полосе пропускания. Исходя из этих соображений, рассмотрим, какие требования должны предъявляться к выбору сопротивлений продольной  $\underline{Z}_1$  и поперечной  $\underline{Z}_2$  ветвей П- и Т-образных звеньев реактивных фильтров.

В соответствии с принятыми допущениями будем считать, что сопротивления  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  имеют чисто реактивный характер  $\underline{Z}_1 = jx_1$ ,  $\underline{Z}_2 = -jx_2$ , вследствие чего  $\text{ch } \underline{\Gamma} = 1 + \underline{Z}_1 / (2\underline{Z}_2)$  должен быть вещественной величиной. Учитывая, что

$$\text{ch } \underline{\Gamma} = \text{ch}(A + jB) = \text{ch } A \text{ ch } jB + \text{sh } A \text{ sh } jB = \text{ch } A \cos B + j \text{sh } A \sin B,$$

уравнение (8.112) можно заменить равносильной ему системой уравнений с вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \text{ch } A \cos B &= 1 + x_1 / (2x_2); \\ \text{sh } A \sin B &= 0. \end{aligned} \quad (8.114)$$

В пределах полосы пропускания постоянная ослабления

$$A = 0, \quad \text{sh } A = 0, \quad \text{ch } A = 1, \quad (8.115)$$

а постоянная фазы  $B$  изменяется по закону

$$\cos B = 1 + x_1 / (2x_2). \quad (8.116)$$

За пределами полосы пропускания  $A \neq 0$  и, следовательно,

$$\sin B = 0; \quad (8.117)$$

$$\text{ch } A = |1 + x_1 / (2x_2)|. \quad (8.118)$$

В связи с тем что значение  $\cos B$  по абсолютному значению не может превышать единицу, соотношение сопротивлений  $\underline{Z}_{C1}$  и  $\underline{Z}_{C2}$  в пределах полосы пропускания должно удовлетворять условию  $-1 \leq 1 + x_1 / (2x_2) \leq 1$ , которое можно преобразовать к виду

$$-2 \leq x_1 / (2x_2) \leq 0 \quad \text{или} \quad -1 \leq x_1 / 4x_2 \leq 0. \quad (8.119)$$

Неравенство (8.119) называется *условием прозрачности* и фильтра. Очевидно, что для выполнения условия прозрачности, т. е. для обеспечения в определенном диапазоне частот равенства нулю постоянной ослабления  $A$  фильтра, необходимо, чтобы мнимые составляющие сопротивлений  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  имели различные знаки, или чтобы сопротивления продольной и поперечной ветвей фильтра имели различный характер.

Предельные значения частоты, на которых выполняются условия прозрачности фильтра, являются границами полосы пропускания (частотами среза). На этих частотах сопротивления продольной и поперечной ветвей фильтра связаны соотношениями

$$\underline{Z}_1 / (4\underline{Z}_2) = 0; \quad \underline{Z}_1 / (4\underline{Z}_2) = -1$$

или

$$\underline{Z}_1 = 0; \quad \underline{Z}_1 = -4\underline{Z}_2.$$

Таким образом, на одной из частот среза сопротивление продольной ветви фильтра должно быть равно нулю, а на другой частоте среза полное сопротивление  $\underline{Z}_1$  продольной ветви должно быть в четыре раза больше, чем полное сопротивление  $\underline{Z}_2$  поперечной ветви.

Рассматривая выражения для характеристических сопротивлений  $\Pi$ - и  $T$ -образных четырехполюсников (см. пример 8.25) с учетом (8.119), устанавливаем, что в пределах полосы пропускания характеристические сопротивления как  $\Gamma$ -, так и  $T$ -образного звеньев имеют чисто реактивный характер, а за пределами полосы пропускания — чисто активный. Таким образом, условия, при которых постоянная ослабления  $A = 0$  (8.119), совпадают с условиями, при которых характеристическое сопротивление фильтра имеет вещественный характер.

В связи с тем что характеристические сопротивления симметричных  $\Pi$ - и  $T$ -образных звеньев совпадают с характеристическими входным и выходным сопротивлением  $\Gamma$ -образного звена, а характеристическая постоянная передачи  $\Pi$ - и  $T$ -образных звеньев равна удвоенной характеристической постоянной передачи  $\Gamma$ -образного звена, полосы пропускания  $\Gamma$ -,  $\Pi$ - и  $T$ -образных звеньев при одних и тех же значениях сопротивлений  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  одинаковы, а постоянная ослабления и постоянная фазы  $\Gamma$ -образного звена будут вдвое ниже, чем соответствующие постоянные  $T$ - или  $\Pi$ -образных звеньев.

Пусть параметры элементов, образующих продольную и поперечную ветви  $\Gamma$ -образного звена, выбраны таким образом, что произведение комплексных сопротивлений ветвей не зависит от частоты и равно квадрату некоторого вещественного числа  $k$ :

$$\frac{1}{2} \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = k^2$$

Очевидно, что в этом случае произведение характеристических входного и выходного сопротивлений  $\Gamma$ -образного звена, как и произведение характеристических сопротивлений  $\Pi$ - и  $T$ -образных звеньев, также будет равно  $k^2$ :

$$\underline{Z}_{СП} \underline{Z}_{СТ} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = k^2. \quad (8.12)$$

Реактивные фильтры, собранные из звеньев, параметры элементов которых удовлетворяют условию (8.120), называются **фильтрами типа  $k$**  (рис. 8.37).

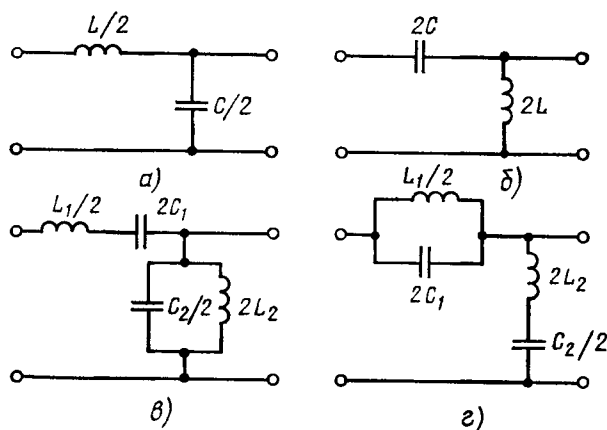


Рис. 8.37. Схемы  $\Gamma$ -образных звеньев фильтров типа  $k$ :  
 а — нижних частот; б — верхних частот; в — полосового, г — задерживающего

Подставляя (8.120) в (8.119), находим условие прозрачности фильтров типа  $k$ :

$$-1 \leq k^2 / (4\underline{Z}_2^2) \leq 0,$$

или

$$-1 \leq \underline{Z}_1^2 / 4k^2 \leq 0.$$

В пределах полосы пропускания постоянная ослабления  $\Pi$ - или  $T$ -образного звена фильтра типа  $k$  равна нулю, а за пределами полосы пропускания плавно нарастает в соответствии с выражением

$$\text{ch } A = |1 + k^2 / (2\underline{Z}_2^2)| = |1 + \underline{Z}_1^2 / (2k^2)|.$$

Характеристические сопротивления  $\Pi$ - и  $T$ -образных звеньев типа  $k$  определяются соотношениями

$$\underline{Z}_{СП} = \frac{k}{\sqrt{1 + \underline{Z}_1 / (4\underline{Z}_2)}}; \quad \underline{Z}_{СТ} = k\sqrt{1 + \underline{Z}_1 / (4\underline{Z}_2)}. \quad (8.121)$$

Как видно из (8.121), в пределах полосы пропускания характеристическое сопротивление  $T$ -образного звена фильтра типа  $k$  изменяется



от 0 до  $k$ , а характеристическое сопротивление П-образного звена — от  $k$  до  $\infty$ .

Сравнительно медленное нарастание постоянной ослабления за пределами полосы пропускания и ярко выраженная зависимость характеристического сопротивления от частоты в пределах полосы пропускания являются существенными недостатками фильтров типа  $k$ . При согласованном каскадном соединении большого числа звеньев ослабление фильтра типа  $k$  в полосе задерживания может быть значительно увеличено, однако зависимость характеристического сопротивления фильтра от частоты не позволяет согласовывать фильтр в пределах всей полосы пропускания, вследствие чего характеристики реальных фильтров типа  $k$  значительно отличаются от рассмотренных.

Недостатки фильтров типа  $k$  в значительной степени устраняются в фильтрах типа  $m$ . Для построения такого фильтра сопротивления продольной и поперечной ветвей фильтра типа  $k$ , называемого прототипом, изменяют таким образом, чтобы одно из характеристических сопротивлений полученного звена в пределах полосы пропускания почти не зависело от частоты, а другое — осталось равным соответствующему характеристическому сопротивлению прототипа. Равенство одного из характеристических сопротивлений Г-образного звена фильтра типа  $m$  характеристическому сопротивлению прототипа позволяет каскадно соединять звенья обоих типов.

Различают последовательно-производные и параллельно-производные звенья фильтров типа  $m$ . Если при построении фильтра типа  $m$  неизменным остается характеристическое сопротивление  $Z_T$ , то получившиеся звенья называются последовательно-производными. Если при переходе от фильтра типа  $k$  к фильтру типа  $m$  остается неизменным характеристическое сопротивление  $Z_{П}$ , то звенья называются параллельно-производными (рис. 8.38).

Характеристики фильтра типа  $m$  в значительной степени зависят от выбора значения коэффициента  $m$ , которое может изменяться в пределах от 0 до 1. Полоса пропускания рассматриваемого фильтра совпадает с полосой пропускания прототипа, причем за пределами полосы пропускания постоянная ослабления фильтра типа  $m$  увеличивается более круто и достигает на отдельных частотах значительно больших значений, чем у соответствующего фильтра типа  $k$ .

Более резкое увеличение затухания за пределами полосы пропускания наблюдается и у фильтров, собранных из симметричных мостовых звеньев (см. рис. 8.18, *a*), однако характеристическое сопротивление мостовых фильтров изменяется в пределах полосы пропускания в весьма широких пределах.

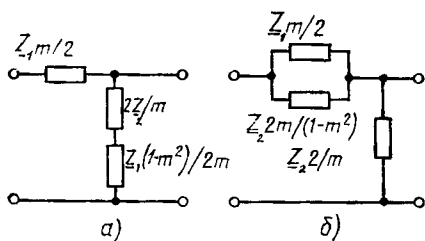


Рис. 8.38 Последовательно-производное (а) и параллельно-производное (б) звенья фильтров типа  $m$

## Дифференцирующие и интегрирующие цепи

В радиотехнической практике широко используются устройства, напряжение  $u_2$  на выходе которых практически пропорционально производной или интегралу от входного напряжения  $u_1$ . Такие устройства называются соответственно дифференцирующими или интегрирующими цепями. В простейшем случае дифференцирование или интегрирование

напряжения может производиться с помощью пассивных двухэлементных четырехполосников (рис. 8.39).

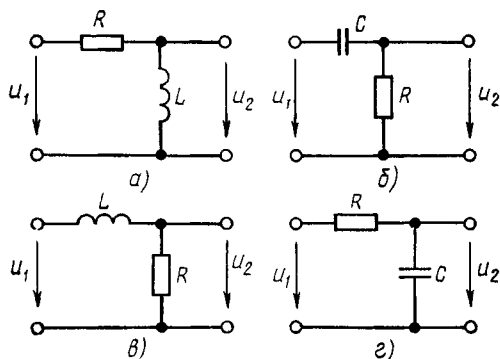


Рис. 8.39. Схемы простейших дифференцирующих (а, б) и интегрирующих (в, г) цепей

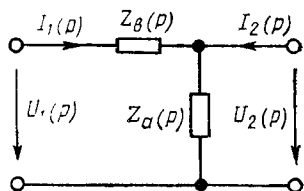


Рис. 8.40. Обобщенная схема замещения простейших дифференцирующих и интегрирующих цепей

Для определения требований к элементам, входящим в состав дифференцирующих и интегрирующих цепей, рассмотрим обобщенную схему замещения таких цепей, представленную на рис. 8.40. Если напряжение на выходе цепи  $u_2$  пропорционально производной от входного напряжения  $u_1$ :

$$u_2 = \alpha_1 \frac{du_1}{dt},$$

где  $\alpha_1$  — некоторое действительное число, то в соответствии с теоремой дифференцирования операторные изображения этих величин  $U_2(p) \doteq \doteq u_2$  и  $U_1(p) \doteq u_1$  при нулевых начальных условиях должны быть связаны соотношением

$$U_2(p) = \alpha_1 p U_1(p).$$

Следовательно, операторный коэффициент передачи по напряжению дифференцирующей цепи должен быть пропорционален  $p$ :

$$K_{21}(p) = \alpha_1 p.$$

Аналогичным образом устанавливаем, что операторный коэффициент передачи по напряжению интегрирующей цепи должен быть пропорционален  $p^{-1}$ :

$$K_{21}(p) = \alpha_2 / p,$$

где  $\alpha_2$  — постоянный коэффициент.

Полагая, что сопротивление нагрузки обобщенной цепи столь велико, что током  $I_2(p)$  можно пренебречь по сравнению с  $I_1(p)$ , найдем выражения для коэффициента передачи обобщенной цепи по напряжению

$$K_{21}(p) = \frac{Z_a(p)}{Z_a(p) + Z_b(p)} = \frac{1}{1 + Z_b(p)/Z_a(p)}. \quad (8.122)$$

Как видно из выражения (8.122), операторный коэффициент передачи обобщенной цепи может быть пропорционален  $p$  или  $p^{-1}$  только при

$$|Z_b(p)/Z_a(p)| \gg 1. \quad (8.123)$$

В этом случае для дифференцирующей цепи приближенно выполняется соотношение  $Z_a(p)/Z_b(p) = \alpha_1 p$ , а для интегрирующей цепи  $Z_a(p)/Z_b(p) = \alpha_2/p$ .

Для дифференцирующей цепи выполнение условия (8.123) равносильно тому, что постоянная времени цепи  $\tau_L = L/R$  (см. рис. 8.39, а) или  $\tau_C = RC$  (см. рис. 8.39, б) намного меньше длительности дифференцируемого сигнала.

Для интегрирующей цепи условие (8.123) означает, что постоянная времени цепи должна быть значительно больше длительности интервала интегрирования. Из (8.123) также вытекает, что напряжение на выходе  $u_2$  простейших дифференцирующих и интегрирующих цепей оказывается намного меньшим, чем напряжение на входе  $u_1$  этих цепей. Увеличение напряжения  $u_2$  может быть достигнуто путем усложнения схем дифференцирующих и интегрирующих цепей, в частности путем применения цепей, содержащих не только пассивные, но и активные элементы.

## Гиратор

Гиратором называется идеализированный трехполюсный элемент, комплексные действующие значения напряжений и токов на зажимах которого связаны между собой соотношениями

$$I_1 = g\dot{U}_2; \quad I_2 = -g\dot{U}_1, \quad (8.124)$$

где  $g$  — постоянное вещественное число, называемое коэффициентом гирации или гираторной проводимостью. Условное графическое обозначение гиратора, используемое при построении эквивалентных схем электрических цепей, и условные положительные направления напряжений и токов на зажимах гиратора приведены на рис. 8.41, а. Используя компонентные уравнения гиратора (8.124), можно построить его эквивалентную схему, содержащую два управляемых напря-

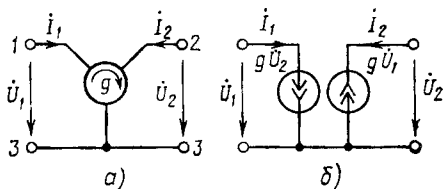


Рис. 8.41. Условное графическое обозначение гиратора (а) и его эквивалентная схема (б)

жением источника тока (рис. 8.41, б), и определить матрицы  $\underline{Y}$ -,  $\underline{Z}$ -,  $\underline{A}$ - и  $\underline{B}$ -параметров гиратора, включенного с общим полюсом 3:

$$\underline{Y}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0; & g \\ -g; & 0 \end{bmatrix}; \quad (8.125)$$

$$\underline{Z}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0; & -1/g \\ 1/g; & 0 \end{bmatrix}; \quad (8.126)$$

$$\underline{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0; & 1/g \\ g; & 0 \end{bmatrix}; \quad (8.127)$$

$$\underline{B}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0; & -1/g \\ -g; & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.128)$$

Матриц  $\underline{G}$ - и  $\underline{H}$ -параметров для гиратора не существует.

Переходя от (8.125) к неопределенной матрице  $\underline{Y}$ -параметров гиратора

$$\underline{Y}_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & g & -g \\ -g & 0 & g \\ g & -g & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

нетрудно убедиться, что вид неопределенной матрицы не изменится при изменении нумерации выводов гиратора в направлении по часовой стрелке, т. е. в направлении стрелки, помещенной внутри кружка на его условном графическом обозначении. Таким образом, вид компонентных уравнений гиратора (8.124) не зависит от того, какой из выводов сделать общим, при условии, что нумерацию всех выводов изменять в показанном стрелкой направлении. Следовательно, цифру 3, указывающую номер общего зажима, в выражениях (8.125) — (8.128) можно опустить.

Некоторые свойства гиратора подобны свойствам идеального трансформатора. Так, токи и напряжения на зажимах гиратора связаны соотношением

$$\dot{I}_1 / -\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / \dot{U}_1, \quad (8.129)$$

подобным выражению (2.184)\*), а активная мощность, потребляемая гиратором от источника, равна активной мощности, отдаваемой гиратором в нагрузку (комплексная мощность, потребляемая гиратором от источника, является величиной, сопряженной с комплексной мощностью нагрузки).

В то же время в отличие от идеального трансформатора гиратор является *незвзаимным идеализированным элементом* ( $\underline{Y}_{12} \neq \underline{Y}_{21}$ ,  $\underline{Z}_{12} \neq \underline{Z}_{21}$ ,  $\Delta_A = \Delta_B \neq 1$ ) и обладает рядом свойств, не присущих идеализированным элементам других типов. В частности, любой *незвзаим-*

\*) При сопоставлении выражений (8.129) и (2.184) необходимо учитывать, что для гиратора и идеального трансформатора выбраны различные направления тока  $\dot{I}_2$ .

ный четырехполосник с вещественными параметрами, представленный своей матрицей  $Y$ -параметров

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11}; & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21}; & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix},$$

где  $\text{Im} [\underline{Y}_{11}] = \text{Im} [\underline{Y}_{12}] = \text{Im} [\underline{Y}_{21}] = \text{Im} [\underline{Y}_{22}] = 0$ , а  $\underline{Y}_{12} \neq \underline{Y}_{21}$ , может рассматриваться в качестве параллельного соединения некоторого взаимного четырехполосника  $A$ , матрица  $Y$ -параметров которого

$$\underline{Y}_A = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11}; & (\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21})/2 \\ (\underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{21})/2; & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$$

и гиратора с коэффициентом гирации

$$g = (\underline{Y}_{12} - \underline{Y}_{21})/2.$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться, используя правила определения первичных параметров составных четырехполосников (8.54).

Рассмотрим каскадное соединение двух гираторов с коэффициентами гирации  $g_1$  и  $g_2$  (рис. 8.42) В соответствии с (8.49) матрица  $A$ -

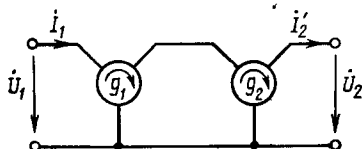


Рис. 8.42. Каскадное соединение гираторов

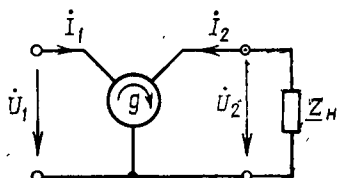


Рис. 8.43. К определению входного сопротивления гиратора

параметров такого составного четырехполосника может быть найдена как произведение матриц  $A$ -параметров входящих в него гираторов:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0; & 1/g_1 \\ g_1; & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0; & 1/g_2 \\ g_2; & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2/g_1; & 0 \\ 0 & g_1/g_2 \end{bmatrix}. \quad (8.130)$$

Сравнивая (8.132) с матрицей  $A$ -параметров идеального трансформатора (см. пример 8.17), получаем, что каскадное соединение двух гираторов эквивалентно идеальному трансформатору с коэффициентом трансформации  $n = g_1/g_2$ .

Найдем входное сопротивление гиратора, к выходу которого подключено произвольное сопротивление нагрузки  $\underline{Z}_H$  (рис. 8.43). Учитывая, что при выбранных направлениях токов и напряжений  $\dot{U}_2 = -\underline{Z}_H \dot{I}_2$ , получаем

$$\underline{Z}_{вх} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = -\dot{I}_2 / (g^2 \dot{U}_2) = 1 / (g^2 \underline{Z}_H). \quad (8.131)$$

Как видно из выражения (8.131), гиратор, подобно идеальному трансформатору, способен преобразовывать сопротивления, однако в отличие от идеального трансформатора они преобразуются не только по модулю, но и по характеру. В случае чисто емкостной нагрузки  $\underline{Z}_H = 1/(j\omega C_H)$  входное сопротивление гиратора имеет чисто индуктивный характер:

$$\underline{Z}_{ВХ} = j\omega C_H/g^2 = j\omega L_{ЭК},$$

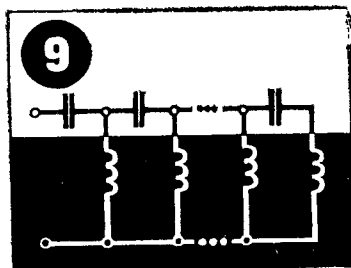
где  $L_{ЭК} = C_H/g^2$  — эквивалентная входная индуктивность гиратора. При индуктивной нагрузке  $\underline{Z}_H = j\omega L_H$  входное сопротивление гиратора имеет емкостной характер:

$$\underline{Z}_{ВХ} = 1/(j\omega L_H g^2) = 1/(j\omega C_{ЭК}),$$

где  $C_{ЭК} = g^2 L_H$  — эквивалентная входная емкость гиратора. Используя выражение (8.131), нетрудно убедиться, что при подключении к выходным зажимам конденсатора с емкостью  $C$  и достаточно высокой добротностью  $Q_C$  гиратор становится эквивалентным индуктивной катушке с индуктивностью  $L_{ЭК} \approx C_H/g^2$  и добротностью  $Q_L = Q_C$ .

Способность гираторов имитировать индуктивные катушки и трансформаторы особенно привлекательна для применения их в микроэлектронике, поскольку реализация индуктивных элементов в составе интегральных микросхем другими методами затруднена.

# Синтез электрических цепей



## § 9.1. ЗАДАЧА СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### Понятие о физической реализуемости цепей

Задача синтеза электрической цепи заключается в построении цепи, обладающей заданной реакцией  $y(t)$  на некоторое внешнее воздействие  $x(t)$ . В связи с тем что реакция линейной цепи на произвольное внешнее воздействие однозначно определяется ее временными или частотными характеристиками, задача синтеза такой цепи обычно сводится к нахождению цепи, обладающей заданными характеристиками. Синтез цепи по ее частотным характеристикам называется синтезом в частотной области, а синтез цепи по ее временным характеристикам — синтезом во временной области. Методы синтеза цепей в частотной области к настоящему времени более разработаны, поэтому задачу синтеза цепи во временной области, как правило, сводят к задаче синтеза в частотной области, при этом заданные временные характеристики с помощью выражений (6.109), (6.110) заменяются соответствующими обобщенными частотными характеристиками.

Как известно, каждая линейная электрическая цепь обладает вполне определенной реакцией на заданное внешнее воздействие. Следовательно, *задача анализа линейной электрической цепи всегда имеет единственное решение*. В то же время оказывается, что различные по топологии и типу элементов цепи могут обладать одинаковыми характеристиками, поэтому *решение задачи синтеза цепи, если оно существует, как правило, не является единственным*. Во многих случаях цепь с заданными характеристиками вообще не может быть реализована с помощью идеализированных элементов с вещественными положительными параметрами. В таких случаях считается, что задача синтеза не имеет решения, а заданная характеристика (точнее, цепь с заданной характеристикой) не является физически реализуемой. С другой стороны, если цепь, обладающая какой-либо характеристикой, может быть построена из идеализированных элементов с вещественными положительными параметрами, то такая характеристика является физически реализуемой.

Понятие физической реализуемости имеет смысл только тогда, когда оговорено, из каких типов идеализированных элементов может состоять синтезируемая цепь. Набор допустимых типов элементов называется элементным базисом цепи. *Одна и та же частотная или временная характеристика цепи может оказаться физической реализуемой в одном элементном базисе и физически реализуемой в другом.* В зависимости от заданного элементного базиса различаются задачи синтеза реактивных (составленных только из индуктивностей и емкостей), безындуктивных (составленных только из сопротивления и емкостей), беземкостных цепей (составленных только из сопротивлений и индуктивностей), пассивных общего вида и активных цепей.

Цепь можно синтезировать как по входным, так и по передаточным характеристикам, заданным относительно различных пар внешних зажимов. Если синтез производится по входным характеристикам, заданным относительно какой-либо одной пары зажимов, то искомая цепь может быть представлена в виде двухполюсника. Если синтез производится по входным и передаточным характеристикам, заданным относительно двух пар внешних выводов, то синтезируемая цепь представляется в виде проходного четырехполюсника. При большем числе пар выводов, относительно которых задаются характеристики цепи, цепь представляется в виде многополюсника.

Физически реализуемые характеристики цепи удовлетворяют определенным условиям, называемым критериями физической реализуемости. Формулировка этих критериев зависит от элементного базиса цепи и от того, является заданная характеристика входной или передаточной, частотной или временной. Разработка критериев физической реализуемости представляет собой одну из важнейших задач синтеза цепей.

## Основные этапы синтеза цепей

Основными этапами синтеза электрической цепи являются проверка физической реализуемости заданных характеристик и непосредственно реализация цепи, т. е. определение эквивалентной схемы цепи и параметров входящих в нее элементов. Переход от эквивалентной схемы к принципиальной электрической схеме, соответствующий переходу от идеализированной электрической цепи к реальной, составляет задачу технической реализации, которая выходит за рамки теории цепей.

В связи с тем что решение задачи синтеза, как правило, не является единственным, процесс синтеза обычно совмещают с процессом оптимизации цепей по какому-либо критерию. Такими критериями могут быть минимальное общее число элементов реализуемой цепи; минимальное число элементов какого-либо определенного типа, например индуктивностей; минимальное значение параметров каких-либо элементов и др.

Если частотные или временные характеристики цепи задают не в аналитической форме, то они должны быть аппроксимированы ана-



литическими выражениями, удовлетворяющими критериям физической реализуемости. В дальнейшем будем считать, что аналитические выражения для характеристик элементов известны.

Синтез электрических цепей — один из наиболее сложных, практически важных и интенсивно развивающихся разделов теории цепей. Значительный вклад в создание современных методов синтеза цепей внесли советские ученые М. М. Айзинов, А. Д. Артым, А. Ф. Белецкий, П. А. Ионкин, Н. С. Кочанов, А. А. Ланне, П. Н. Матханов и др.

## § 9.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И КРИТЕРИИ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ ВХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ПАССИВНЫХ ЦЕПЕЙ

### Понятия о положительных вещественных функциях

Ранее (см. гл. 6) было установлено, что любые операторные характеристики линейных электрических цепей, не содержащих независимых источников энергии, в том числе операторные входные характеристики линейных пассивных цепей, могут быть представлены в виде отношения двух полиномов с вещественными коэффициентами. Возникает вопрос, всякая ли рациональная функция  $H(p)$  с вещественными коэффициентами физически реализуема в качестве операторной входной характеристики линейной пассивной цепи, или, другими словами, всякой ли функции  $H(p)$ , представляющей собой отношение двух полиномов с вещественными коэффициентами

$$H(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0},$$

можно поставить в соответствие линейный пассивный двухполюсник, составленный из элементов с положительными вещественными параметрами, операторное входное сопротивление или операторная входная проводимость которого равны  $H(p)$ . Строгое рассмотрение этого вопроса показывает, что *необходимое и достаточное условие физической реализуемости рациональной функции  $H(p)$  в качестве операторной входной функции линейной пассивной цепи заключается в том, чтобы  $H(p)$  являлась положительной вещественной функцией комплексной частоты  $p$ .*

Положительной вещественной функцией комплексного переменного  $p$  называется функция  $H(p)$ , действительная часть которой неотрицательна при неотрицательных значениях действительной части  $p$ :

$$\operatorname{Re} [H(p)] \geq 0 \text{ при } \operatorname{Re} (p) \geq 0; \quad (9.1)$$

а мнимая часть равна нулю при мнимой части  $p$ , равной нулю:

$$\operatorname{Im} [H(p)] = 0 \text{ при } \operatorname{Im} (p) = 0. \quad (9.2)$$

Непосредственно по выражениям (9.1), (9.2) определить, является ли заданная рациональная функция  $H(p)$  положительной вещественной функцией комплексной частоты  $p$ , трудно, поэтому обычно проверяют выполнение следующих условий, которые полностью вытекают из этих выражений:

1) все коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  полиномов  $N(p)$  и  $M(p)$  должны быть вещественны и неотрицательны;

2) наибольшие и соответственно наименьшие степени полиномов  $N(p)$  и  $M(p)$  не могут отличаться более чем на единицу (любой пассивный двухполюсник при  $p \rightarrow 0$  и при  $p \rightarrow \infty$  ведет себя либо как емкость  $Z_C(p) = kp^{-1}$ , либо как индуктивность  $Z_L(p) = kp$ , либо как сопротивление  $kp^0$ );

3) нули  $p_{0i}$  и полюсы  $p_{xi}$  функции  $H(p)$  не могут располагаться в правой полуплоскости:  $\text{Re}(p_{0i}) \leq 0$ ,  $\text{Re}(p_{xi}) \leq 0$  (в противном случае в цепи не будут выполняться условия затухания свободных процессов);

4) нули и полюсы функции  $H(p)$ , расположенные на мнимой оси должны быть только простыми (некратными), причем производные функции  $H(p)$  в нулях и вычеты в полюсах должны быть вещественны и положительны. Если бы среди нулей или полюсов функции  $H(p)$  имелся хотя бы один корень  $p_h = j\omega_h$  с кратностью  $\nu$ , то этому корню соответствовала бы нарастающая во времени свободная составляющая решения  $y_{св}^{(k)} = (A_1 + A_2 t + \dots + A_\nu t^{\nu-1}) \cos \omega_h t$ ;

5) вещественная часть функции  $H(p)$  должна быть неотрицательна на мнимой оси:  $\text{Re}[H(p)] \geq 0$  при  $\text{Re}(p) = 0$  (при гармоническом воздействии ( $p = j\omega$ ) вещественная часть комплексных входного сопротивления или входной проводимости линейной пассивной цепи не может быть отрицательной).

Перечисленные условия являются *необходимыми и достаточными* для того, чтобы заданная рациональная функция комплексного переменного  $H(p)$  являлась положительной вещественной функцией  $p$ , и поэтому могут рассматриваться как критерии физической реализуемости этой функции в качестве операторной входной характеристики линейной пассивной цепи. Следует отметить, что не все приведенные условия являются независимыми, в частности условия 1 и 2 вытекают из условий 3 и 4. Такая избыточность является вполне оправданной, так как позволяет в ряде случаев определять физически нереализуемую функцию непосредственно по ее виду, без трудоемких операций, связанных с нахождением корней полиномов  $N(p)$  и  $M(p)$ .



**Пример 9.1.** Определим, являются ли функции  $H_1(p) = (3p - 2)/(3p^2 + p + 1)$ ,  $H_2(p) = 1/(p^2 + p + 2)$  и  $H_3(p) = 3p^2/(p^2 + p + 2)$  положительными вещественными функциями комплексного переменного.

Непосредственно по виду функций устанавливаем, что функция  $H_1(p)$  не удовлетворяет условию 1 (коэффициент  $a_0 < 0$ ), а функции  $H_2(p)$  и  $H_3(p)$  не удовлетворяют условию 2 (разность наивысших степеней числителя и знаменателя функции  $H_2(p)$  и разность наименьших степеней числителя и знаменателя функции  $H_3(p)$  превышают единицу). Следовательно, заданные функции не являются положительными вещественными функциями  $p$ .

●●●●●

**Пример 9.2.** Определим, является ли функция  $H_4(p) = (p^2 + 4)/(p^3 + 9p)$  физически реализуемой в качестве операторной входной функции линейной пассивной цепи.

Непосредственно по виду функции  $H_4(p)$  устанавливаем, что все коэффициенты полиномов  $N(p) = p^2 + 4$  и  $M(p) = p^3 + 9p$  вещественны и положительны, а наибольшие и соответственно наименьшие степени этих полиномов отличаются на единицу. Все нули  $p_{01} = j2$ ,  $p_{02} = -j2$  и все полюсы  $p_{x1} = 0$ ,  $p_{x2} = j3$ ,  $p_{x3} = -j3$  функции расположены на мнимой оси и являются простыми. Производные функции в нулях

$$\left. \frac{dH_4(p)}{dp} \right|_{p=\pm j2} = \frac{p^4 + 3p^2 + 36}{-p^2(p^2 + 9)^2} \Big|_{p=\pm j2} \neq 0, 4$$

и вычеты функции в полюсах

$$\operatorname{Res}_{p=0} H_4(p) = \frac{p^2 + 4}{3p^2 + 9} \Big|_{p=0} = \frac{4}{9};$$

$$\operatorname{Res}_{p=\pm j3} H_4(p) = \frac{p^2 + 4}{3p^2 + 9} \Big|_{p=\pm j3} = \frac{5}{18}$$

вещественны и положительны. Вещественная часть на мнимой оси

$$\operatorname{Re} [H_4(p)]_{p=j\omega} = \operatorname{Re} \left[ \frac{4 - \omega^2}{j\omega(9 - \omega^2)} \right] = 0.$$

Таким образом, рассматриваемая функция  $H_4(p)$  является физически реализуемой в качестве операторной входной характеристики линейной пассивной цепи.

Анализируя критерии физической реализуемости и рассматривая приведенные примеры, приходим к выводу, что если некоторая рациональная функция  $H(p)$  относится к положительным вещественным функциям и, следовательно, является физически реализуемой в качестве операторной входной характеристики линейной пассивной цепи, то обратная ей функция  $H^{-1}(p)$  также является физически реализуемой, причем нули функции  $H(p)$  соответствуют полюсам функции  $H^{-1}(p)$  и наоборот.

### Условия физической реализуемости и основные особенности операторных входных характеристик реактивных цепей

Цепи, составленные только из реактивных элементов (емкостей и индуктивностей), представляющие собой частный случай линейных пассивных электрических цепей, называются реактивными цепями, LC-цепями, или цепями без потерь.

Необходимое и достаточное условие того, чтобы заданная рациональная функция  $H(p)$  могла быть реализована в качестве входной функции реактивной цепи заключается в том, чтобы  $H(p)$  представляла собой положительную вещественную функцию  $p$  и, кроме того, либо полином  $N(p)$  должен быть четным, а полином  $M(p)$  — нечетным, либо наоборот. Функция, обладающая такими свойствами, называется реактансной или реактивной.

●●●●●

**Пример 9.3.** Определим, является ли функция  $H_4(p) = (p^2 + 4)/(p^3 + 9p)$  физически реализуемой в качестве операторного входного сопротивления или операторной входной проводимости реактивного двухполюсника.

В примере 9.2 было показано, что такая функция является положительной вещественной функцией комплексного переменного  $p$ . В связи с тем что полином  $N(p) = p^2 + 4$  четный, а полином  $M(p) = p^3 + 9p$  — нечетный, функция  $H_4(p)$  относится к реактансным и может быть реализована в качестве операторной входной характеристики реактивного двухполюсника.

Реактансная функция, обладая всеми свойствами положительных вещественных функций, имеет ряд дополнительных особенностей:

- 1) нули и полюсы ее расположены только на мнимой оси;
- 2) нули и полюсы чередуются, причем как в начале координат ( $p = 0$ ), так и на бесконечности ( $p = \pm\infty$ ) обязательно находится либо нуль, либо полюс;
- 3) значения реактансной функции на мнимой оси являются чисто мнимыми и растут с ростом  $\omega$  (в точках непрерывности).

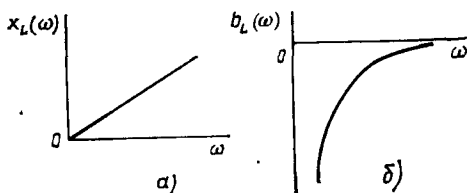


Рис. 9.1. Зависимости от частоты мнимых составляющих комплексного входного сопротивления (а) и комплексной входной проводимости (б) индуктивности

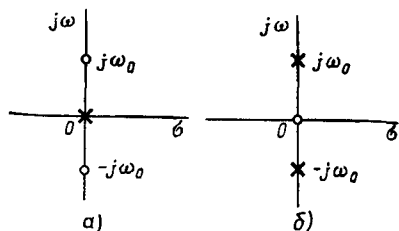


Рис. 9.2. Полюсно-нулевые диаграммы операторного входного сопротивления (а) и операторной входной проводимости (б) последовательной LC-цепи

Рассмотрим операторные входные характеристики некоторых реактивных двухполюсников.

Одноэлементные реактивные двухполюсники. Операторное входное сопротивление индуктивности  $Z_L(p) = pL$  имеет нуль в начале координат. При  $p \rightarrow \infty$  функция  $Z_L(p)$  принимает бесконечно большое значение (функция  $Z_L(p)$  имеет полюс на бесконечности). Нули и полюсы  $Z_L(p)$  лежат на мнимой оси (полюс или нуль, находящийся на бесконечности, считается расположенным на мнимой оси). Нули и полюсы чередуются, причем при  $p = j\omega$  значение функции  $Z_L(p)$  является чисто мнимым:  $Z_L(j\omega) = j\omega L = jx_L(\omega)$ , и растет с ростом  $\omega$ :  $dx(\omega)/d\omega = L > 0$  (рис. 9.1, а).

Операторная входная проводимость индуктивности  $Y_L(p) = 1/(pL)$  имеет полюс при  $p = 0$  и нуль при  $p = \infty$ , т.е. нули функции  $Y_L(p)$  соответствуют полюсам функции  $Z_L(p)$  и наоборот. Значения функции  $Y_L(p)$  на мнимой оси являются мнимыми:  $Y_L(j\omega) = 1/(j\omega L) = jb_L(\omega)$ , и растут с ростом  $\omega$ :  $db_L(\omega)/d\omega = 1/(\omega^2 L) > 0$  (рис. 9.1, б).

Поскольку емкость и индуктивность являются дуальными элементами, операторные входные характеристики емкости обладают такими же особенностями, как и операторные входные характеристики индуктивности.

Двухэлементные реактивные двухполюсники. Операторное входное сопротивление последовательной  $LC$ -цепи  $Z(p) = pL + 1/(pC) = L(p^2 + \omega_0^2)/p$  имеет полюсы в начале координат и на бесконечности и нули, расположенные на мнимой оси:  $p_{01} = j\omega_0$ ,  $p_{02} = -j\omega_0$ , где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (рис. 9.2, а) (полюсы и нули, находящиеся на бесконечности, на полюсно-нулевых диаграммах не изображают). Нулям операторного входного сопротивления последовательной  $LC$ -цепи соответствуют полюсы операторной входной проводимости этой цепи (рис. 9.2, б)

$$Y(p) = \frac{1}{pL + 1/(pC)} = \frac{p}{L(p^2 + \omega_0^2)},$$

а полюсам операторного входного сопротивления  $Z(p)$  — нули  $Y(p)$ . На мнимой оси значения функций  $Z(p)$  и  $Y(p)$  являются чисто мнимыми

$$Z(j\omega) = jL(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega = jx(\omega);$$

$$Y(j\omega) = -j\omega/[L(\omega^2 - \omega_0^2)] = jb(\omega)$$

и растут с ростом  $\omega$  (рис. 9.3, а, б).

Параллельная  $LC$ -цепь является дуальной по отношению к последовательной  $LC$ -цепи, поэтому операторное входное сопротивление  $Z(p) = p/C(p^2 + \omega_0^2)$  и операторная входная проводимость  $Y(p) = C(p^2 + \omega_0^2)/p$  параллельной  $LC$ -цепи обладают такими свойствами, как и соответствующие им характеристики последовательной  $LC$ -цепи.

Многоэлементные реактивные двухполюсники. Анализируя операторные входные характеристики произвольных реактивных двухполюсников, нетрудно убедиться, что общее число нулей и полюсов соответствующих функций на положительной мнимой полуоси, включая и внешние (в начале координат и на бесконечности), равно  $N + 1$ , где  $N$  — число независимо включенных реактивных элементов. В зависимости от расположения нулей и полюсов на положительной мнимой полуоси различают операторные характеристики реактивных двухполюсников:

- 1) типа 0—0 (нуль при  $\omega = 0$  и нуль при  $\omega = \infty$ );
- 2) типа 0—х (нуль при  $\omega = 0$  и полюс при  $\omega = \infty$ );
- 3) типа х—0 (полюс при  $\omega = 0$  и нуль при  $\omega = \infty$ );
- 4) типа х—х (полюс при  $\omega = 0$  и полюс при  $\omega = \infty$ ).

Для того чтобы определить, к какому типу относятся операторные характеристики заданного произвольного реактивного двухполюсника, достаточно установить, имеются ли между внешними выводами

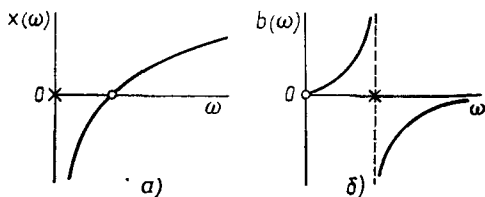


Рис. 9.3. Зависимости от частоты мнимых составляющих комплексного входного сопротивления (а) и комплексной входной проводимости (б) последовательности  $LC$ -цепи

этого двухполюсника пути, проходящие только через индуктивности и только через емкости. Если между выводами двухполюсника можно найти путь, проходящий только через индуктивности (сопротивление двухполюсника постоянному току равно нулю), то операторное входное сопротивление имеет нуль в начале координат. Если между выводами двухполюсника отсутствует путь, проходящий только через индуктивности (сопротивление двухполюсника постоянному току бесконечно велико), то операторное входное сопротивление имеет полюс в начале координат. Соответственно, если между выводами двухполюсника имеется путь, проходящий только через емкости, то сопротивление имеет нуль на бесконечности, в противном случае сопротивление

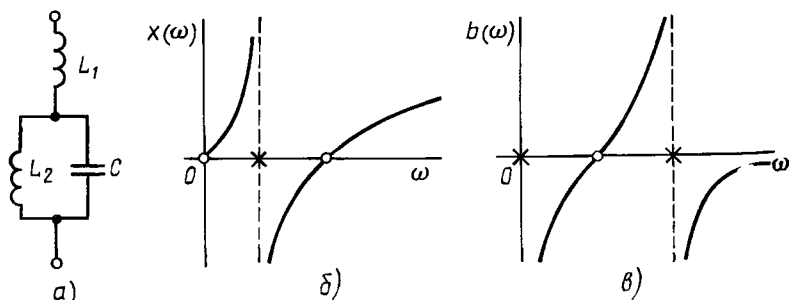


Рис. 9.4. К примеру 9.4

на бесконечности имеет полюс. Зная особенности операторных характеристик реактивных двухполюсников, можно качественно, по виду схемы, построить частотные характеристики произвольного реактивного двухполюсника.



**Пример 9.4.** *Определим типы частотных характеристик и построим качественно зависимости от частоты мнимых составляющих комплексных входного сопротивления и входной проводимости реактивного двухполюсника, схема которого изображена на рис. 9.4, а.*

*Непосредственно по схеме находим, что между внешними выводами двухполюсника имеется путь, проходящий только через индуктивности, и отсутствует путь, проходящий только через емкости. Следовательно, частотная характеристика входного сопротивления относится к типу 0—х, а частотная характеристика входной проводимости — к типу х—0. Общее число нулей и полюсов, включая внешние, на единицу больше числа реактивных элементов и равно 4. Зависимости от частоты мнимых составляющих комплексных входного сопротивления и входной проводимости рассматриваемого двухполюсника приведены на рис. 9.4, б, в соответственно.*

### Операторные входные характеристики безындуктивных и беземкостных цепей

В отличие от реактивных цепей, полюсы и нули операторных входных характеристик которых расположены только на мнимой оси плоскости комплексного переменного  $p$ , полюсы и нули операторных входных характеристик безындуктивных, или RC-цепей, и

беземкостных, или  $RL$ -цепей, располагаются только на отрицательной вещественной полуоси. Нули и полюсы операторных входных характеристик чередуются и являются простыми (некратными).

Исходя из физических представлений, нетрудно прийти к выводу, что при частоте, равной нулю, сопротивление  $RL$ -цепи может быть равно нулю или иметь конечное действительное значение; на бесконечно большой частоте сопротивление  $RL$ -цепи либо бесконечно велико, либо имеет конечное действительное значение. Следовательно, оператор-

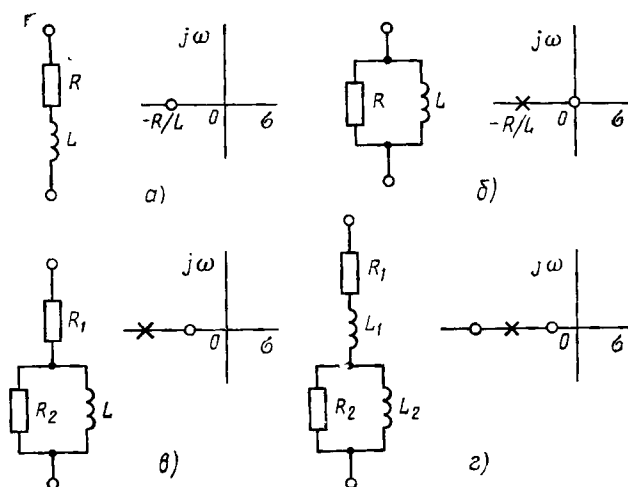


Рис. 9.5. Схемы простейших беземкостных цепей и соответствующие полюсно-нулевые диаграммы операторных входных сопротивлений

ное входное сопротивление беземкостной цепи не может иметь полюса в начале координат и нуля на бесконечности. Соответственно операторная входная проводимость этой цепи не может иметь нуля в начале координат и полюса на бесконечности. Если операторное входное сопротивление (операторная входная проводимость) беземкостной цепи на нулевой частоте имеет конечное действительное значение (между входными зажимами цепи отсутствует путь, проходящий только через индуктивности), то ближайшим к началу координат окажется нуль операторного входного сопротивления (полюс операторной входной проводимости). Примеры полюсно-нулевых диаграмм операторных входных сопротивлений простейших  $RL$ -цепей приведены на рис. 9.5, а—г.

Операторное входное сопротивление безындуктивной цепи на нулевой частоте может быть бесконечно большим или иметь конечное действительное значение, а на бесконечно большой частоте может быть равно нулю или иметь конечное действительное значение. Таким образом, операторное входное сопротивление  $RC$ -цепи не может иметь нуля в начале координат и полюса на бесконечности (операторная

входная проводимость не может иметь полюса на нулевой частоте и нуля на бесконечности). Если сопротивление  $RC$ -цепи на нулевой частоте имеет конечное действительное значение (между внешними выводами цепи имеется путь, проходящий только через сопротивления), то ближайшим к началу координат окажется полюс операторного

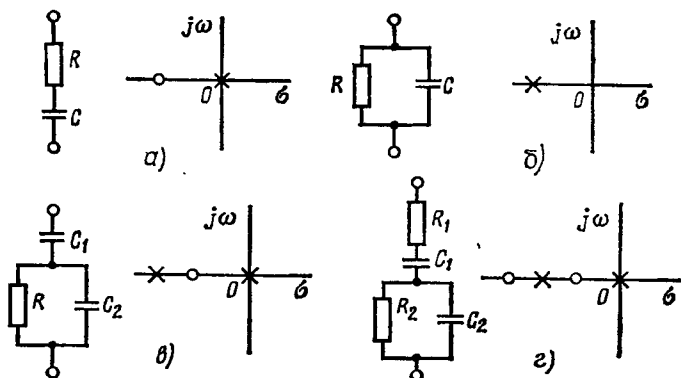


Рис. 9.6. Схемы простейших безындуктивных цепей и соответствующие полюсно-нулевые диаграммы операторных входных сопротивлений

входного сопротивления цепи (нóль операторной входной проводимости). Полюсно-нулевые диаграммы операторных входных сопротивлений простейших  $RC$ -цепей изображены на рис. 9.6,  $a—z$ .

### § 9.3. МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ РЕАКТИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

#### Метод выделения простейших составляющих (метод Фостера)

Метод Фостера основан на представлении заданной физически реализуемой функции  $H(p)$  в виде суммы простейших функций:

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + \dots + H_i(p) + \dots + H_n(p),$$

каждую из которых можно рассматривать как операторную входную характеристику некоторого элементарного одно- или двухэлементного двухполюсника. Если функция  $H(p)$  представляет собой операторное входное сопротивление, то искомая цепь может быть реализована в виде последовательного соединения элементарных двухполюсников, соответствующих каждой из простейших функций  $H_i(p)$ . Если  $H(p)$  представляет собой операторную входную проводимость, то искомая цепь реализуется в виде параллельного соединения элементарных двухполюсников, соответствующих каждой из простейших функций  $H_i(p)$ .



Метод Фостера применим для реализации положительных вещественных функций, нули и полюсы которых расположены только на мнимой оси и отрицательной вещественной полуоси. Этому ограничению удовлетворяют операторные входные функции реактивных, безындуктивных и беземкостных двухполюсников, а также операторные входные функции некоторых  $RLC$ -цепей. Рассмотрим применение метода Фостера к синтезу реактивных двухполюсников.

Пусть реактансная функция  $Z(p) = N(p)/M(p)$  должна быть реализована в качестве операторного входного сопротивления линейной пассивной цепи. Разложим функцию  $Z(p)$  на простые дроби

$$Z(p) = \alpha_{\infty} p + \alpha_0/p + \sum_{i=1}^N 2\alpha_i p / (p^2 + \omega_i^2). \quad (9.3)$$

Здесь  $N$  — число пар комплексно-сопряженных полюсов функции  $Z(p)$ ;  $\alpha_{\infty}$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_i$  — постоянные действительные положительные коэффициенты, причем  $\alpha_{\infty} p$  является целой частью функции  $Z(p)$ :

$$\alpha_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} Z(p)/p;$$

$\alpha_0$  определяется как вычет функции  $Z(p)$  в полюсе  $p = 0$ :

$$\alpha_0 = \operatorname{Res}_{p=0} Z(p) = \left[ \frac{N(p)}{dM(p)/dp} \right]_{p=0},$$

$\alpha_i$  — как вычеты функции  $Z(p)$  в полюсах  $p_i = \pm j\omega_i$ :

$$\alpha_i = \operatorname{Res}_{p=\pm j\omega_i} Z(p) = \left[ \frac{N(p)}{dM(p)/dp} \right]_{p=\pm j\omega_i}.$$

Очевидно, что первый член разложения (9.3) можно рассматривать как операторное входное сопротивление индуктивности

$$L_{\infty} = \alpha_{\infty}, \quad (9.4)$$

второй член — как операторное входное сопротивление емкости

$$C_0 = 1/\alpha_0, \quad (9.5)$$

а каждое из слагаемых вида  $Z_i(p) = 2\alpha_i p / (p^2 + \omega_i^2)$  — как операторное входное сопротивление параллельной  $LC$ -цепи, составленной из элементов

$$C_i = 1/(2\alpha_i); L_i = 2\alpha_i/\omega_i^2. \quad (9.6)$$

Таким образом, разложению (9.3) можно поставить в соответствие двухполюсник, представляющий собой последовательное соединение индуктивности  $L_{\infty}$ , емкости  $C_0$  и  $N$  параллельных  $LC$ -цепей. Схема двухполюсника, реализующего разложение (9.3), называется первой канонической схемой Фостера (рис. 9.7).

Анализируя различные виды реактансных функций  $Z(p) = N(p)/M(p)$ , можно прийти к заключению, что первый член разложения (9.3) не равен нулю, если функция  $Z(p)$  имеет полюс на бесконечности у таких функций степень полинома, стоящего в числителе, на едини-

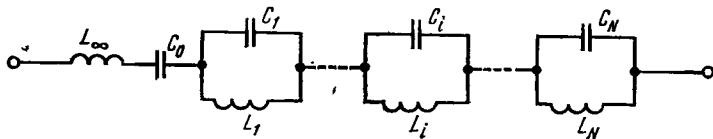


Рис. 9.7. Первая каноническая схема Фостера

цу выше степени полинома, стоящего в знаменателе), а второй член разложения не равен нулю, если  $Z(p)$  имеет полюс при  $p = 0$  (у таких функций множитель  $p$  в знаменателе может быть вынесен за скобки).

Следовательно, реактивный двухполюсник, реализующий заданную функцию  $Z(p)$  по первой канонической схеме Фостера, будет содержать индуктивность  $L_\infty$  только в том случае, если степень полинома  $N(p)$  превышает на единицу степень полинома  $M(p)$ , и емкость  $C_0$  только тогда, когда в многочлене  $M(p)$  множитель  $p$  может быть вынесен за скобки.



**Пример 9.5.** Методом Фостера построим двухполюсник, операторное входное сопротивление которого

$$Z(p) = (p^2 + 4)/(p^3 + 9p), \text{ Ом.}$$

В примерах 9.2, 9.3 было установлено, что данная функция является реактансной и, следовательно, может быть реализована с помощью метода Фостера. Непосредственно по виду функции устанавливаем, что искомым двухполюсником представляет собой последовательное соединение емкости  $C_0$  (в знаменателе функции  $p$  выносится за скобки) и параллельной LC-цепи (функция  $Z(p)$  имеет одну пару комплексно-сопряженных полюсов). Разлагая  $Z(p)$  на простые дроби

$$Z(p) = \alpha_0/p + 2\alpha_1 p/(p^2 + \omega_1^2),$$

где  $\alpha_0 = 4/9$ ,  $\alpha_1 = 5/18$ ,  $\omega_1^2 = 9$ , и используя соотношения (9.5), (9.6), определяем параметры элементов искомой цепи (рис. 9.8):  $C_0 = 2,25 \text{ Ф}$ ,  $C_1 = 1,8 \text{ Ф}$ ,  $L_1 = 5/81 \text{ Гн}$ .



**Пример 9.6.** Методом Фостера построим двухполюсник, входное сопротивление которого

$$Z(p) = (p^3 + 9p)/(p^2 + 4), \text{ Ом.}$$

Заданная функция является реактансной, поскольку реактансной является обратная ей функция, рассмотренная в предыдущем примере. Непосредственно по виду функции  $Z(p)$  устанавливаем, что искомым двухполюсником должен пред-

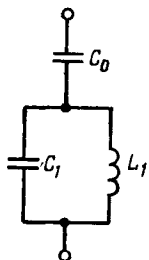


Рис. 9.8. К примеру 9.5

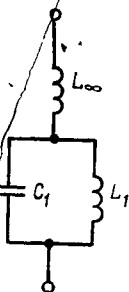


Рис. 9.9. К примеру 9.6

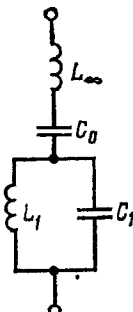


Рис. 9.10. К примеру 9.7

составлять собой последовательное соединение индуктивности  $L_\infty$  и параллельной LC-цепи (рис. 9.9). Разлагая функцию  $Z(p)$  на простейшие составляющие  $Z(p) = p + 5p/(p^2 + 4)$  и используя соотношения (9.4) и (9.6), определяем параметры входящих в двухполюсник элементов  $L_\infty = 1$  Гн,  $C_1 = 0,2$  Ф,  $L_1 = 1,25$  Гн.



**Пример 9.7.** Методом Фостера построим двухполюсник, входное сопротивление которого

$$Z(p) = (2p^4 + 5p^2 + 2)/(p^3 + p), \text{ Ом}$$

Очевидно, что искомый двухполюсник может быть реализован путем последовательного соединения индуктивности  $L_\infty$ , емкости  $C_0$  и параллельной LC-цепи (рис. 9.10). Разлагая функцию  $Z(p)$  на простые дроби  $Z(p) = 2p + 2/p + p^2/(p^2 + 1)$  и используя соотношения (9.4), (9.5), (9.6), определяем параметры элементов  $L_\infty = 2$  Гн,  $C_0 = 0,5$  Ф,  $C_1 = 1$  Ф,  $L_1 = 1$  Гн.

Аналогичным образом синтезируют двухполюсник и тогда, когда заданная реактансная функция должна быть реализована в качестве операторной входной проводимости линейной пассивной цепи. Разложению функции  $Y(p)$  на простые дроби

$$Y(p) = \alpha'_\infty p + \alpha'_0/p + \sum_{i=1}^N 2\alpha'_i p/(p^2 + \omega_i^2), \quad (9.7)$$

где  $N$  — число пар комплексно-сопряженных полюсов функции  $Y(p)$ ;  $\alpha'_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} Y(p)/p$ ,  $\alpha'_0 = \text{Res}_{p=0} Y(p)$ ,  $\alpha'_i = \text{Res}_{p=\pm j\omega_i} Y(p)$  — постоянные действительные положительные коэффициенты, можно поставить в соответствие двухполюсник из параллельно соединенных

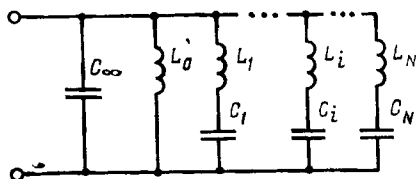


Рис. 9.11. Вторая каноническая схема Фостера

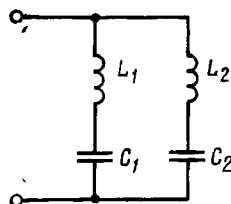


Рис. 9.12. К примеру 9.8

емкости  $C_\infty = \alpha'_\infty$ , индуктивности  $L_0 = 1/\alpha'_0$  и  $N$  последовательных LC-цепей (рис. 9.11) с параметрами  $L_i = 1/(2\alpha'_i)$  и  $C_i = 2\alpha'_i/\omega_i^2$ . Схема двухполюсника, соответствующего выражению (9.7), называется второй канонической схемой Фостера. Очевидно, что искомый двухполюсник содержит емкость  $C_\infty$ , если функция  $Y(p)$  имеет полюс на бесконечности (степень числителя функции  $Y(p)$  на единицу выше степени знаменателя), и индуктивность  $L_0$ , если функция  $Y(p)$  имеет полюс при  $p = 0$  (в знаменателе функции  $Y(p)$  множитель  $p$  выносится за скобки).



**Пример 9.8.** Используя метод выделения простейших составляющих, построим двухполюсник, проводимость которого

$$Y(p) = (p^3 + p)/(2p^4 + 5p^2 + 2), \text{ См.}$$

Непосредственно по виду функции  $Y(p)$  устанавливаем, что искомый двухполюсник может быть реализован путем параллельного соединения двух последовательных LC-цепей (рис. 9.12). Разлагая  $Y(p)$  на простые дроби  $Y(p) = \frac{p}{3(p^2 + 2)} + \frac{p}{6(p^2 + 0,5)}$ , определяем параметры элементов двухполюсника:  $L_1 = 3$  Гн,  $C_1 = 1/6$  Ф,  $L_2 = 6$  Гн,  $C_2 = 1/3$  Ф.

### Метод разложения в цепную дробь (метод Кауэра)

В соответствии с методом Кауэра реактивный двухполюсник, обладающий заданной операторной входной характеристикой  $H(p)$ , реализуется в виде лестничной цепи, построенной по первой или второй каноническим схемам Кауэра.

Первая каноническая схема Кауэра (рис. 9.13, а) содержит индуктивности в продольных и емкости в поперечных ветвях; вторая каноническая схема Кауэра (рис. 9.13, б) содержит емкости в продольных ветвях, а индуктивности — в поперечных. Первая и последняя ячейки канонических схем Кауэра могут быть неполными — в них могут отсутствовать элементы,

которым на рис. 9.13 присвоены номера 1 и  $N$ . Первая каноническая схема Кауэра содержит индуктивность  $L_1$  только тогда, когда операторное входное сопротивление цепи имеет полюс на бесконечности. Вторая каноническая схема Кауэра содержит емкость  $C_1$ , если операторное входное сопротивление цепи имеет полюс при  $p = 0$ .

Как было показано в гл. 2, комплексное (в общем случае операторное) входное сопротивление или комплексная входная проводимость лестничной цепи могут быть представлены в виде цепных дробей (2.133), (2.134), элементы которых равны комплексным сопротивлениям двухполюсников, образующих продольные ветви цепи, и комплексным проводимостям двухполюсников, образующих поперечные ветви.

Рис. 9.13. Первая (а) и вторая (б) канонические схемы Кауэра

Если в первой канонической схеме Кауэра есть индуктивность  $L_1$ , то операторное входное сопротивление может быть представлено в виде цепной дроби с элементами типа  $p\alpha_i$ :

$$Z(p) = pL_1 + \frac{1}{pC_2 + \frac{1}{pL_3 + \dots + \frac{1}{pL_{N-1} + 1/(pC_N)}}}$$

Если в первой канонической схеме Кауэра нет индуктивности  $L_1$  (операторная входная проводимость имеет полюс на бесконечности) — в виде цепной дроби с элементами типа  $\rho\alpha_i$  может быть представлена операторная входная проводимость цепи

$$Y(p) = \rho C_1 + \frac{1}{\rho L_2 + \frac{1}{\rho C_3 + \dots + \frac{1}{\rho L_{N-1} + 1/(\rho C_N)}}}$$

Для цепей, построенных по второй канонической схеме Кауэра, выражения для операторного входного сопротивления

$$Z(p) = \left( \frac{1}{\rho C_1} \right) + \frac{1}{\left( \frac{1}{\rho L_2} \right) + \frac{1}{\left( \frac{1}{\rho C_3} \right) + \dots + \frac{1}{\left( \frac{1}{\rho C_{N-1}} \right) + \frac{1}{1/(\rho L_N)}}}}$$

или операторной входной проводимости

$$Y(p) = \frac{1}{\rho L_1} + \frac{1}{\rho C_2 + \frac{1}{\frac{1}{\rho L_3} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{\rho C_{N-1}} + \frac{1}{1/(\rho L_N)}}}}$$

представляются в виде цепных дробей с элементами типа  $1/(\rho\beta_i)$ . Следовательно, если заданная операторная входная функция  $H(p)$  может быть представлена в виде цепной дроби

$$H(p) = H_1(p) + \frac{1}{H_2(p) + \frac{1}{H_3(p) + \dots + \frac{1}{H_{N-1}(p) + 1/[H_N(p)]}}} \quad (9.8)$$

с элементами типа  $\rho\alpha_i$  или  $1/(\rho\beta_i)$ , где  $\alpha_i, \beta_i$  — постоянные действительные положительные коэффициенты, то такой функции может быть поставлен в соответствие реактивный двухполюсник, построенный по первой или второй канонической схеме Кауэра.

Таким образом, реализация реактивного двухполюсника по рассматриваемому методу сводится к разложению заданной реактансной функции  $H(p)$  в цепную дробь с элементами типа  $\rho\alpha_i$  или  $1/(\rho\beta_i)$ .

Функцию  $H(p) = N(p)/M(p)$  разлагают в цепную дробь вида (9.8) путем последовательного выделения элементов дроби  $H_i(p)$  в результате деления полинома  $N(p)$  на полином  $M(p)$ , затем полинома  $M(p)$  на остаток от первого деления  $0_1(p)$ , затем остатка от первого

деления  $O_1(p)$  на остаток от второго деления  $O_2(p)$ , и так далее, до тех пор, пока остаток от последнего деления не будет равен нулю.

$$\begin{aligned} H(p) = \frac{N(p)}{M(p)} &= H_1(p) + \frac{O_1(p)}{M(p)} = H_1(p) + \frac{1}{M(p)/O_1(p)} = \\ &= H_1(p) + \frac{1}{H_2(p) + \frac{1}{O_1(p)/O_2(p)}} = \\ &= H_1(p) + \frac{1}{H_2(p) + \frac{1}{H_3(p) + \frac{1}{O_2(p)/O_3(p)}}} = \dots \end{aligned}$$

Для реализации первой канонической схемы Кауэра выбирают ту из входных функций (операторное сопротивление или операторная проводимость), которая имеет полюс на бесконечности, причем члены полиномов  $N(p)$  и  $M(p)$  располагают в порядке убывания степеней  $p$ .

Для реализации второй канонической схемы Кауэра используют ту из входных функций, которая имеет полюс при  $p = 0$ , а полиномы  $N(p)$  и  $M(p)$  располагают в порядке возрастания степеней  $p$ . При выполнении деления необходимо следить, чтобы коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  были положительными. Если в процессе деления какой-либо из коэффициентов  $\alpha_i$  окажется меньше нуля, то необходимо перейти от расположения полиномов по убывающим степеням  $p$  к расположению по возрастающим степеням  $p$ . Наоборот, если какой-либо из коэффициентов  $\beta_i$  окажется меньше нуля, то необходимо перейти от расположения полиномов по возрастающим степеням  $p$  к расположению по убывающим степеням.

Как и метод Фостера, рассматриваемый метод может быть применен и к синтезу  $RC$ -,  $RL$ - и  $RLC$ -цепей, нули и полюсы операторных входных характеристик которых расположены на мнимой оси и отрицательной вещественной полуоси. Необходимо иметь в виду, что область применимости метода Кауэра несколько уже, чем метода Фостера, так как ряд операторных входных функций, реализуемых с помощью метода Фостера, не может быть представлен как операторное входное сопротивление или операторная входная проводимость какой-либо лестичной цепи.



**Пример 9.9.** Используя метод Кауэра, построим реактивные двухполюсники. операторное входное сопротивление которых

$$Z(p) = (2p^4 + 5p^2 + 2)/(p^3 + p), \text{ Ом.}$$

Функция  $Z(p)$  имеет полюс на бесконечности и полюс при  $p = 0$ , поэтому функция  $Z(p)$  может быть использована как при реализации первой, так и при реализации второй канонических схем Кауэра. Располагая полиномы числителя

и знаменателя функции  $Z(p)$  в порядке убывания степеней  $p$  и последовательно выделяя члены вида  $p\alpha_i$

$$\begin{array}{r}
 \frac{2p^4 + 5p^2 + 2}{2p^4 + 2p^2} \Big| \frac{p^3 + p}{2p} \rightarrow Z_1(p) \\
 \frac{p^3 + p}{p^3 + 2p/3} \Big| \frac{3p^2 + 2}{p/3} \rightarrow Y_2(p) \\
 \frac{3p^2 + 2}{3p^2} \Big| \frac{p/3}{9p} \rightarrow Z_3(p) \\
 \frac{p/3}{p/3} \Big| \frac{2}{p/6} \rightarrow Y_4(p) \\
 0 \rightarrow 0_4(p)
 \end{array}$$

разложим функцию в цепную дробь

$$Z_1(p) = 2p + \frac{1}{p/3 + \frac{1}{9p + \frac{1}{p/6}}}$$

и определяем параметры элементов первой канонической схемы Кауэра (рис. 9.14, а);  $L_1 = 2$  Гн,  $C_2 = 1/3$  Ф,  $L_3 = 9$  Гн,  $C_4 = 1/6$  Ф.

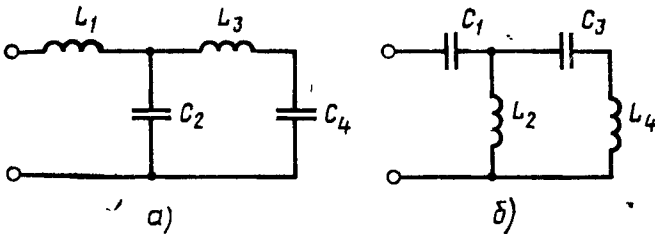


Рис. 9.14. К примеру 9.9

Располагая полиномы числителя и знаменателя функции  $Z(p)$  в порядке возрастания степеней  $p$  и последовательно выделяя члены вида  $1/(p\beta_i)$ .

$$\begin{array}{r}
 \frac{2 + 5p^2 + 2p^4}{2 + 2p^2} \Big| \frac{p + p^3}{p} \rightarrow Z_1(p) \\
 \frac{p + p^3}{p + 2p^3/3} \Big| \frac{3p^2 + 2p^4}{1/(3p)} \rightarrow Y_2(p) \\
 \frac{3p^2 + 2p^4}{3p^2} \Big| \frac{p^3/3}{9/p} \rightarrow Z_3(p) \\
 \frac{p^3/3}{p^3/3} \Big| \frac{2p^4}{1/(6p)} \rightarrow Y_4(p) \\
 0 \rightarrow 0_4(p)
 \end{array}$$

разлагаем функцию  $Z(p)$  в цепную дробь

$$Z(p) = \left(\frac{2}{p}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{3p}\right) + \frac{1}{\left(\frac{9}{p}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{6p}\right)}}$$

и определяем параметры элементов второй канонической схемы Кауэра (рис. 9.14, б):  $C_1 = 1/2$  Ф,  $L_2 = 3$  Гн,  $C_3 = 1/9$  Ф,  $L_4 = 6$  Гн.

Анализируя примеры 9.7, 9.8, 9.9, убеждаемся, что решение задачи синтеза цепи по заданной операторной входной характеристике действительно не является единственным. Все четыре полученных в этих примерах двухполюсника (рис. 9.10, 9.12, 9.14) обладают одинаковыми операторными входными характеристиками, но построены по различным схемам из элементов с различными параметрами.

В то же время все четыре полученных двухполюсника содержат одинаковое число элементов. Это число является минимальным, с помощью которого можно реализовать заданную функцию в рассматриваемом элементном базисе.

## § 9.4. ОСНОВЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ПАССИВНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

### Задача синтеза четырехполюсников

Методы синтеза четырехполюсников менее разработаны, чем методы синтеза двухполюсников, однако в настоящее время эта область теории цепей интенсивно развивается. Синтез четырехполюсников, как и двухполюсников, можно производить во временной и частотной областях.

Рассмотрим методы синтеза в частотной области (т.е. по заданным операторным входным и передаточным характеристикам), отметив, что поскольку проходной четырехполюсник может быть представлен различными входными и передаточными характеристиками, возможны различные варианты постановки задачи синтеза. Например, синтез четырехполюсника по заданным выражениям для первичных или вторичных параметров; по заданной передаточной характеристике в режиме холостого хода на выходе; по заданной передаточной характеристике при согласованной чисто резистивной или произвольной нагрузке.

Критерии физической реализуемости четырехполюсников формулируются различным образом в зависимости от постановки задачи синтеза и заданного или выбранного элементного базиса. В общем случае на вид операторных передаточных характеристик линейной пассивной цепи  $H(p) = N(p)/M(p)$  накладывается меньше ограничений, чем на вид операторных входных характеристик. В частности, степени полиномов  $N(p)$  и  $M(p)$  могут отличаться больше чем на единицу, вещественная часть передаточных функций на мнимой оси может быть отри-



ательной, а нули передаточных функций могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскостях (полюсы передаточных характеристик совпадают с нулями операторного входного сопротивления или операторной входной проводимости и не могут располагаться в правой полуплоскости).

### Минимально-фазовые и неминимально-фазовые четырехполюсники

Рассмотрим два четырехполюсника А и Б, операторные коэффициенты передачи которых по напряжению определяются выражениями

$$K_A(p) = (p + a)/(p + b), \quad (9.9)$$

$$K_B(p) = (p - a)/(p + b), \quad (9.10)$$

где  $a, b$  — действительные положительные числа. Функции  $K_A(p)$  и  $K_B(p)$  имеют одинаковые полюсы  $p_{xA} = p_{xB} = -b$ , расположенные в левой полуплоскости, и равные по модулю нули  $|p_{0A}| = |p_{0B}| = a$ , причем нуль функции  $K_A(p)$  лежит в левой (рис. 9.15, а), а нуль функции  $K_B(p)$  в правой (рис. 9.15, б) полуплоскости.

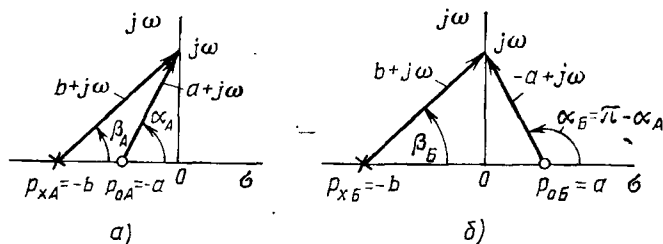


Рис. 9.15. К понятиям минимально-фазового и неминимально-фазового четырехполюсников

Заменяя в выражениях (9.9), (9.10) комплексную частоту  $p$  на  $j\omega$ , определим комплексные коэффициенты передачи рассматриваемых четырехполюсников по напряжению

$$K_A(j\omega) = (a + j\omega)/(b + j\omega); \quad (9.11)$$

$$K_B(j\omega) = (-a + j\omega)/(b + j\omega). \quad (9.12)$$

Каждый из двучленов, стоящих в числителе и знаменателе выражений (9.11), (9.12), можно изобразить на плоскости комплексного переменного  $p$  в виде вектора, проведенного из нуля или полюса функций  $K_A(p)$ ,  $K_B(p)$  в произвольную точку  $j\omega$ , лежащую на мнимой оси (рис. 9.15). Следовательно, модули комплексных коэффициентов передачи четырехполюсников по напряжению равны отношению длин

векторов, проведенных из нулей, к длинам векторов, проведенных из полюсов соответствующих функций:

$$K_A(\omega) = \sqrt{a^2 + \omega^2} / \sqrt{b^2 + \omega^2} \quad (9.13)$$

$$K_B(\omega) = \sqrt{a^2 + \omega^2} / \sqrt{b^2 + \omega^2} \quad (9.14)$$

а аргументы комплексных коэффициентов передачи четырехполюсников — разности углов, образуемых с положительным направлением вещественной оси векторами, проведенными из нулей, и векторами, проведенными из полюсов функций  $K_A(p)$  и  $K_B(p)$ :

$$\psi_A = \alpha_A - \beta_A = \operatorname{arctg}(\omega/a) - \operatorname{arctg}(\omega/b); \quad (9.15)$$

$$\psi_B = \alpha_B - \beta_B = \pi - \operatorname{arctg}(\omega/a) - \operatorname{arctg}(\omega/b). \quad (9.16)$$

Как видно из выражений (9.13)—(9.16), модули комплексных коэффициентов передачи по напряжению обоих четырехполюсников равны, а аргумент комплексного коэффициента передачи по напряжению четырехполюсника А меньше, чем соответствующий аргумент четырехполюсника Б. Таким образом, при одинаковых модулях аргумент передаточной функции, имеющей нули в правой полуплоскости, больше аргумента передаточной функции, нули которой расположены только в левой полуплоскости. Полученный результат имеет весьма общий характер и распространяется на любые передаточные функции, имеющие произвольное число нулей и полюсов, расположенных не только на вещественной оси, но и в произвольных точках плоскости  $p$ .

В соответствии с указанным свойством четырехполюсники, передаточные функции которых не имеют нулей в правой полуплоскости, называются минимально-фазовыми, а четырехполюсники, у которых хотя бы один нуль расположен в правой полуплоскости, — неминимально-фазовыми.

Комплексные частотные характеристики неминимально-фазовых четырехполюсников обладают рядом интересных особенностей. В частности, если у рассмотренного неминимально-фазового четырехполюсника Б параметры элементов выбраны таким образом, что

$$|p_{0B}| = |p_{\infty B}| = a = b, \quad (9.17)$$

то его модуль коэффициента передачи по напряжению не зависит от частоты:  $K_B(\omega) = 1$ , а аргумент коэффициента передачи по напряжению с изменением частоты изменяется в пределах от  $\pi$  до 0:  $\psi_B(\omega) = \pi - 2\operatorname{arctg}(\omega/a)$ .

Четырехполюсник с АЧХ и ФЧХ такого типа называется фазовым контуром, все пропускающим четырехполюсником, или четырехполюсником чисто фазового сдвига. Фазовые контуры широко используют для коррекции ФЧХ цепей, т. е. когда необходимо изменить ФЧХ цепи без изменения ее АЧХ.



**Пример 9.10.** *Определим операторный коэффициент передачи по напряжению симметричного мостового реактивного четырехполюсника (рис. 9.16) при согласованной нагрузке. Убедимся, что рассматриваемый четырехполюсник относится к фазовым контурам.*

Используя выражения для первичных параметров симметричного мостового четырехполюсника (см. пример 8.14), определяем А-параметры:

$$A_{11}(p) = A_{22}(p) = \frac{pL + 1/(pC)}{pL - 1/(pC)};$$

$$A_{12}(p) = \frac{2L/C}{pL - 1/(pC)};$$

$$A_{21}(p) = \frac{2}{pL - 1/(pC)}.$$

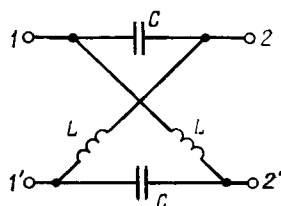


Рис. 9.16. К примеру 9.10

Характеристическое сопротивление такого четырехполюсника имеет чисто резистивный характер  $Z_C(p) = \sqrt{A_{12}(p)/A_{21}(p)} = \sqrt{L/C}$ , а операторный коэффициент передачи по напряжению при согласованной нагрузке

$$K_{21}(p) = \frac{1}{\sqrt{A_{11}(p)A_{22}(p)} + \sqrt{A_{12}(p)A_{21}(p)}} = \frac{p - 1/\sqrt{LC}}{p + 1/\sqrt{LC}}.$$

Полюсы и нули  $K_{21}(p)$  удовлетворяют условию (9.17), поэтому рассматриваемый четырехполюсник относится к фазовым контурам.

Существенное различие между минимально-фазовыми и неминимально-фазовыми четырехполюсниками заключается в том, что модуль и аргумент, равно как и вещественная и мнимая части, передаточной функции минимально-фазового четырехполюсника связаны однозначными зависимостями, которые отсутствуют у неминимально-фазовых четырехполюсников.

## Методы реализации пассивных четырехполюсников

Задача синтеза четырехполюсников решается в два этапа: на первом этапе проверяют условия физической реализуемости заданных характеристик, на втором — определяют схему искомой цепи и параметры входящих в нее элементов. Оставляя открытым вопрос о физической реализуемости операторных передаточных характеристик, рассмотрим некоторые простые методы, позволяющие свести задачу реализации пассивных четырехполюсников к рассмотренной ранее задаче реализации пассивных двухполюсников.

Если синтез пассивного четырехполюсника производится по заданным выражениям для первичных или вторичных параметров, то эффективный способ решения задачи заключается в использовании П-образной или Т-образной канонических схем замещения взаимного четырехполюсника, приведенных на рис. 8.14, б, в. Операторные входные сопротивления или операторные входные проводимости пассивных двухполюсников, входящих в канонические схемы замещения, определяют с помощью соотношений (8.58), (8.59) по известным выражениям для Z- или Y-параметров. Таким образом, задача синтеза пассивного четырехполюсника сводится к задаче синтеза пассивных двухполюсников, входящих в канонические схемы замещения.



**Пример 9.11.** Найдем одну из возможных схем реализаций четырехполюсника,  $Y$ -параметры которого определяются выражениями

$$Y_{11}(p) = \frac{720 \cdot 10^{-48} p^5 + 276 \cdot 10^{-30} p^3 + 12 \cdot 10^{-12} p}{360 \cdot 10^{-36} p^4 + 42 \cdot 10^{-18} p^2 + 1}, \text{ См};$$

$$Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = -\frac{60 \cdot 10^{-30} p^3 + 8 \cdot 10^{-12} p}{30 \cdot 10^{-18} p^2 + 1}, \text{ См};$$

$$Y_{22}(p) = \frac{270 \cdot 10^{-30} p^3 + 30 \cdot 10^{-18} p^2 + 15 \cdot 10^{-12} p + 1}{30 \cdot 10^{-18} p^2 + 1}, \text{ См}.$$

Выберем для реализации П-образную схему замещения четырехполюсника (см. рис. 8.14, в) и, используя соотношения (8.59), определим операторные входные проводимости входящих в нее двухполюсников:

$$Y_1(p) = Y_{11}(p) + Y_{12}(p) = \frac{4 \cdot 10^{-12} p}{12 \cdot 10^{-18} p^2 + 1} = \frac{p}{3 \cdot 10^{-6} [p^2 + 1 / (12 \cdot 10^{-18})]}, \text{ См}$$

$$Y_2(p) = -Y_{12}(p) = \frac{60 \cdot 10^{-30} p^3 + 8 \cdot 10^{-12} p}{30 \cdot 10^{-18} p^2 + 1} = 2 \cdot 10^{-12} p +$$

$$+ \frac{p}{5 \cdot 10^{-6} \left( p^2 + \frac{1}{30 \cdot 10^{-18}} \right)}, \text{ См}$$

$$Y_3(p) = Y_{22}(p) + Y_{12}(p) = 7 \cdot 10^{-12} p + 1, \text{ См}.$$

Как видно из полученных выражений, двухполюсник  $Y_1(p)$  может быть реализован в виде последовательного соединения емкости  $C_1 = 4$  пФ и индуктивности  $L_1 = 3$  мкГн. Двухполюсник  $Y_2(p)$  реализуется в виде параллельного соединения емкости  $C_3 = 2$  пФ и последовательной LC-цепи, состоящей из емкости  $C_2 = 6$  пФ и индуктивности  $L_2 = 5$  мкГн, а двухполюсник  $Y_3(p)$  — путем параллельного соединения сопротивления  $R = 1$  Ом и емкости  $C_4 = 7$  пФ (рис. 9.17).

Синтезировать четырехполюсник по заданному операторному коэффициенту передачи по напряжению в режиме холостого хода  $K_{21x}(p) = N(p)/M(p)$  можно также с использованием П- или Т-образных канонических схем замещения. Для этого необходимо так подобрать выражения для его  $Y$ - или  $Z$ -параметров, чтобы они обеспечили заданную передаточную характеристику

$$K_{21x}(p) = N(p)/M(p) = -Y_{21}(p)/Y_{22}(p) = Z_{21}(p)/Z_{11}(p)$$

и были физически реализуемы. Более просто реализовать заданный  $K_{21x}(p)$  можно с помощью Г-образного четырехполюсника с Т-входом (см. рис. 8.17, а). Операторный коэффициент передачи по напряжению такого четырехполюсника в режиме холостого хода определяется выражением (8.122).

Для нахождения операторных входных сопротивлений двухполюсников, образующих продольную и поперечную ветви Г-образного четырехполюсника, приведем выражение для коэффициента передачи к виду (8.122). Это достигается путем деления полиномов  $N(p)$  и  $M(p)$  на некоторый полином  $Q(p)$ :

$$K_{21x}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{N(p)/Q(p)}{M(p)/Q(p)} = \frac{N(p)/Q(p)}{N(p)/Q(p) + [M(p) - N(p)]/Q(p)},$$

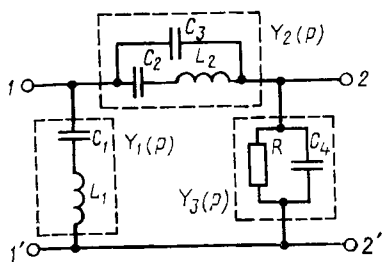


Рис. 9.17. К примеру 9.11

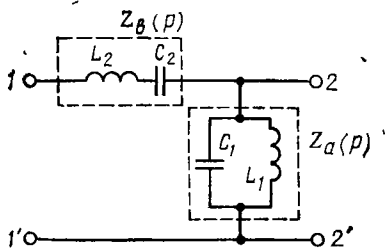


Рис. 9.18. К примеру 9.12

выбранный таким образом, чтобы функции

$$Z_a(p) = N(p)/Q(p) \text{ и } Z_b(p) = [M(p) - N(p)]/Q(p)$$

были физически реализуемыми.

Следует иметь в виду, что нули операторного коэффициента передачи по напряжению четырехполюсника, составленного по  $\Gamma$ -образной схеме, совпадают с нулями сопротивления  $Z_a(p)$  и полюсами сопротивления  $Z_b(p)$  и, следовательно, находятся в левой полуплоскости. Поэтому  $\Gamma$ -образную схему можно использовать только для реализации операторных передаточных характеристик минимально-фазовых четырехполюсников.



**Пример 9.12.** Используя  $\Gamma$ -образную схему, построим четырехполюсник, операторный коэффициент передачи по напряжению которого в режиме холостого хода

$$K_{21x}(p) = 10p^2/(180p^4 + 37p^2 + 1) = N(p)/M(p).$$

Разделим числитель и знаменатель данного выражения на полином  $Q(p) = 30p^3 + 2p$ , выбранный таким образом, чтобы операторные входные сопротивления продольного  $Z_b(p)$  и поперечного  $Z_a(p)$  плеч  $\Gamma$ -образного четырехполюсника представляли собой положительные вещественные функции:

$$Z_a(p) = \frac{N(p)}{Q(p)} = \frac{15p}{15p^2 + 1} = \frac{p}{3(p^2 + 1/15)};$$

$$Z_b(p) = [M(p) - N(p)]/Q(p) = (12p^2 + 1)/(2p) = 6p + 1/(2p).$$

Как видно из полученных выражений, сопротивление  $Z_a(p)$  может быть реализовано в виде параллельного соединения емкости  $C_1 = 3 \text{ Ф}$  и индуктивности  $L_1 = 5 \text{ Гн}$ , а сопротивление  $Z_b(p)$  — в виде последовательного соединения индуктивности  $L_2 = 6 \text{ Гн}$  и емкости  $C_2 = 2 \text{ Ф}$  (рис. 9.18).

Четырехполюсник с заданным операторным коэффициентом передачи по напряжению в режиме холостого хода  $K_{21x}(p)$  можно реализовать и по симметричной мостовой схеме (см. рис. 8.18, а), причем в этом случае нули  $K_{21x}(p)$  могут располагаться как в левой, так и в правой полуплоскостях. Коэффициент передачи по напряжению полученного четырехполюсника может быть выражен через сопротивления продольных  $Z_1(p)$  и скрещивающихся  $Z_2(p)$  ветвей (см. пример 8.14):

$$K_{21x}(p) = Z_{21}(p)/Z_{11}(p) = [Z_2(p) - Z_1(p)]/[Z_2(p) + Z_1(p)]. \quad (9.18)$$

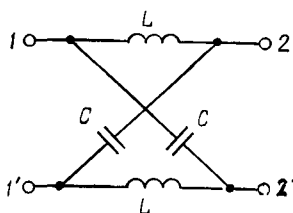


Рис. 9.19. К примеру 9.13

Разделим числитель и знаменатель заданного выражения для  $K_{21x}(p)$  на некоторый полином  $Q(p)$  и преобразуем полученное выражение к виду (9.18):

$$K_{21x}(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{N(p)/Q(p)}{M(p)/Q(p)} = \frac{[M(p) + N(p)]/Q(p) - [M(p) - N(p)]/Q(p)}{[M(p) + N(p)]/Q(p) + [M(p) - N(p)]/Q(p)} \quad (9.19)$$

Из сравнения выражений (9.18) и (9.19) видно, что если полином  $Q(p)$  выбран таким образом, что операторные сопротивления  $Z_1(p) = [M(p) - N(p)]/Q(p)$ ;  $Z_2(p) = [M(p) + N(p)]/Q(p)$  (9.20) могут быть физически реализованы, то симметричный мостовой четырехполюсник, сопротивления продольных и скрещивающихся ветвей которого определяются выражениями (9.20), будет обладать заданным операторным коэффициентом передачи по напряжению.

Симметричный мостовой четырехполюсник можно использовать и для реализации заданного операторного коэффициента передачи по напряжению в режиме согласованной нагрузки. В этом случае  $K(p)$  и  $Z_C(p)$  могут быть определены с помощью выражений (8.82), (8.86)\*):

$$Z_C(p) = \sqrt{A_{12}(p)/A_{21}(p)} = \sqrt{Z_1(p)Z_2(p)};$$

$$K(p) = \frac{1}{\sqrt{A_{11}(p)A_{22}(p)} + \sqrt{A_{12}(p)A_{21}(p)}} = \frac{\sqrt{Z_2(p)} - \sqrt{Z_1(p)}}{\sqrt{Z_2(p)} + \sqrt{Z_1(p)}} \quad (9.21)$$

Используя (9.21), выразим сопротивления продольных и скрещивающихся ветвей четырехполюсника через сопротивление нагрузки  $Z_H(p) = Z_C(p)$  и коэффициент передачи по напряжению:

$$\begin{aligned} Z_1(p) &= [1 - K(p)]Z_H(p)/[1 + K(p)]; \\ Z_2(p) &= [1 + K(p)]Z_H(p)/[1 - K(p)]. \end{aligned} \quad (9.22)$$



**Пример 9.13.** Построим четырехполюсник, операторный коэффициент передачи по напряжению которого при согласованной нагрузке  $Z_H(p) = 10$  Ом определяется выражением

$$K(p) = -(p - 10^6)/(p + 10^6).$$

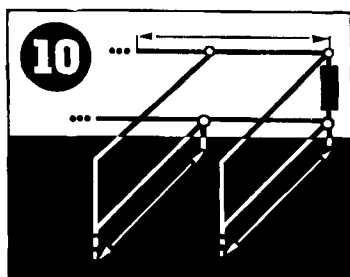
Подставляя заданные  $K(p)$  и  $Z_H(p)$  в выражения (9.22), определяем операторные сопротивления продольных  $Z_1(p)$  и скрещивающихся  $Z_2(p)$  ветвей симметричного мостового четырехполюсника:

$$\begin{aligned} Z_1(p) &= 10 \cdot 10^{-6} p, \text{ Ом}; \\ Z_2(p) &= 1/(0,1 \cdot 10^{-6} p), \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Таким образом, заданный коэффициент передачи может быть реализован с помощью реактивного мостового четырехполюсника (рис. 9.19), содержащего индуктивности  $L = 10$  мкГн в продольных и емкости  $C = 0,1$  мкФ в скрещивающихся ветвях.

\*) Выражение для  $A$ -параметров симметричного мостового четырехполюсника приведены в примере 8.16.

# Цепи с распределенными параметрами



## § 10.1. ЗАДАЧА АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### Вводные замечания

Напомним, что цепями с распределенными параметрами называются идеализированные электрические цепи, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Токи и напряжения в одномерной цепи с распределенными параметрами являются функциями двух переменных — времени  $t$  и координаты  $x$ .

Исторически сложилось так, что первыми в качестве одномерных цепей с распределенными параметрами стали представлять так называемые длинные линии, т.е. линии передачи энергии от источника к нагрузке, длина которых значительно превышает длину волны передаваемых электромагнитных колебаний. Поэтому одномерные цепи с распределенными параметрами часто называют длинными линиями или линиями, а уравнения (1.59), (1.60), описывающие зависимости между токами и напряжениями элементарного участка одномерной цепи с распределенными параметрами, — дифференциальными уравнениями длинной линии или телеграфными уравнениями. Будем использовать термины «длинная линия» или «линия» как синонимы термина «одномерная цепь с распределенными параметрами», помня при этом, что приведенная на рис. 1.41 схема элементарного участка одномерной цепи с распределенными параметрами и соответствующая ей система уравнений электрического равновесия (1.59), (1.60) носят общий характер и могут быть использованы не только для моделирования процессов в реальных линиях передачи, но и для приближенного представления многих других радиотехнических элементов и устройств в области достаточно высоких частот.

Одномерные цепи с распределенными параметрами, применяемые для моделирования различных реальных цепей и их элементов, отличаются одна от другой, в основном, значениями погонных параметров  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $G_1$  и характером их зависимости от координаты, времени

или режима работы цепи. В линейных инвариантных во времени цепях с распределенными параметрами погонное сопротивление  $R_1$ , индуктивность  $L_1$ , емкость  $C_1$  и проводимость утечки  $G_1$  не зависят от времени и режима работы цепи; они могут либо изменяться вдоль цепи по определенному закону, либо иметь одинаковые значения на всех ее участках. Линейные инвариантные во времени цепи с распределенными параметрами, погонные параметры которых постоянны и не зависят от координаты, называются **о д н о р о д н ы м и** (**р е г у л я р н ы м и**). Цепи, погонные параметры которых изменяются вдоль цепи, т.е. являются функциями координаты, называются **н е о д н о р о д н ы м и** (**н е р е г у л я р н ы м и**).

В зависимости от того, какие процессы в исследуемой реальной цепи имеют преобладающий характер, а также от степени идеализации, эквивалентная схема элементарного участка цепи может не содержать тех или иных из показанных на рис. 1.41 элементов. В соответствии с этим цепи с распределенными параметрами подразделяют на цепи без потерь ( $LC$ -линии), резистивно-емкостные ( $RC$ -линии), резистивно-индуктивные ( $RL$ -линии) и резистивные ( $RG$ -линии). Наиболее интересны процессы в линиях без потерь и в линиях общего вида с малыми потерями, которые используются в основном для моделирования реальных линий передачи и колебательных систем сверхвысоких частот. С развитием микроэлектроники возрос интерес к исследованию процессов в  $RC$ -линиях, которые используют в качестве моделей различных пассивных элементов интегральных микросхем (пленочных и диффузионных резисторов, конденсаторов, соединительных проводников и перемычек), а также к исследованию резистивных линий, которые применяют для моделирования контактов к различным микроэлектронным элементам [14].

### Общее решение дифференциальных уравнений длинной линии

При анализе цепей с распределенными параметрами необходимо определить характер изменения токов и напряжений вдоль цепи и частотные или временные характеристики цепей относительно внешних зажимов.

Для этого необходимо найти частные решения дифференциальных уравнений линии (1.59), (1.60) при соответствующих начальных и граничных условиях. В связи с тем что решение данных уравнений в замкнутой форме для неоднородных линий может быть получено только при некоторых частных видах зависимостей погонных параметров от координаты, ограничимся сначала рассмотрением однородной линии длиной  $l$  (рис. 10.1).

Для решения дифференциальных уравнений линии воспользуемся операторным методом, который позволяет перейти от решения дифференциальных уравнений в частных производных для мгновенных значений токов  $i = i(x, t)$  и напряжений  $u = u(x, t)$  линии к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, составленных относительно операторных изображений соответствующих токов  $I(x, p) \doteq i(x, t)$  и напряжений  $U(x, p) \doteq u(x, t)$ .



Умножая правую и левую части уравнений (1.59), (1.60) на  $e^{-pt}$  и интегрируя в пределах от  $t = 0$  до  $t = \infty$ , получаем

$$-\frac{dI(x, p)}{dx} = (G_1 + pC_1)U(x, p) - C_1 u(x, 0); \quad (10.1)$$

$$-\frac{dU(x, p)}{dx} = (R_1 + pL_1)I(x, p) - L_1 i(x, 0), \quad (10.2)$$

где функции  $u(x, 0)$ ,  $i(x, 0)$  описывают распределение напряжения и тока вдоль линии при  $t = 0$ , т.е. определяют начальные условия задачи. В связи с тем что в уравнениях (10.1), (10.2) содержатся произ-

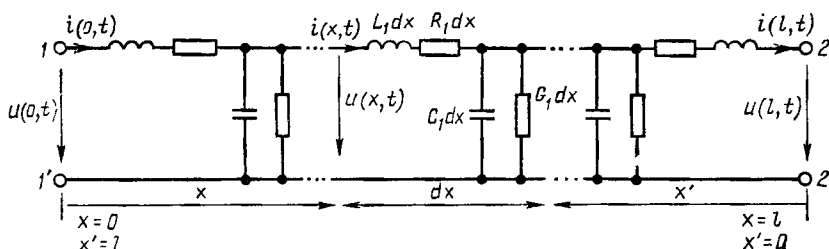


Рис. 10.1. Длинная линия

водные неизвестных функций  $U(x, p)$  и  $I(x, p)$  только по одной переменной, частные производные этих функций по  $x$  заменены обыкновенными (полными) производными.

При нулевых начальных условиях уравнения (10.1), (10.2) принимают вид

$$-\frac{dI(x, p)}{dx} = Y_1(p)U(x, p); \quad (10.3)$$

$$-\frac{dU(x, p)}{dx} = Z_1(p)I(x, p), \quad (10.4)$$

где  $Z_1(p) = R_1 + pL_1$ ,  $Y_1(p) = G_1 + pC_1$  — операторные погонное сопротивление и погонная проводимость линии.

Уравнения (10.3), (10.4) путем исключения переменных могут быть сведены к одному дифференциальному уравнению, составленному относительно тока или напряжения. Продифференцировав правую и левую части уравнения (10.4) по  $x$  и подставляя в него значение  $dI(x, p)/dx$  из уравнения (10.3), получаем

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} = \gamma^2(p)U(x, p). \quad (10.5)$$

Аналогичный вид имеет и операторное уравнение рассматриваемой цепи, составленное относительно тока  $I(x, p)$ . Входящая в эти уравнения величина

$$\gamma(p) = \sqrt{Z_1(p)Y_1(p)} = \sqrt{(R_1 + pL_1)(G_1 + pC_1)} \quad (10.6)$$

называется операторным коэффициентом распространения.

Таким образом, распределение операторных изображений токов и напряжений в линейной однородной инвариантной во времени цепи с распределенными параметрами определяется решениями линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид

$$U(x, p) = A_1(p) e^{-\gamma(p)x} + A_2(p) e^{\gamma(p)x}, \quad (10.7)$$

где  $A_1(p)$ ,  $A_2(p)$  — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями задачи, т.е. значениями неизвестных функций  $U(x, p)$  и  $I(x, p)$  в начале ( $x = 0$ ) или в конце ( $x = l$ ) линии. Подставляя (10.7) в уравнение (10.4), находим выражение для операторного изображения тока линии

$$I(x, p) = A_1(p) e^{-\gamma(p)x} / Z_B(p) - A_2(p) e^{\gamma(p)x} / Z_B(p). \quad (10.8)$$

Величина

$$Z_B(p) = Z_1(p) / \gamma(p) = \sqrt{Z_1(p) / Y_1(p)} = \sqrt{(R_1 + pL_1) / (G_1 + pC_1)} \quad (10.9)$$

называется операторным волновым сопротивлением линии.

Определяя значения постоянных интегрирования, соответствующие тем или иным граничным условиям, и подставляя их в выражения (10.7), (10.8), можно получить операторные изображения тока и напряжения в любом сечении линии при произвольном внешнем воздействии, а также найти любые частотные и временные характеристики исследуемой цепи.

## § 10.2. ОДНОРОДНАЯ ДЛИННАЯ ЛИНИЯ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### Волновые процессы в однородной длинной линии

Распределение комплексных действующих значений напряжения  $U(x)$  и тока  $I(x)$  в однородной длинной линии, находящейся под гармоническим внешним воздействием, определяется выражениями

$$\dot{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 e^{\gamma x}, \quad (10.10)$$

$$\dot{I}(x) = \underline{A}_1 e^{-\gamma x} / \underline{Z}_B - \underline{A}_2 e^{\gamma x} / \underline{Z}_B, \quad (10.11)$$

которые получаются из (10.7), (10.8) путем замены комплексной частоты  $p$  на  $j\omega$ . Входящие в выражения (10.10) и (10.11) комплексный коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \quad (10.12)$$

и комплексное волновое сопротивление

$$\underline{Z}_B = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1) / (G_1 + j\omega C_1)} \quad (10.13)$$

будем называть коэффициентом распространения и волновым сопротивлением линии. Представим коэффициент распространения линии в алгебраической

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta, \quad (10.14)$$

а волновое сопротивление линии и постоянные интегрирования в показательной

$$\underline{Z}_B = z_B e^{j\varphi};$$

$$\underline{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1};$$

$$\underline{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2}$$

формах и преобразуем каждое из входящих в выражения (10.10), (10.11) слагаемых в показательную форму:

$$\dot{U}(x) = (A_1 e^{-\alpha x}) e^{-i(\beta x - \psi_1)} + (A_2 e^{\alpha x}) e^{j(\beta x + \psi_2)};$$

$$\dot{I}(x) = A_1 e^{-\alpha x} e^{-i(\beta x - \psi_1 + \varphi)} / z_B - A_2 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \psi_2 - \varphi)} / z_B.$$

Переходя от комплексных действующих значений напряжения и тока к мгновенным, получаем

$$u(x, t) = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \times \\ \times \cos(\omega t + \beta x + \psi_2); \quad (10.15)$$

$$i(x, t) = \frac{\sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x}}{z_B} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi) - \frac{\sqrt{2} A_2 e^{\alpha x}}{z_B} \times \\ \times \cos(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi). \quad (10.16)$$

Как видно из выражений (10.15), (10.16), установившиеся значения напряжения и тока в произвольном сечении линии, находящейся под гармоническим внешним воздействием, можно представить в виде суммы двух подобных по структуре, но отличающихся знаками перед коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$  составляющих:

$$u(x, t) = u_{\text{пад}}(x, t) + u_{\text{отр}}(x, t); \quad (10.17)$$

$$i(x, t) = i_{\text{пад}}(x, t) + i_{\text{отр}}(x, t), \quad (10.18)$$

где

$$u_{\text{пад}}(x, t) = \sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1);$$

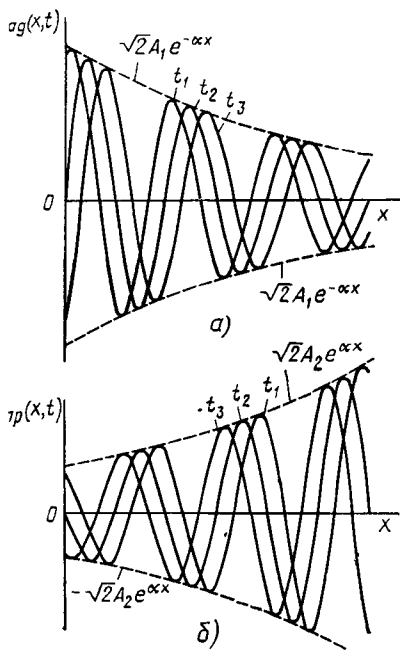
$$u_{\text{отр}}(x, t) = \sqrt{2} A_2 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2);$$

$$i_{\text{пад}}(x, t) = \frac{\sqrt{2} A_1 e^{-\alpha x}}{z_B} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1 - \varphi);$$

$$i_{\text{отр}}(x, t) = -\frac{\sqrt{2} A_2 e^{\alpha x}}{z_B} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} A_2 e^{\alpha x}}{z_B} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2 - \varphi + \pi).$$

При фиксированном  $x$  каждая из составляющих тока и напряжений представляет собой гармоническую функцию времени  $t$ . В связи с тем что сумма двух гармонических функций времени, имеющих одинаковую частоту, есть гармоническая функция времени той же частоты, напряжение и ток во всех сечениях линии изменяются по гармоническому закону с частотой внешнего воздействия  $\omega$  (рис. 10.2). Как видно из рис. 10.2, а, для каждого фиксированного момента времени напряжение  $u_{\text{пад}}(x, t)$  изменяется вдоль линии по косинусоидальному закону, причем амплитуда напряжения экспоненциально уменьшается с ростом  $x$ . При увеличении  $t$  точки функции  $u_{\text{пад}}(x, t)$ , имеющие одинаковую фазу, смещаются вправо. Аналогичный вид имеют зависимости  $i_{\text{пад}}(x, t)$ . Следовательно,  $u_{\text{пад}}(x, t)$  и  $i_{\text{пад}}(x, t)$  представляют собой волны напряжения и тока, распространяющиеся в направлении увеличения  $x$ . Эти волны называют падающими или прямыми.



р. 10.2. Распределение напряжения падающей (а) и отраженной (б) волн вдоль линии ( $t_3 > t_2 > t_1$ )

Из рассмотрения зависимостей  $u_{\text{отр}}(x, t)$  и  $i_{\text{отр}}(x, t)$  следует, что  $u_{\text{отр}}(x, t)$  и  $i_{\text{отр}}(x, t)$  представляют собой волны напряжения и тока, распространяющиеся в направлении уменьшения  $x$ , т. е. от конца линии к ее началу (рис. 10.2, б). Эти волны называются отраженными или обратными.

Как видно из выражений (10.17), (10.18) и рис. 10.2, амплитуды напряжения и тока падающей и отраженной волн уменьшаются в направлении распространения волн. Величина  $\alpha$ , характеризующая уменьшение амплитуды (действующего значения) падающей или отраженной волны на единицу длины линии

$$\alpha = \text{Re } \underline{\gamma} = \text{Re} \left[ \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \right], \quad (10.19)$$

называется коэффициентом ослабления. Убывание амплитуды волны связано с потерями энергии, поэтому для линии без потерь ( $R_1 = G_1 = 0$ ) коэффициент ослабления  $\alpha$  равен нулю, а коэффициент распространения является чисто мнимым:  $\underline{\gamma} = j\omega \sqrt{L_1 C_1}$ . Амплитуды падающей и отраженной волн напряжения и тока в линиях без потерь не зависят от координаты  $x$  и не изменяются вдоль линии.

Мнимая часть комплексного коэффициента передачи линии  $\beta = \text{Im} [\gamma] = \text{Im} [\sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)}]$ , характеризующая изменение фазы прямой или обратной волн на единицу длины линии, называется коэффициентом фазы. Для линии без потерь коэффициент фазы прямо пропорционален частоте

$$\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}. \quad (10.20)$$

Расстояние между двумя точками волны, фазы которых различаются на  $2\pi$ , называется длиной волны. Длина волны в линии  $\lambda$  определяется значением коэффициента фазы. Действительно, изменение фазы падающей или отраженной волны на участке линии длиной  $\lambda$

$$(\omega t - \beta x + \psi_1) - [\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_1] = 2\pi,$$

откуда

$$\lambda = 2\pi/\beta. \quad (10.21)$$

Для линии без потерь  $\lambda = 2\pi/(\omega \sqrt{L_1 C_1}) = 1/(f \sqrt{L_1 C_1})$ .

Скорость перемещения вдоль линии точки волны, фаза колебания в которой остается неизменной, называется фазовой скоростью волны. Для падающей волны условие постоянства фазы записывается в виде

$$(\omega t - \beta x + \psi_1) = \text{const}, \text{ или } \frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = 0,$$

откуда

$$v_{\text{ф.пад}} = dx/dt = \omega/\beta. \quad (10.22)$$

Аналогичным образом находим фазовую скорость отраженной волны

$$v_{\text{ф.отр}} = -\omega/\beta. \quad (10.23)$$

Знак минус в выражении (10.23) указывает на то, что отраженная волна перемещается в направлении уменьшения  $x$ . Для линии без потерь фазовая скорость падающей и отраженной волн не зависит от частоты

$$v_{\text{ф}} = v_{\text{ф.пад}} = |v_{\text{ф.отр}}| = 1/\sqrt{L_1 C_1}. \quad (10.24)$$

Используя (10.21) и (10.22), получаем соотношения между фазовой скоростью и длиной волны в линии

$$\lambda = 2\pi v_{\text{ф}}/\omega = v_{\text{ф}}/f = T v_{\text{ф}}. \quad (10.25)$$

Из выражения (10.25) видно, что за время, равное периоду внешнего воздействия  $T$ , падающая и отраженная волны перемещаются на расстояние, равное длине волны  $\lambda$ .

Итак, установлено, что напряжение и ток в любом сечении линии можно рассматривать как результат наложения двух волн — падающей и отраженной. Зная это, нетрудно прийти к заключению, что первое и второе слагаемые, входящие в выражения (10.10), (10.11), представ-

ляют собой комплексные действующие значения напряжения или тока падающей и отраженной волн:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{пад}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x); \quad (10.26)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{\text{пад}}(x) + \dot{I}_{\text{отр}}(x), \quad (10.27)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{пад}}(x) &= \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x}; & \dot{U}_{\text{отр}}(x) &= \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}; \\ \dot{I}_{\text{пад}}(x) &= \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} / \underline{Z}_B; & \dot{I}_{\text{отр}}(x) &= -\underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} / \underline{Z}_B. \end{aligned}$$

Из выражений (10.26), (10.27) следует, что волновое сопротивление однородной линии  $\underline{Z}_B$  является коэффициентом пропорциональности между напряжением и током падающей или отраженной волн:

$$\dot{U}_{\text{пад}}(x) / \dot{I}_{\text{пад}}(x) = \dot{U}_{\text{отр}}(x) / \dot{I}_{\text{отр}}(x) = \underline{Z}_B.$$

Таким образом, волновое сопротивление однородной линии можно рассматривать как сопротивление линии падающей или отраженной волн в отдельности.

Волновое сопротивление линии без потерь имеет чисто резистивный характер

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{L}_1 / \underline{R}_1} = R_B. \quad (10.28)$$

Используя выражения (10.26), (10.27), можно установить и физический смысл коэффициента  $\underline{\gamma}$ . С этой целью найдем комплексные действующие значения напряжений падающей волны в точках, отстоящих одна от другой на расстоянии  $\Delta x$ :

$$\dot{U}_{\text{пад}}(x) = \sqrt{2} \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x}; \quad \dot{U}_{\text{пад}}(x + \Delta x) = \sqrt{2} \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}(x + \Delta x)}.$$

Определяя натуральный логарифм отношения этих величин  $\ln [U_{\text{пад}}(x) / U_{\text{пад}}(x + \Delta x)] = \underline{\gamma} \Delta x$ , получаем

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{\dot{U}_{\text{пад}}(x)}{\dot{U}_{\text{пад}}(x + \Delta x)}. \quad (10.29)$$

Аналогичным образом можно записать

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{\dot{I}_{\text{пад}}(x)}{\dot{I}_{\text{пад}}(x + \Delta x)} = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x + \Delta x)}{\dot{U}_{\text{отр}}(x)} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{\dot{I}_{\text{отр}}(x + \Delta x)}{\dot{I}_{\text{отр}}(x)}. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициент распространения однородной длинной линии  $\underline{\gamma}$  характеризует изменение комплексного действующего значения напряжения или тока падающей и отраженной волн, приходящееся на единицу длины линии.

Представляя комплексное действующее значение напряжения падающей волны в показательной форме

$$\dot{U}_{\text{пад}}(x) = U_{\text{пад}}(x) e^{j\psi_{\text{пад}}(x)}$$

и используя выражения (10.14), (10.29), устанавливаем, что коэффициент ослабления линии  $\alpha$  численно равен натуральному логарифму отношения действующих значений напряжений падающей волны, взятых в точках, отстоящих одна от другой на единицу длины линии:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{U_{\text{пад}}(x)}{U_{\text{пад}}(x + \Delta x)},$$

а коэффициент фазы — разности фаз напряжений, измеренных в тех же точках:

$$\beta = \frac{1}{\Delta x} [\psi_{\text{пад}}(x) - \psi_{\text{пад}}(x + \Delta x)].$$

Волновое сопротивление и коэффициент распространения называются волновыми параметрами линии. В общем случае коэффициент распространения и волновое сопротивление линии для падающей и отраженной волн могут иметь различные значения, поэтому линия произвольного вида характеризуется четырьмя волновыми параметрами. У однородной линии коэффициенты распространения и волновые сопротивления для падающей и отраженной волн одинаковы, поэтому однородная линия характеризуется двумя волновыми параметрами.

### Коэффициент отражения линии. Определение постоянных интегрирования

Распределение токов и напряжений в длинной линии определяется не только волновыми параметрами, которые характеризуют собственные свойства линии и не зависят от свойств внешних по отношению к линии участков цепи, но и коэффициентами отражения линии по напряжению и току, которые характеризуют степень согласования линии с источником энергии и нагрузкой.

Комплексными коэффициентами отражения длинной линии по напряжению и току называются соответственно отношения комплексных действующих значений напряжений или токов отраженной и падающей волн в произвольном сечении линии:

$$\begin{aligned} \underline{\rho}_u(x) &= \dot{U}_{\text{отр}}(x) / \dot{U}_{\text{пад}}(x) = \underline{A}_2 e^{2\gamma x} / \underline{A}_1; \\ \underline{\rho}_i(x) &= \dot{I}_{\text{отр}}(x) / \dot{I}_{\text{пад}}(x) = -\underline{A}_2 e^{2\gamma x} / \underline{A}_1. \end{aligned} \quad (10.30)$$

В связи с тем что комплексные коэффициенты отражения линии по напряжению и току отличаются один от другого только знаком, обычно рассматривают только одну из этих величин — комплексный коэффициент отражения линии по напряжению, и называют его просто коэффициентом отражения линии:  $\underline{\rho}(x) = \underline{\rho}_u(x) = -\underline{\rho}_i(x)$ .

Для определения  $\underline{\rho}(x)$  необходимо найти постоянные интегрирования  $\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$ , которые могут быть выражены через токи и напряжения

в начале ( $x = 0$ ) или в конце ( $x = l$ ) линии. Пусть в начале линии (см. рис. 10.1)  $u_1 = u(0, t) = u(x, t)|_{x=0}$ , а  $i_1 = i(0, t) = i(x, t)|_{x=0}$ . Комплексные действующие значения напряжения и тока в начале линии соответственно  $\dot{U}_1 = \dot{U}(0) = \dot{U}(x)|_{x=0} \doteq u_1$  и  $\dot{I}_1 = \dot{I}(0) = \dot{I}(x)|_{x=0} \doteq i_1$ .

Полагая в выражениях (10.10), (10.11)  $x = 0$ , получаем систему уравнений для определения  $\underline{A}_1$  и  $\underline{A}_2$ :

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \underline{A}_1 + \underline{A}_2; \\ \dot{I}_1 &= \underline{A}_1/\underline{Z}_B - \underline{A}_2/\underline{Z}_B,\end{aligned}$$

откуда

$$\underline{A}_1 = (\dot{U}_1 + \underline{Z}_B \dot{I}_1)/2; \quad \underline{A}_2 = (\dot{U}_1 - \underline{Z}_B \dot{I}_1)/2. \quad (10.31)$$

Подставляя (10.31) в (10.30), выражаем коэффициент отражения линии через ток и напряжение в начале линии:

$$\underline{\rho}(x) = \frac{\dot{U}_1 - \underline{Z}_B \dot{I}_1}{\dot{U}_1 + \underline{Z}_B \dot{I}_1} e^{2\gamma x} = \underline{\rho}_1 e^{2\gamma x}. \quad (10.32)$$

Входящий в выражение (10.32) коэффициент  $\underline{\rho}_1$  не зависит от  $x$  и является коэффициентом отражения в начале линии:

$$\underline{\rho}_1 = \underline{\rho}(x)|_{x=0} = \left. \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x)}{\dot{U}_{\text{пад}}(x)} \right|_{x=0} = \frac{\dot{U}_1 - \underline{Z}_B \dot{I}_1}{\dot{U}_1 + \underline{Z}_B \dot{I}_1}. \quad (10.33)$$

Анализируя выражения (10.33), можно прийти к заключению, что значение коэффициента отражения в начале линии определяется только соотношением между входным сопротивлением линии относительно зажимов  $1-1'$  (см. рис. 10.1)  $\underline{Z}_{11}(j\omega) = \dot{U}_1/\dot{I}_1$  и ее волновым сопротивлением  $\underline{Z}_B$ :

$$\underline{\rho}_1 = [\underline{Z}_{11}(j\omega) - \underline{Z}_B]/[\underline{Z}_{11}(j\omega) + \underline{Z}_B]. \quad (10.34)$$

Используя выражения (10.32), (10.33), напряжение и ток в любом сечении линии можно выразить соответственно через напряжение  $\dot{U}_1$ , ток  $\dot{I}_1$  и коэффициент отражения  $\underline{\rho}_1$  в начале линии:

$$\dot{U}(x) = \frac{e^{-\gamma x} - \underline{\rho}_1 e^{\gamma x}}{1 - \underline{\rho}_1} \dot{U}_1 = \frac{e^{-\gamma x} + \underline{\rho}_1 e^{\gamma x}}{1 - \underline{\rho}_1} \underline{Z}_B \dot{I}_1; \quad (10.35)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{e^{-\gamma x} - \underline{\rho}_1 e^{\gamma x}}{1 - \underline{\rho}_1} \dot{I}_1 = \frac{e^{-\gamma x} - \underline{\rho}_1 e^{\gamma x}}{(1 + \underline{\rho}_1) \underline{Z}_B} \dot{U}_1. \quad (10.36)$$

Рассмотрим случай, когда граничные условия заданы на конце линии. Пусть при  $x = l$  напряжение линии  $u_2 = u(l, t) = u(x, t)|_{x=l}$ , а ее ток  $i_2' = i(l, t) = i(x, t)|_{x=l}$ .



Обозначая комплексные действующие значения этих величин через  $\dot{U}_2 = \dot{U}(l) = \dot{U}(x)|_{x=l} \doteq u_2$  и  $\dot{I}'_2 = \dot{I}(l) = \dot{I}(x)|_{x=l} \doteq i'_2$  и полагая в (10.10), (10.11)  $x = l$ , получаем

$$\dot{U}_2 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l} + \underline{A}_2 e^{\gamma l}; \quad \dot{I}'_2 = \underline{A}_1 e^{-\gamma l} / \underline{Z}_B - \underline{A}_2 e^{\gamma l} / \underline{Z}_B,$$

откуда

$$\underline{A}_1 = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_B \dot{I}'_2}{2} e^{\gamma l}; \quad \underline{A}_2 = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_B \dot{I}'_2}{2} e^{-\gamma l}. \quad (10.37)$$

Подставляя (10.37) в (10.30), выражаем коэффициент отражения через ток и напряжение в конце линии:

$$\underline{\rho}(x) = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_B \dot{I}'_2}{\dot{U}_2 + \underline{Z}_B \dot{I}'_2} e^{-2\gamma(l-x)} = \underline{\rho}_2 e^{-2\gamma x}. \quad (10.38)$$

Здесь  $x' = l - x$  — расстояние, отсчитываемое от конца линии;  $\underline{\rho}_2 = \underline{\rho}(x)|_{x=l} = \dot{U}_{отр}(x) / \dot{U}_{пад}(x)|_{x=l} = (\dot{U}_2 - \underline{Z}_B \dot{I}'_2) / (\dot{U}_2 + \underline{Z}_B \dot{I}'_2)$  — коэффициент отражения в конце линии, значение которого определяется только соотношением между сопротивлением нагрузки  $\underline{Z}_H = \dot{U}_2 / \dot{I}'_2$  и волновым сопротивлением линии  $\underline{Z}_B$ :

$$\underline{\rho}_2 = (\underline{Z}_H - \underline{Z}_B) / (\underline{Z}_H + \underline{Z}_B). \quad (10.39)$$

Как и всякое комплексное число, коэффициент отражения линии может быть представлен в показательной форме:

$$\underline{\rho}(x) = \rho(x) e^{j\psi_\rho(x)}.$$

Анализируя выражения (10.32), (10.38), устанавливаем, что модуль коэффициента отражения

$$\rho(x) = U_{отр}(x) / U_{пад}(x) = \rho_1 e^{2\alpha x} = \rho_2 e^{-2\alpha x'} \quad (10.40)$$

плавно увеличивается с ростом  $x$  и достигает наибольшего значения  $\rho_{\max}(x) = \rho_2$  в конце линии.

Выражая коэффициент отражения в начале линии  $\rho_1$  через коэффициент отражения в конце линии  $\rho_2$

$$\rho_1 = \underline{\rho}(x)|_{x=0} = \underline{\rho}_2 e^{-2\gamma l} = \underline{\rho}_2 e^{-2(\alpha + j\beta)l}, \quad (10.41)$$

находим, что модуль коэффициента отражения в начале линии в  $e^{2\alpha l}$  раз меньше, чем модуль отражения в ее конце. Из выражений (10.40), (10.41) следует, что модуль коэффициента отражения однородной линии без потерь имеет одно и то же значение во всех сечениях линии.

С помощью формул (10.37), (10.39) напряжение и ток в произвольном сечении линии можно выразить через напряжение или ток и коэффициент отражения в конце линии:

$$\dot{U}(x) = \frac{e^{\underline{\gamma}x'} + \underline{\rho}_2 e^{-\underline{\gamma}x'}}{1 + \underline{\rho}_2} \dot{U}_2 = \frac{e^{\underline{\gamma}x'} + \underline{\rho}_2 e^{-\underline{\gamma}x'}}{1 - \underline{\rho}_2} \underline{Z}_B \dot{I}'_2; \quad (10.42)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{e^{\underline{\gamma}x'} - \underline{\rho}_2 e^{-\underline{\gamma}x'}}{1 - \underline{\rho}_2} \dot{I}'_2 = \frac{e^{\underline{\gamma}x'} - \underline{\rho}_2 e^{-\underline{\gamma}x'}}{(1 + \underline{\rho}_2) \underline{Z}_B} \dot{U}_2. \quad (10.43)$$

Выражения (10.42), (10.43) позволяют рассмотреть распределение напряжений и токов в однородной длинной линии в некоторых характерных режимах ее работы.

### Режим бегущих волн

Режимом бегущих волн называется режим работы однородной линии, при котором в ней распространяется только падающая волна напряжения и тока, т.е. амплитуды напряжения и тока отраженной волны во всех сечениях линии равны нулю. Очевидно, что в режиме бегущих волн коэффициент отражения линии  $\rho(x) = 0$ . Из выражения (10.38) следует, что коэффициент отражения  $\underline{\rho}(x)$  может быть равен нулю либо в линии бесконечной длины (при  $l = \infty$  падающая волна не может достичь конца линии и отразиться от него), либо в линии конечной длины, сопротивление нагрузки которой выбрано таким образом, что коэффициент отражения в конце линии  $\underline{\rho}_2 = 0$ . Из этих случаев практический интерес представляет только второй, для реализации которого, как видно из (10.39), необходимо, чтобы сопротивление нагрузки линии было равно волновому сопротивлению  $\underline{Z}_B$  (такая нагрузка называется согласованной).

Полагая в выражениях (10.35), (10.36), (10.42), (10.43)  $\underline{\rho}_2 = \underline{\rho}_1 = 0$ , выразим комплексные действующие значения напряжения и тока в произвольном сечении линии через комплексные действующие значения напряжения  $\dot{U}_1$  и тока  $\dot{I}_1$  в начале или в конце линии ( $\dot{U}_2, \dot{I}'_2$ ):

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{пад}}(x) = \dot{U}_2 e^{\underline{\gamma}x'} = \dot{U}_1 e^{-\underline{\gamma}x};$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{\text{пад}}(x) = \dot{I}'_2 e^{\underline{\gamma}x'} = \dot{I}_1 e^{-\underline{\gamma}x}.$$

Представим напряжение и ток в начале линии в показательной форме:  $\dot{U}_1 = U_1 e^{j\psi_{u1}}$ ,  $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_{i1}}$  и перейдем от комплексных действующих значений напряжения и тока к мгновенным:

$$u(x, t) = \sqrt{2} U_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_{u1});$$

$$i(x, t) = \sqrt{2} I_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_{i1}). \quad (10.44)$$

Как видно из выражений (10.44), в режиме бегущих волн амплитуды напряжения и тока в линии с потерями ( $\alpha > 0$ ) экспоненциально убывают с ростом  $x$ , а в линии без потерь ( $\alpha = 0$ ) сохраняют одно и то же значение во всех сечениях линии (рис. 10.3).

Начальные фазы напряжения  $\psi_{u1} - \beta x$  и тока  $\psi_{i1} - \beta x$  в режиме бегущих волн изменяются вдоль линии по линейному закону, причем сдвиг фаз между напряжением и током во всех сечениях линии имеет одно и то же значение  $\psi_{u1} - \psi_{i1}$ .

Входное сопротивление линии в режиме бегущих волн равно волновому сопротивлению линии и не зависит от ее длины:

$$\begin{aligned} Z_{11}(j\omega) &= \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = \dot{U}(x) / \dot{I}(x) = \\ &= \dot{U}_{\text{пад}}(x) / \dot{I}_{\text{пад}}(x) = \underline{Z}_B. \end{aligned}$$

У линии без потерь волновое сопротивление имеет чисто резистивный характер (10.28), поэтому в режиме бегущих волн сдвиг фаз между напряжением и током во всех сечениях линии без потерь равен нулю.

Мгновенная мощность, потребляемая участком линии без потерь, расположенным правее произвольного сечения  $x$  (см. рис. 10.1), равна произведению мгновенных значений напряжения и тока в сечении  $x$ :

$$p(x, t) = u(x, t) i(x, t) = 2U_1 I_1 \cos^2(\omega t - \beta x - \psi_{u1}). \quad (10.45)$$

Из выражения (10.45) следует, что мгновенная мощность, потребляемая произвольным участком линии без потерь в режиме бегущих волн, не может быть отрицательной, следовательно, в режиме бегущих волн передача энергии в линии производится только в одном направлении — от источника энергии к нагрузке.

Обмен энергией между источником и нагрузкой в режиме бегущих волн отсутствует и вся энергия, передаваемая падающей волной, потребляется нагрузкой.

### Режим стоячих волн

Если сопротивление нагрузки рассматриваемой линии не равно волновому сопротивлению, то только часть энергии, передаваемой падающей волной к концу линии, потребляется нагрузкой. Оставшаяся часть энергии отражается от нагрузки и в виде отраженной волны возвращается к источнику. Если модуль коэффициента отражения линии  $\rho(x) = 1$ , т.е. амплитуды отраженной и падающей волн во всех сечениях линии одинаковы, то в линии устанавливается специфический режим называемый режимом стоячих волн. Согласно выражению (10.40) модуль коэффициента отражения  $\rho(x) = 1$  только тогда, когда модуль коэффициента отражения в конце линии  $\rho_2 = 1$ , а коэффициент ослабления линии  $\alpha = 0$ . Анализируя выражение (10.39), можно убедиться, что  $\rho_2 = 1$  только в трех случаях: когда сопротивление нагрузки равно нулю, либо бесконечности, либо имеет чисто реактивный характер.

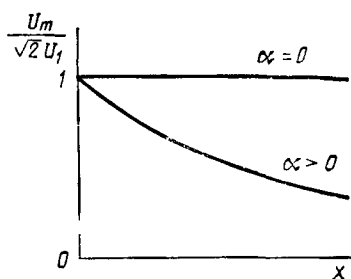


Рис. 10.3. Распределение амплитуд напряжения вдоль линии в режиме бегущих волн

Следовательно, режим стоячих волн может установиться только в линии без потерь при коротком замыкании или холостом ходе на выходе, а также если сопротивление нагрузки на выходе такой линии имеет чисто реактивный характер.

При коротком замыкании на выходе линии коэффициент отражения в конце линии  $\rho_2 = -1$ . В этом случае напряжения падающей и отраженной волн в конце линии имеют одинаковые амплитуды, но сдвинуты по фазе на  $180^\circ$ , поэтому мгновенное значение напряжения на выходе тождественно равно нулю. Подставляя в выражения (10.42), (10.43)  $\rho_2 = -1$ ,  $\underline{y} = j\beta$ ,  $\underline{Z}_B = R_B$ , находим комплексные действующие значения напряжения и тока линии:

$$\dot{U}(x) = \frac{e^{j\beta x'} - e^{-j\beta x'}}{2} R_B \dot{I}'_2 = R_B \dot{I}'_2 \operatorname{sh}(j\beta x') = jR_B \dot{I}'_2 \sin(\beta x');$$

$$\dot{I}(x) = \frac{e^{j\beta x'} - e^{-j\beta x'}}{2} \dot{I}'_2 = \dot{I}'_2 \operatorname{ch}(j\beta x') = \dot{I}'_2 \cos(\beta x').$$

Полагая, что начальная фаза тока  $\dot{I}'_2$  на выходе линии равна нулю, и переходя от комплексных действующих значений напряжений и токов к мгновенным

$$u(x, t) = [\sqrt{2} R_B \dot{I}'_2 \sin(\beta x')] \cos(\omega t + \pi/2);$$

$$i(x, t) = [\sqrt{2} \dot{I}'_2 \cos(\beta x')] \cos(\omega t),$$

устанавливаем, что при коротком замыкании на выходе линии амплитуды напряжения и тока изменяются вдоль линии по периодическому закону

$$U_m(x) = \sqrt{2} R_B \dot{I}'_2 |\sin(\beta x')|; \quad I_m(x) = \sqrt{2} \dot{I}'_2 |\cos(\beta x')|,$$

принимая в отдельных точках линии максимальные значения  $U_{m \max} = \sqrt{2} R_B \dot{I}'_2$ ,  $I_{m \max} = \sqrt{2} \dot{I}'_2$  и обращаясь в нуль в некоторых других точках (рис. 10.4).

Очевидно, что в тех точках линии, в которых амплитуда напряжения (тока) равна нулю, мгновенные значения напряжения (тока) тождественно равны нулю. Такие точки называются узлами напряжения (тока).

Характерные точки, в которых амплитуда напряжения (тока) принимает максимальное значение, называются пучностями напряжения (тока). Как видно из рис. 10.4, узлы напряжения соответствуют пучностям тока и, наоборот, узлы тока соответствуют пучностям напряжения.

Распределение мгновенных значений напряжения и тока вдоль линии подчиняется (рис. 10.5) синусоидальному или косинусоидальному закону, однако при изменении времени координаты точек, имеющих одинаковую фазу, остаются неизменными, т.е. волны напряжения и тока как бы «стоят на месте». Именно поэтому такой режим работы линии получил название режима стоячих волн.

Координаты узлов напряжения определяются из условия  $\sin \beta x'_k = 0$ , откуда

$$x'_k = k\pi/\beta, \quad (10.46)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , а координаты пучностей напряжения — из условия  $\cos \beta x'_n = 0$ , откуда

$$x'_n = (2n + 1)\pi/(2\beta), \quad (10.47)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

На практике координаты узлов и пучностей удобно отсчитывать от конца линии в долях длины волны  $\lambda$ . Подставляя соотношение (10.21) в выражениях (10.46), (10.47), получаем  $x'_k = k\lambda/2$ ,  $x'_n = (2n + 1)\lambda/4$ .

Таким образом, узлы напряжения (тока) и пучности напряжения (тока) чередуются с интервалом  $\lambda/4$ , а расстояние между соседними узлами (или пучностями) равно  $\lambda/2$ .

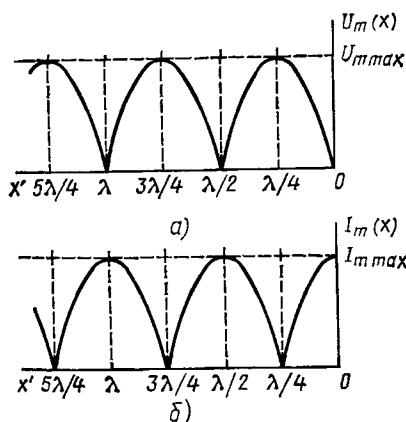


Рис. 10.4. Распределение амплитуд напряжения (а) и тока (б) вдоль линии в режиме короткого замыкания

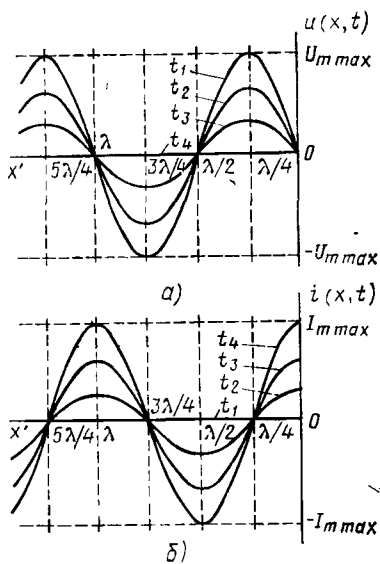


Рис. 10.5. Распределение мгновенных значений напряжения (а) и тока (б) вдоль линии в режиме короткого замыкания

Анализируя выражения для напряжения и тока падающей и отраженной волн, нетрудно убедиться, что пучности напряжения (тока) возникают в тех сечениях линии, в которых напряжения (токи) падающей и отраженной волн совпадают по фазе и, следовательно, суммируются, а узлы располагаются в сечениях, где напряжения (токи) падающей и отраженной волн находятся в противофазе и, следовательно, вычитаются. Мгновенная мощность, потребляемая произвольным участком линии, изменяется во времени по гармоническому закону  $p(x, t) = u(x, t) i(x, t) = -[R_B (I_2')^2 \sin(2\beta x') \sin(2\omega t)]/2$ , поэтому активная мощность, потребляемая любым участком линии, равна нулю.

Таким образом, в режиме стоячих волн энергия вдоль линии не передается а на каждом участке линии происходит только обмен энергией между электрическим и магнитным полями.

Аналогичным образом находим, что в режиме холостого хода ( $\rho_2 = 1$ ) распределение амплитуд напряжения (тока) вдоль линии без потерь (рис. 10.6)

$$U_m(x) = \sqrt{2}U_2 |\cos\beta x'|; I_m(x) = \sqrt{2} U_2 |\sin\beta x'|/R_B$$

имеет такой же характер, как и распределение амплитуд тока (напряжения) в режиме короткого замыкания (см. рис. 10.4).

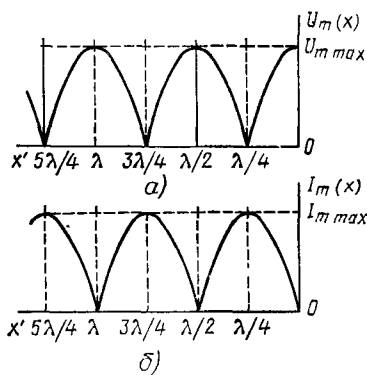


Рис. 10.6. Распределение амплитуд напряжения (а) и тока (б) вдоль линии в режиме холостого хода

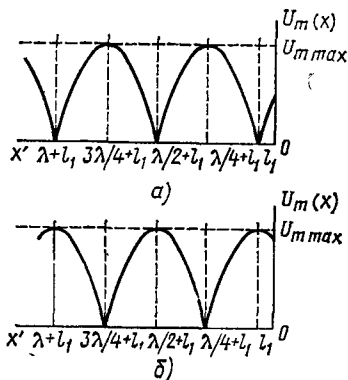


Рис. 10.7. Распределение амплитуд напряжения вдоль линии с емкостной (а) и индуктивной (б) нагрузкой

Рассмотрим линию без потерь, сопротивление нагрузки на выходе которой имеет чисто реактивный характер:

$$\underline{Z}_H = jx_H. \quad (10.48)$$

Подставляя (10.48) в (10.39), получаем

$$\underline{\rho}_2 = (jx_H - R_B)/(jx_H + R_B) = e^{j\psi_{\rho^2}}, \quad (10.49)$$

з которого следует, что модуль коэффициента отражения на выходе линии  $\rho_2 = 1$ , а аргумент

$$\psi_{\rho^2} = \begin{cases} \pi - 2 \arctg(x_H/R_B) & \text{при } x_H > 0; \\ -\pi - 2 \arctg(x_H/R_B) & \text{при } x_H < 0 \end{cases}$$

меняется в пределах от 0 до  $\pm\pi$ .

Используя выражения (10.42), (10.43), (10.49), найдем комплексные действующие значения напряжения и тока линии:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \sqrt{1 + (R_B/x_H)^2} \cos(\beta x' - \varphi); \\ \dot{I}(x) &= -\dot{I}'_2 \sqrt{1 + (x_H/R_B)^2} \sin(\beta x' - \varphi), \end{aligned} \quad (10.50)$$

где  $\varphi = \text{arctg}(R_B/x_H)$ . Из выражения (10.50) видно, что амплитуды напряжения и тока изменяются вдоль линии по периодическому закону:

$$U_m(x) = \sqrt{2} U_2 \sqrt{1 + (R_B/x_H)^2} |\cos(\beta x' - \varphi)|;$$

$$I_m(x) = \sqrt{2} I_2' \sqrt{1 + (x_H/R_B)^2} |\sin(\beta x' - \varphi)|,$$

причем координаты узлов напряжения (пучностей тока)  $x'_k = (2k + 1)\lambda/4 + l_1$ , где  $l_1 = \varphi\lambda/(2\pi)$ ;  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , а координаты пучностей напряжения (узлов тока)  $x'_n = n\lambda/2 + l_1$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Распределение амплитуд напряжения и тока при чисто реактивной нагрузке в целом имеет такой же характер, как и в режимах холостого хода или короткого замыкания на выходе (рис. 10.7), причем все узлы и все пучности смещаются на расстояние  $l_1$  так, что в конце линии не оказывается ни узла, ни пучности тока или напряжения.

### Режим смешанных волн

Режимы бегущих и стоячих волн это предельные случаи, в одном из которых амплитуда отраженной волны во всех сечениях линии равна нулю, а в другом — амплитуды падающей и отраженной волн во всех сечениях линии одинаковы. В остальных случаях в линии имеет место так называемый режим смешанных волн, который можно рассматривать как наложение режимов бегущих и стоячих волн. В режиме смешанных волн энергия, передаваемая падающей волной к концу линии, частично поглощается нагрузкой, а частично отражается от нее, поэтому амплитуда отраженной волны больше нуля, но меньше амплитуды падающей волны.

Как и в режиме стоячих волн, распределение амплитуд напряжений и тока в режиме смешанных волн (рис. 10.8) имеет четко выраженные максимумы и минимумы, повторяющиеся через  $\lambda/2$ . Однако амплитуды тока и напряжения в минимумах не равны нулю. Чем меньшая часть энергии отражается от нагрузки, т.е. чем выше степень согласования линии с нагрузкой, тем в меньшей степени выражены максимумы и минимумы напряжения и тока, поэтому соотношения между минимальными и максимальными значениями амплитуд напряжения и тока можно использовать для оценки степени согласования линии с нагрузкой. Величина, равная отношению минимального и максималь-

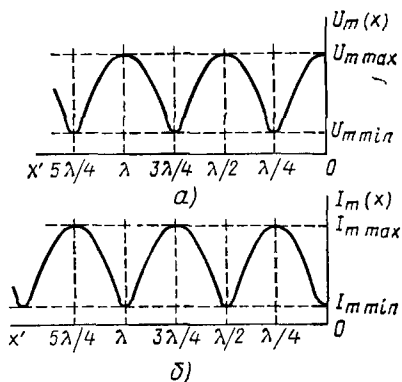


Рис. 10.8. Распределение амплитуд напряжения (а) и тока (б) вдоль линии без потерь в режиме смешанных волн при чисто резистивной нагрузке

ного значений амплитуды напряжения или тока, называется коэффициентом бегущей волны

$$K_0 = U_{m \max} / U_{m \min} = I_{m \max} / I_{m \min} \quad (10.51)$$

Коэффициент бегущей волны может изменяться в пределах от 0 до 1, причем чем больше  $K_0$ , тем ближе режим работы линии к режиму бегущих волн.

Очевидно, что в точках линии, в которых амплитуда напряжения (тока) достигает максимального значения, напряжения (токи) падающей и отраженной волн совпадают на фазе, а там, где амплитуда напряжения (тока) имеет минимальное значение, напряжения (токи) падающей и отраженной волн находятся в противофазе, следовательно,

$$U_{m \max} = U_{m \text{ пад}} + U_{m \text{ отр}}; \quad U_{m \min} = U_{m \text{ пад}} - U_{m \text{ отр}} \quad (10.52)$$

Подставляя (10.52) в (10.51) и принимая во внимание, что отношение амплитуды напряжения отраженной волны к амплитуде напряжения падающей волны представляет собой модуль коэффициента отражения линии  $\rho(x)$ , устанавливаем связь между коэффициентом бегущей волны и коэффициентом отражения:

$$K_0 = (U_{m \text{ пад}} - U_{m \text{ отр}}) / (U_{m \text{ пад}} + U_{m \text{ отр}}) = [1 - \rho(x)] / [1 + \rho(x)].$$

В линии без потерь модуль коэффициента отражения в любом сечении линии равен модулю коэффициента отражения в конце линии, поэтому коэффициент бегущей волны во всех сечениях линии постоянен:

$$K_0 = (1 - \rho_2) / (1 + \rho_2).$$

В линии с потерями модуль коэффициента отражения изменяется вдоль линии, достигая наибольшего значения в точке отражения (при  $x = l$ ). В связи с этим в линии с потерями значение коэффициента бегущей волны изменяется вдоль линии, становясь в конце нее минимальным.

### § 10.3. ОПЕРАТОРНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОРОДНЫХ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

#### Проходной четырехполюсник с распределенными параметрами

Длинную линию конечной длины (отрезок длиной  $l$ ), имеющую две пары внешних выводов, можно рассматривать как проходной четырехполюсник с распределенными параметрами. Для получения основных уравнений и первичных параметров этого четырехполюсника воспользуемся уравнениями (10.10), (10.11), выразив входящие в них постоянные интегрирования через ток  $I'_2$  и напряжение  $U_2$  в конце линии (10.37) и перейдя от показательных к ги-



гиперболическим функциям с помощью соотношений (8.95). В результате имеем:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \operatorname{ch}(\underline{\gamma}x') + \underline{Z}_B \dot{I}'_2 \operatorname{sh}(\underline{\gamma}x'); \\ I(x) &= \dot{U}_2 \operatorname{sh}(\underline{\gamma}x')/\underline{Z}_B + \dot{I}'_2 \operatorname{ch}(\underline{\gamma}x'). \end{aligned} \quad (10.53)$$

Полагая в уравнениях (10.53)  $x' = l$ ,  $\dot{U}(x) = \dot{U}_1$ ,  $I(x) = I_1$ , находим основные уравнения четырехполюсника с распределенными параметрами в форме  $A$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l) + \underline{Z}_B \dot{I}'_2 \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l); \\ I_1 &= \dot{U}_2 \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l)/\underline{Z}_B + \dot{I}'_2 \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l) \end{aligned} \quad (10.54)$$

и его  $A$ -параметры

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l); \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_B \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l); \\ \underline{A}_{21} &= \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l)/\underline{Z}_B; \quad \underline{A}_{22} = \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l). \end{aligned} \quad (10.55)$$

Далее, используя формулы перехода (см. приложение 2), получаем выражения для любых других первичных параметров рассматриваемого четырехполюсника, в частности выражения для  $Y$ -параметров:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \underline{Y}_{22} = \underline{A}_{22}/\underline{A}_{12} = \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l)/[\underline{Z}_B \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l)]; \\ \underline{Y}_{12} &= \underline{Y}_{21} = -1/\underline{A}_{12} = -1/[\underline{Z}_B \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l)]. \end{aligned} \quad (10.56)$$

Сравнивая выражения (10.55) и (8.99), убеждаемся, что *отрезок однородной длинной линии можно рассматривать как симметричный пассивный проходной четырехполюсник, характеристическое сопротивление которого равно волновому сопротивлению линии  $\underline{Z}_B$ , а характеристическая постоянная передачи — произведению коэффициента распространения  $\underline{\gamma}$  на длину отрезка  $l$ .*

С другой стороны, волновое сопротивление и коэффициент распространения линии можно определить как характеристические сопротивление и постоянную передачи отрезка линии, имеющего единичную длину. Следует отметить, что понятия характеристических сопротивлений и постоянной передачи были первоначально введены в теории цепей с распределенными параметрами, а затем их стали использовать и применительно к четырехполюсникам с сосредоточенными параметрами.

Рассмотрим особенности расположения нулей и полюсов первичных параметров четырехполюсников с распределенными параметрами в плоскости комплексного переменного  $p$ . Используя формулы для разложения гиперболических функций в бесконечные произведения

$$\operatorname{sh} \alpha = \alpha \prod_{n=1}^{\infty} [1 + \alpha^2/(n^2 \pi^2)]; \quad \operatorname{ch} \alpha = \prod_{n=1}^{\infty} \{1 + 4\alpha^2/[(2n-1)^2 \pi^2]\},$$

преобразуем выражения (10.56) к виду

$$Y_{11}(p) = Y_{22}(p) = \frac{1}{\gamma(p) l Z_B(p)} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \{1 + 4\gamma^2(p) l^2 / [(2n-1)^2 \pi^2]\}}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 + \gamma^2(p) l^2 / (n^2 \pi^2)]}; \quad (10.57)$$

$$Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = \frac{1}{\gamma(p) l Z(p)} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 + \gamma^2(p) l^2 / (n^2 \pi^2)]}, \quad (10.58)$$

где  $\gamma(p)$  и  $Z_B(p)$  — операторный коэффициент распространения и операторное волновое сопротивление линии, определяемые выражениями (10.6) и (10.9) соответственно.

Из выражений (10.57) и (10.58) следует, что первичные параметры четырехполюсников с распределенными параметрами в отличие от первичных параметров четырехполюсников с сосредоточенными параметрами имеют бесконечно большое число нулей и полюсов в плоскости комплексного переменного  $p$ .

Представляют интерес два частных случая — линии без потерь и резистивно-емкостные линии. В первом случае ( $R_1 = G_1 = 0$ ) выражения (10.57), (10.58) преобразуются к виду

$$Y_{11}(p) = Y_{22}(p) = \frac{1}{pL_1 l} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \{1 + 4p^2 L_1 C_1 l^2 / [(2n-1)^2 \pi^2]\}}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 + p^2 L_1 C_1 l^2 / (n^2 \pi^2)]};$$

$$Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = \frac{-1}{pL_1 l} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 + p^2 L_1 C_1 l^2 / (n^2 \pi^2)]},$$

откуда видно, что все нули и все полюсы операторных входных характеристик линии без потерь расположены на мнимой оси, причем нули и полюсы чередуются (рис. 10.9, а). Во втором случае ( $L_1 = C_1 = 0$ ) выражения для  $Y$ -параметров имеют вид

$$Y_{11}(p) = Y_{22}(p) = \frac{1}{R_1 l} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \{1 + 4pR_1 C_1 l^2 / [(2n-1)^2 \pi^2]\}}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 + pR_1 C_1 l^2 / (n^2 \pi^2)]};$$

$$Y_{12}(p) = Y_{21}(p) = \frac{-1}{R_1 l} \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} [1 + pR_1 C_1 l^2 / (n^2 \pi^2)]},$$

т. е. нули и полюсы операторных входных характеристик резистивно-емкостной линии чередуются на отрицательной вещественной полуоси (рис. 10.9, б).

Для описания четырехполюсников с распределенными параметрами можно использовать не только основные уравнения, связывающие токи и напряжения на его зажимах, но и уравнения другого типа, так называемые волновые уравнения, связывающие напряжения падающей и отраженной волн на входе и выходе четырехполюсника. Для получения волновых уравнений выражений напряжений и токи в начале и в конце линии через напряжения падающей и отраженной волн в начале  $\dot{U}_1$  пад,  $\dot{U}_1$  отр и в конце  $\dot{U}_2$  пад,  $\dot{U}_2$  отр линии:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_{1\text{пад}} + \dot{U}_{1\text{отр}}; \\ \dot{I}_1 &= (\dot{U}_{1\text{пад}} - \dot{U}_{1\text{отр}}) / Z_B; \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_{2\text{пад}} + \dot{U}_{2\text{отр}}; \\ \dot{I}_2 &= (\dot{U}_{2\text{пад}} - \dot{U}_{2\text{отр}}) / Z_B. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Подставляя выражения (10.59) в основные уравнения четырехполюсника, получаем два уравнения, связывающие напряжения  $\dot{U}_1$  пад,  $\dot{U}_1$  отр,  $\dot{U}_2$  пад,  $\dot{U}_2$  отр. Очевидно, что в зависимости от того, какие из указанных величин рассматривать в качестве независимых, можно получить шесть различных вариантов записи волновых уравнений. Наиболее часто применяют волновые уравнения в форме Т:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1\text{пад}} &= \underline{T}_{11} \dot{U}_{2\text{пад}} + \underline{T}_{12} \dot{U}_{2\text{отр}}; \\ \dot{U}_{1\text{отр}} &= \underline{T}_{21} \dot{U}_{2\text{пад}} + \underline{T}_{22} \dot{U}_{2\text{отр}} \end{aligned}$$

и в форме S:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1\text{отр}} &= \underline{S}_{11} \dot{U}_{1\text{пад}} + \underline{S}_{12} \dot{U}_{2\text{отр}}; \\ \dot{U}_{2\text{пад}} &= \underline{S}_{21} \dot{U}_{1\text{пад}} + \underline{S}_{22} \dot{U}_{2\text{отр}}. \end{aligned}$$

В матричной форме эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{пад}} \\ \dot{U}_{1\text{отр}} \end{bmatrix} = \underline{T} \begin{bmatrix} \dot{U}_{2\text{пад}} \\ \dot{U}_{2\text{отр}} \end{bmatrix} \quad (10.60)$$

и

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{отр}} \\ \dot{U}_{2\text{пад}} \end{bmatrix} = \underline{S} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{пад}} \\ \dot{U}_{2\text{отр}} \end{bmatrix}. \quad (10.61)$$

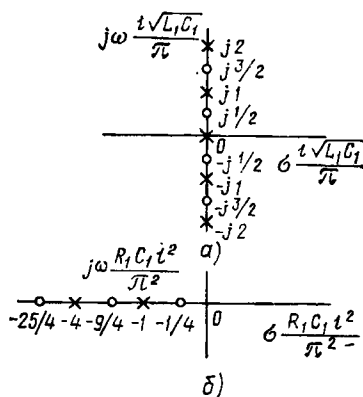


Рис. 10.9. Полусно-нулевые диаграммы операторной входной проводимости  $Y_{11}(p)$  линии без потерь (а) и резистивно-емкостной линии (б)

Матрицы  $\underline{T}$  и  $\underline{S}$  называются волновой матрицей и матрицей рассеяния соответственно. Их элементы могут быть выражены через любые первичные параметры четырехполосника. Например, подставляя (10.59) в уравнения (8.32) и преобразуя их к виду (10.60) или (10.61), получаем

$$\underline{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (A_{11} + A_{12}/Z_B + Z_B A_{21} + A_{22}); & (A_{11} - A_{12}/Z_B + Z_B A_{21} - A_{22}) \\ (\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/\underline{Z}_B - \underline{Z}_B \underline{A}_{21} - \underline{A}_{22}); & (\underline{A}_{11} - \underline{A}_{12}/\underline{Z}_B - \underline{Z}_B \underline{A}_{21} + \underline{A}_{22}) \end{bmatrix},$$

$$\underline{S} = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/\underline{Z}_B + \underline{Z}_B \underline{A}_{21} + \underline{A}_{22}} \begin{bmatrix} (A_{11} + A_{12}/Z_B - Z_B A_{21} - A_{22}); & 2\Delta_A \\ 2; & -(A_{11} - A_{12}/Z_B + Z_B A_{21} - A_{22}) \end{bmatrix}.$$

Нетрудно также установить связь между элементами матриц  $\underline{T}$  и  $\underline{S}$ :

$$\underline{S} = \frac{1}{\underline{T}_{11}} \begin{bmatrix} \underline{T}_{21}; & \underline{T}_{11} \underline{T}_{22} - \underline{T}_{12} \underline{T}_{21} \\ 1 & -\underline{T}_{12} \end{bmatrix};$$

$$\underline{T} = \frac{1}{\underline{S}_{21}} \begin{bmatrix} 1; & -\underline{S}_{22} \\ \underline{S}_{11}; & -(\underline{S}_{11} \underline{S}_{22} - \underline{S}_{12} \underline{S}_{21}) \end{bmatrix}.$$

Используя полученные соотношения, находим волновую матрицу  $\underline{T}$  и матрицу рассеяния  $\underline{S}$  отрезка однородной линии длиной  $l$ :

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} e^{\underline{\gamma}l}; & 0 \\ 0 & e^{-\underline{\gamma}l} \end{bmatrix}; \quad (10.62)$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0; & e^{-\underline{\gamma}l} \\ e^{-\underline{\gamma}l} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.63)$$

Как видно из выражений (10.62), (10.63), у рассматриваемого четырехполосника с распределенными параметрами не равны нулю только два элемента  $\underline{T}_{11}$ ,  $\underline{T}_{22}$  волновой матрицы и два элемента  $\underline{S}_{12}$ ,  $\underline{S}_{21}$  матрицы рассеяния. В общем случае у четырехполосников с распределенными параметрами, не равными нулю, могут оказаться все четыре элемента волновой матрицы или матрицы рассеяния.

Используя выражения для первичных параметров (10.55), (10.56), можно рассмотреть любые частотные характеристики отрезков однородных длинных линий, а также построить сосредоточенные П-образные и Т-образные схемы замещения отрезков линий на произвольной фиксированной частоте  $\omega$ .

### Входное сопротивление отрезка однородной длинной линии

Найдем комплексное входное сопротивление  $\underline{Z}$  отрезка однородной длинной линии, нагруженного со стороны зажимов 2—2' на произвольное сопротивление  $\underline{Z}_H$ :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{11}(j\omega) = \frac{\underline{U}_1}{i_1} = \frac{\underline{Z}_H \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l) + \underline{Z}_B \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l)}{\underline{Z}_H \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l) + \underline{Z}_B \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l)} \underline{Z}_B. \quad (10.64)$$

Из выражения (10.64) непосредственно следует уже известное свойство однородной линии, заключающееся в том, что при согласованной нагрузке  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B$  входное сопротивление линии равно волновому и не зависит от длины линии. При  $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_B$  входное сопротивление линии сложным образом зависит от ее длины, частоты внешнего воздействия и соотношения между  $\underline{Z}_H$  и  $\underline{Z}_B$ .

Рассмотрим наиболее важные для практики случаи, когда сопротивление нагрузки линии со стороны зажимов 2—2' равно нулю (режим короткого замыкания на выходе) или равно бесконечности (режим

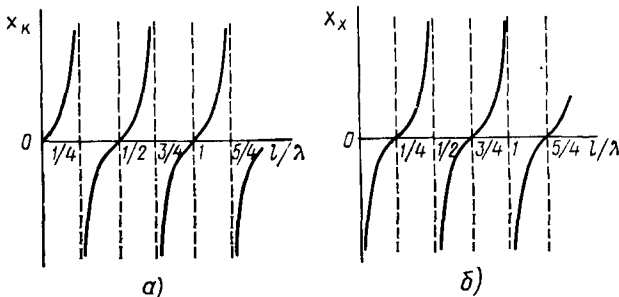


Рис. 10.10. Зависимость мнимой составляющей комплексного входного сопротивления линии без потерь от электрической длины линии:

а — режим короткого замыкания; б — режим холостого хода

холостого хода на выходе). Полагая в (10.64)  $\underline{Z}_H = 0$ , находим выражение для комплексного входного сопротивления линии в режиме короткого замыкания на выходе

$$\underline{Z}_K = \underline{Z}|_{\underline{Z}_H=0} = \underline{Z}_B \operatorname{th}(\underline{\gamma}l). \quad (10.65)$$

Для линии без потерь ( $\underline{\gamma} = j\beta = j2\pi/\lambda$ ,  $\underline{Z}_B = R_B = \sqrt{L_1/C_1}$ ) имеем

$$\underline{Z}_K = R_B \operatorname{th}(j\beta l) = jR_B \operatorname{tg}(\beta l) = jx_K. \quad (10.66)$$

Из выражения (10.66) видно, что вещественная составляющая комплексного входного сопротивления отрезка длиной линии без потерь в режиме короткого замыкания на выходе равна нулю, а мнимая составляющая

$$x_K = R_B \operatorname{tg}(\beta l) = R_B \operatorname{tg}(2\pi l/\lambda)$$

является периодической функцией электрической длины линии  $l/\lambda$  и может принимать любые значения от  $-\infty$  до  $\infty$  (рис. 10.10, а). При  $0 < l/\lambda < 1/4$  входное сопротивление линии имеет индуктивный характер; при  $l/\lambda = 1/4$  оно бесконечно велико; при  $1/4 < l/\lambda < 1/2$  входное сопротивление линий имеет емкостной характер, а при  $l/\lambda = 1/2$  оно равно нулю. Как видно из рис. 10.10, а увеличение  $l/\lambda$  на длину, кратную  $1/2$ , не изменяет входного сопротивления отрезка однородной линии без потерь.

Электрическая длина линии зависит как от физической длины линии  $l$ , так и от частоты внешнего воздействия  $f$ . Для линии без потерь электрическая длина прямо пропорциональна частоте:

$$l/\lambda = \omega l \sqrt{L_1 C_1} / (2\pi) = fl \sqrt{L_1 C_1},$$

поэтому вид зависимостей мнимой составляющей комплексного входного сопротивления от электрической длины и частоты одинаков и отличается только масштабом изображения по оси абсцисс. Так, входное сопротивление короткозамкнутого отрезка линии без потерь имеет индуктивный характер на частотах  $0 < f < 1/(4l \sqrt{L_1 C_1})$ , при которых электрическая длина линии меньше  $1/4$ , и емкостной характер на частотах  $1/(4l \sqrt{L_1 C_1}) < f < 1/(2l \sqrt{L_1 C_1})$ , при которых электрическая длина лежит в пределах от  $1/4$  до  $1/2$ . В окрестностях частот  $f_n = (2n + 1)/4l \sqrt{L_1 C_1}$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , на которых длина отрезка линии кратна нечетному числу четвертей длин волн, АЧХ и ФЧХ комплексного входного сопротивления короткозамкнутого отрезка длиной линии подобны соответствующим характеристикам параллельного колебательного контура, а в окрестностях частот  $f_k = k/2l \sqrt{L_1 C_1}$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , на которых длина отрезка линии кратна четному числу четвертей длин волн, короткозамкнутый отрезок ведет себя подобно последовательному колебательному контуру.

В режиме холостого хода на выходе комплексное входное сопротивление отрезка длиной линии  $Z_x$  определяется выражением

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}|_{z_{II} = \infty} = \underline{Z}_B \operatorname{cth}(\underline{\gamma}l). \quad (10.67)$$

Как и в режиме короткого замыкания на выходе, комплексное входное сопротивление отрезка длиной линии без потерь в режиме холостого хода на выходе имеет чисто мнимый характер

$$\underline{Z}_x = -jR_B \operatorname{ctg}(\beta l) = -jR_B \operatorname{ctg}(2\pi l/\lambda) = jx_x$$

и является периодической функцией электрической длины линии (рис. 10.10, б). Из сравнения рис. 10.10, б, а, видно, что электрические характеристики разомкнутого на конце отрезка линии длиной  $l$  совпадают с электрическими характеристиками короткозамкнутого на конце отрезка линии длиной  $l + \lambda/4$ .

Рассмотренные свойства короткозамкнутых и разомкнутых отрезков длинных линий позволяют использовать их в качестве колебательных систем в диапазоне сверхвысоких частот, когда добротность колебательных контуров, составленных из дискретных индуктивных катушек и конденсаторов, становится низкой. В отличие от колебательных систем с сосредоточенными параметрами число резонансных частот в колебательных системах с распределенными параметрами бесконечно велико.

Короткозамкнутые отрезки линий широко используют также в качестве реактивных шлейфов, т. е. устройств, подключаемых параллельно какому-либо участку цепи для компенсации мнимой составляющей его входной проводимости. Изменяя длину короткозамкнутого отрезка в пределах от 0 до  $\lambda/2$ , можно всегда добиться того,

чтобы мнимая составляющая входной проводимости шлейфа была равна по абсолютному значению и противоположна по знаку мнимой составляющей входной проводимости параллельно включенного участка цепи. При этом суммарное входное сопротивление участка цепи вместе с шлейфом имеет чисто резистивный характер. В связи с тем что входное сопротивление короткозамкнутого отрезка длиной  $\lambda/4$  бесконечно велико, его можно использовать в качестве «металлического изолятора» для подвески или крепления основной линии передачи.

В связи с тем что комплексное входное сопротивление отрезка длинной линии в общем случае не равно сопротивлению нагрузки, отрезки линий обладают способностью трансформировать сопротивления. Наиболее интересны в этом отношении свойства отрезков линий без потерь длиной  $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$ , и  $\lambda/8$ .

Полагая в выражении (10.64) сначала  $\gamma l = j\beta l$ ,  $j2\pi l/\lambda$  и  $\underline{Z}_B = -R_B = \sqrt{L_1/C_1}$ ,

$$\underline{Z} = \frac{Z_H \cos(2\pi l/\lambda) + jR_B \sin(2\pi l/\lambda)}{R_B \cos(2\pi l/\lambda) + jZ_H \sin(2\pi l/\lambda)} R_B. \quad (10.68)$$

а затем  $l/\lambda = 1/2$ , устанавливаем, что комплексное входное сопротивление отрезка линии без потерь длиной  $\lambda/2$  равно сопротивлению нагрузки. Следовательно, этот отрезок линии как бы повторяет сопротивление нагрузки, т.е. ведет себя подобно идеальному трансформатору с коэффициентом трансформации  $n = 1$ .

Подставляя в выражение (10.68)  $l/\lambda = 1/4$ , находим, что входное сопротивление отрезка линии без потерь длиной  $\lambda/4$

$$\underline{Z} = R_B^2 / \underline{Z}_H \quad (10.69)$$

пропорционально проводимости нагрузки и может изменяться в широких пределах при изменении волнового сопротивления линии. Следовательно, отрезок линии длиной  $\lambda/4$  (четвертьволновый трансформатор) может преобразовывать большое сопротивление в малое и наоборот. В предельных случаях входное сопротивление четвертьволнового трансформатора равно нулю при бесконечно большом сопротивлении нагрузки (рис. 10.10, б) и равно бесконечности при коротком замыкании на выходе (рис. 10.10, а). Из выражения (10.69) видно, что если сопротивление нагрузки имеет чисто резистивный характер, то и входное сопротивление четвертьволнового трансформатора будет иметь чисто резистивный характер.

Из выражения (10.68) можно найти также входное сопротивление отрезка без потерь длиной  $\lambda/8$ :

$$\underline{Z} = (\underline{Z}_H + jR_B) R_B / (R_B + j\underline{Z}_H). \quad (10.70)$$

Если сопротивление нагрузки имеет чисто резистивный характер ( $\underline{Z}_H = R_H$ ), то модули числителя и знаменателя дроби, входящей в выражение (10.70), одинаковы и, следовательно, модуль входного сопротивления рассматриваемого отрезка линии равен  $R_B$ . Таким образом, отрезок линии длиной  $\lambda/8$  преобразует произвольное резистивное сопротивление в сопротивление, модуль которого равен  $R_B$ .

Аналогичными свойствами обладает отрезок линии без потерь длиной  $3\lambda/8$ .

Трансформирующие свойства отрезков длинных линий широко используются на практике для построения устройств согласования реальных линий передачи с нагрузкой. В результате согласования в линии передачи устанавливается режим, близкий к режиму бегущих волн, при этом практически вся передаваемая линией энергия потребляется нагрузкой, а потери энергии, связанные с многократным прохождением отраженных волн вдоль линии значительно уменьшаются.

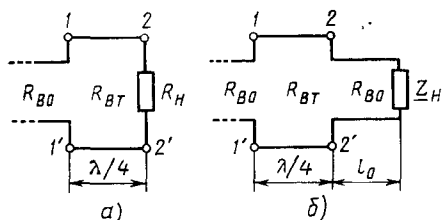


Рис. 10.11. Согласование линии с нагрузкой с помощью четвертьволнового трансформатора

Если сопротивление нагрузки реальной линии передачи с малыми потерями имеет чисто резистивный характер, то для согласования линии с нагрузкой можно применять четвертьволновый трансформатор, включенный между линией и нагрузкой (рис. 10.11, а). Погонные параметры отрезка линии, используемой в качестве четвертьволнового трансформатора, выбирают таким образом, чтобы волновое сопротивление трансформатора  $R_{BT}$  было равно среднему геометрическому из волнового сопротивления основной (согласуемой) линии  $R_{B0}$  и сопротивления нагрузки  $R_N$ :

$$R_{BT} = \sqrt{R_{B0} R_N}$$

В этом случае входное сопротивление четвертьволнового трансформатора в точках 1—1' равно  $R_{B0}$ , и в основной линии установится режим, близкий к режиму бегущих волн. Отрезок линии, используемый в качестве четвертьволнового трансформатора, при этом находится в режиме смешанных волн, однако вследствие малой длины трансформатора потери энергии в нем незначительны.

Если сопротивление нагрузки линии имеет комплексный характер, то согласующий трансформатор подключают не в непосредственной близости к нагрузке, а на некотором расстоянии  $l_0$  от нее, выбранном таким образом, чтобы входное сопротивление нагруженного участка линии в точках 2—2' имело чисто резистивный характер (рис. 10.11, б). Неудобство рассмотренного метода согласования заключается в том, что необходимо изготавливать специальный отрезок линии, волновое сопротивление и, следовательно, погонные параметры которого должны отличаться от волнового сопротивления и погонных параметров согласуемой линии.

Этого недостатка лишен разработанный В. Р. Татариновым метод согласования с помощью одного или двух реактивных шлейфов, конструктивно представляющих собой отрезки длинных линий того же типа, что и согласуемая линия (рис. 10.12). В первом случае расстояние от места подключения шлейфа до точки подключения нагрузки  $l_0$



(рис. 10.12, а) выбирают таким образом, чтобы вещественная составляющая входной проводимости линии в точках 1—1' была равна  $1/R_B$ :

$$\underline{Y}_{11} = 1/R_B + jb, \quad (10.71)$$

а длину шлейфа  $l_1$  — так, чтобы входная проводимость шлейфа равнялась  $-jb$ . Очевидно, что при этих условиях эквивалентное сопротивление нагрузки основной линии в точках 1—1' равно волновому сопротивлению линии  $R_B$ .

Во втором случае (рис. 10.12, б) расстояние между шлейфами  $l_0$  выбирают равным  $\lambda/8$  или  $3\lambda/8$ , длина первого шлейфа  $l_1$  подбирается так, чтобы в точках 1—1' выполнялось условие (10.71), а длина второго шлейфа  $l_2$  — так, чтобы компенсировать мнимую составляющую  $\underline{Y}_{11}$ .

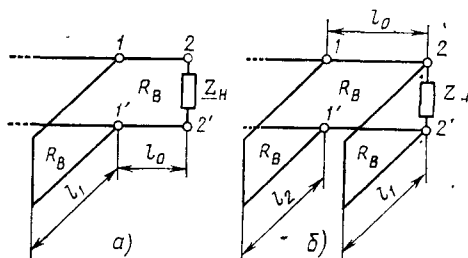


Рис 10.12. Согласование линии с нагрузкой с помощью одного (а) или двух (б) реактивных шлейфов

### Определение параметров однородной длинной линии по результатам опытов холостого хода и короткого замыкания

С помощью полученных соотношений можно определить волновые и погонные параметры однородной длинной линии по результатам измерения комплексного входного сопротивления отрезка линии в режимах холостого хода и короткого замыкания на выходе. Разрешим (10.65), (10.67) относительно  $\underline{Z}_B$  и  $\text{th}(\underline{\gamma}l)$ :

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\underline{Z}_K \underline{Z}_X}; \quad (10.72)$$

$$\text{th}(\underline{\gamma}l) = \sqrt{\underline{Z}_K / \underline{Z}_X} = \sqrt{\underline{Z}_K \underline{Y}_X}. \quad (10.73)$$

Из выражений (10.72), (10.73) видно, что волновое сопротивление линии равно среднему геометрическому из комплексных входных сопротивлений отрезка линии произвольной длины  $l$ , измеренных в режимах холостого хода и короткого замыкания на выходе, а гиперболический тангенс произведения коэффициента распространения линии на ее длину — среднему геометрическому из комплексного входного сопротивления отрезка линии в режиме короткого замыкания и комплексной входной проводимости этого же отрезка в режиме холостого хода.

Комплексное входное сопротивление любого отрезка длиной  $l$  линии, нагруженного на произвольное сопротивление  $\underline{Z}_{11}$ , можно выразить через комплексные входные сопротивления этого отрезка, изме-

решенные в режимах холостого хода и короткого замыкания. Действительно, подставляя (10.72), (10.73) в выражение (10.64), получаем

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B \operatorname{th}(\underline{\gamma}l)}{\underline{Z}_H \underline{Z}_B \operatorname{cth}(\underline{\gamma}l)} \underline{Z}_B \operatorname{cth}(\underline{\gamma}l) - \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_K}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_X} \underline{Z}_X.$$

Для определения коэффициента ослабления  $\alpha$  и коэффициента фазы линии  $\beta$  перейдем в (10.73) от гиперболического тангенса к показательным функциям

$$\operatorname{th}(\underline{\gamma}l) = (e^{\underline{\gamma}l} - e^{-\underline{\gamma}l}) / (e^{\underline{\gamma}l} + e^{-\underline{\gamma}l}) = (e^{2\underline{\gamma}l} - 1) / (e^{2\underline{\gamma}l} + 1) = \sqrt{\underline{Z}_K \underline{Y}_X}$$

и разрешим полученное выражение относительно  $e^{2\underline{\gamma}l}$ :

$$e^{2\underline{\gamma}l} = (1 + \sqrt{\underline{Z}_K \underline{Y}_X}) / (1 - \sqrt{\underline{Z}_K \underline{Y}_X}) = A e^{j\psi_A}. \quad (10.74)$$

Используя (10.74), выражаем  $\alpha$  и  $\beta$  через модуль  $A$  и аргумент  $\psi_A$  комплексного числа  $(1 + \sqrt{\underline{Z}_K \underline{Y}_X}) / (1 - \sqrt{\underline{Z}_K \underline{Y}_X})$ :

$$\alpha = \ln A / (2l); \quad \beta = (\psi_A + 2k\pi) / (2l).$$

Здесь  $k$  — коэффициент, равный целому числу длин волн, укладывающихся вдоль длины исследуемого отрезка.

По результатам измерения  $\underline{\gamma}$  и  $\underline{Z}_B$  можно определить погонные параметры линии  $R_1, L_1, C_1, G_1$ . Разрешая выражения (10.12), (10.13) относительно  $R_1 + j\omega L_1$  и  $G_1 + j\omega C_1$  и приравнивая вещественные и мнимые части получаемых равенств:  $R_1 + j\omega L_1 = \underline{Z}_B \underline{\gamma}$ ,  $G_1 + j\omega C_1 = \underline{\gamma} / \underline{Z}_B$ , находим

$$R_1 = \operatorname{Re}[\underline{Z}_B \underline{\gamma}]; \quad \omega L_1 = \operatorname{Im}[\underline{Z}_B \underline{\gamma}]; \quad G_1 = \operatorname{Re}[\underline{\gamma} / \underline{Z}_B]; \quad \omega C_1 = \operatorname{Im}[\underline{\gamma} / \underline{Z}_B].$$

#### § 10.4. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

##### Задачи анализа переходных процессов в цепях с распределенными параметрами

Различают два типа задач, связанных с исследованием переходных процессов в одномерных цепях с распределенными параметрами:

1) определение токов и напряжений на зажимах линии или в более общем случае токов и напряжений внешних по отношению к линии ветвей при произвольном внешнем воздействии;

2) определение напряжений и токов в различных сечениях линии при произвольном внешнем воздействии.

Эти задачи обычно решают операторным методом. При решении задач первого типа операторные изображения искомых токов и напряжений находят с помощью рассмотренных ранее методов анализа сложных цепей, причем линию рассматривают как четырехполюсник, первичные параметры которого считаются известными. При решении задач второго типа операторные изображения токов и напряжений в различных сечениях линии определяют из выражений (10.7), (10.8),

причем входящие в эти выражения постоянные интегрирования должны быть найдены исходя из значений токов и напряжений на внешних зажимах линии. В отличие от цепей с сосредоточенными параметрами операторные изображения токов и напряжений в цепях с распределенными параметрами, как правило, выражаются в терминах трансцендентных функций и обладают бесконечно большим числом полюсов, что в ряде случаев усложняет переход от изображений токов и напряжений к оригиналам.

### Напряжение на выходе линии без потерь при согласованной нагрузке. Понятие о линиях без искажений

Пусть при  $t < 0$  напряжение на входе однородной линии без потерь  $u_1 = 0$ , а при  $t \geq 0$  изменяется по произвольному закону  $u_1(t)$ :

$$u_1 = 1(t) u_1(t). \quad (10.75)$$

Найдем напряжение на выходе линии  $u_2$  для случая, когда сопротивление нагрузки линии равно волновому сопротивлению  $R_B$ .

Операторные изображения напряжений на входе  $U_1(p)$  и выходе линии  $U_2(p)$  связаны соотношением

$$U_2(p) = K_{21}(p) U_1(p),$$

где  $K_{21}(p)$  — операторный коэффициент передачи линии по напряжению при согласованной нагрузке. Рассматривая линию как симметричный пассивный проходной четырехполюсник, первичные параметры которого определяются выражениями (10.55), получаем

$$U_2(p) = \frac{1}{\sqrt{A_{11}(p)A_{22}(p)} + \sqrt{A_{12}(p)A_{21}(p)}} U_1(p) = e^{-\gamma(p)l} U_1(p).$$

Для линии без потерь  $\gamma(p) = p \sqrt{L_1 C_1}$ , поэтому  $U_2(p) = e^{-p l \sqrt{L_1 C_1}} U_1(p)$ .

Согласно теореме запаздывания (6.54) умножению изображения произвольной функции времени на  $e^{-pt_0}$  соответствует смещение функции времени на  $t_0$ . Следовательно,

$$u_2 = u_1(t - l \sqrt{L_1 C_1}) = u_1(t - t_0).$$

Здесь время запаздывания, равное времени распространения падающей волны вдоль линии,

$$t_0 = l \sqrt{L_1 C_1} = l/v_{\phi}. \quad (10.76)$$

Таким образом, напряжение  $u_2$  на выходе линии без потерь при согласованной нагрузке представляет собой смещенное во времени на  $t_0$  напряжение  $u_1$  на входе линии. Ток  $i_2'$  на выходе линии повторяет по форме выходное напряжение  $u_2$  и равен смещенному во времени на  $t_0$  току на входе линии:  $i_2' = u_2/R_B = [u_1(t - t_0)]/R_B = i_1(t - t_0)$ .

Следовательно, линия без потерь, работающая на согласованную нагрузку, осуществляет неискажающую передачу колебаний с входа линии на выход с задержкой на время, требуемое для распространения падающей волны вдоль линии.

Это свойство линии без потерь обусловлено тем, что фазовая скорость, волновое сопротивление и коэффициент ослабления линии не зависят от частоты. Если сложное воздействие на входе такой линии представить в виде суммы гармонических колебаний различных частот, то условия распространения колебаний всех частот будут одинаковы. Поэтому суммы гармонических колебаний на входе и выходе линии также будут одинаковы.

Можно убедиться, что условия неискажающей передачи будут выполняться и в линии с потерями, погонные параметры которой удовлетворяют условию

$$R_1/L_1 = G_1/C_1 \quad (10.77)$$

Комплексное волновое сопротивление и коэффициент распространения такой линии

$$\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{L_1(R_1/L_1 + j\omega)}{C_1(G_1/C_1 + j\omega)}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}};$$

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{L_1 C_1 (R_1/L_1 + j\omega)(G_1/C_1 + j\omega)} = \sqrt{L_1 C_1 (R_1/L_1 + j\omega)} \\ &= \sqrt{L_1 C_1 (G_1/C_1 + j\omega)}, \end{aligned}$$

причем волновое сопротивление линии, фазовая скорость и коэффициент ослабления не зависят от частоты:  $Z_B = \sqrt{L_1/C_1} = R_B$ ;  $v_{\text{ф}} = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ ;  $\alpha = R_1/R_B = R_B G_1$ .

Если к входу линии, параметры которой удовлетворяют условию (10.77), приложено произвольное напряжение  $u_1 = u_1(t)$  или  $U_1(p)$ , то операторное напряжение на выходе линии при согласованной нагрузке

$$U_2(p) = e^{-\gamma(p)l} U_1(p) = e^{-R_1 l / R_B} U_1(p) e^{-pt_0},$$

где  $t_0$  — время распространения падающей волны вдоль линии, определяемое выражением (10.76).

Переходя от операторного изображения напряжения  $U_2(p)$  на выходе линии к оригиналу

$$u_2 = e^{-R_1 l / R_B} u_1(t - t_0),$$

устанавливаем, что напряжение на выходе линии с ослаблением в  $e^{-R_1 l / R_B}$  раз и задержкой на  $t_0$  повторяет напряжение на ее входе.

Линии без потерь, а также линии, погонные параметры которых удовлетворяют условию (10.77), называются линиями без искажений. Рассмотренные свойства линий без искажения используются на практике для построения устройств задержки сигналов (линий задержки), назначение которых — сдвинуть сигнал во времени без искажения.

## Подключение разомкнутого на конце отрезка линии к источнику постоянного напряжения

Пусть в момент времени  $t = 0$  к входу однородной длинной линии без потерь подключается источник постоянного напряжения  $E$ . Найдем напряжение на выходе линии, если сопротивление нагрузки линии бесконечно велико (линия разомкнута на выходе).

Принимая во внимание, что операторный коэффициент передачи линии по напряжению в режиме холостого хода на выходе  $K_{21}(p) = 1/A_{11}(p) = 1/\text{ch}|\gamma(p)l| = 1/\text{ch}\{p l \sqrt{L_1 C_1}\}$ , а операторное изображение напряжения на входе  $U_1(p) = E/p$ , получаем

$$U_2(p) = K_{21}(p)U_1(p) = E/p \text{ch}(pt_0),$$

где  $t_0 = l \sqrt{L_1 C_1}$ .

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа (см. приложение 1), находим напряжение на выходе рассматриваемой линии (рис. 10 13)

$$u_2 = \begin{cases} 2E & \text{при } t \in [(4k-3)t_0; (4k-1)t_0], \\ 0 & \text{при } t \notin [(4k-3)t_0; (4k-1)t_0]. \end{cases}$$

где

$$k = 1, 2, 3, \dots,$$

которое представляет собой бесконечную последовательность прямоугольных импульсов длительностью  $2t_0$ , удвоенных по высоте по сравнению с напряжением источника энергии. Таким образом, переходной процесс в цепи носит колебательный характер

## Подключение короткозамкнутого отрезка линии к источнику постоянного напряжения

Определим ток  $i_2$  на выходе короткозамкнутого отрезка однородной линии без потерь, к входу которой в момент времени  $t = 0$  подключают источник постоянного напряжения  $E$ .

Операторное изображение тока на выходе рассматриваемого отрезка линии может быть найдено из основных уравнений четырехполюсника с распределенными параметрами в форме А (10.54):

$$I_2(p) = \frac{U_1(p)}{Z_B(p) \text{sh}|\gamma(p)l|} \approx \frac{E}{p R_B \text{sh}(p l \sqrt{L_1 C_1})} = \frac{I_0}{p \text{sh}(pt_0)},$$

где  $I_0 \approx E/R_B$ ;  $t_0 = l \sqrt{L_1 C_1}$ .

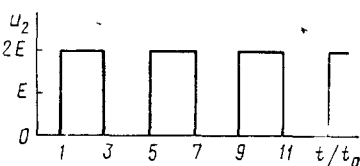


Рис 10 13 Напряжение на выходе разомкнутого отрезка длинной линии без потерь, подключаемого к источнику постоянного напряжения

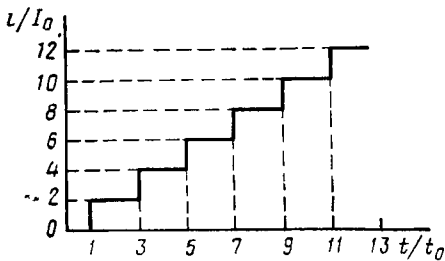


Рис 10.14. Ток на выходе короткозамкнутого отрезка длинной линии без потерь, подключаемой к источнику постоянного напряжения

ных скачков тока высотой  $2I_0$ , сдвинутых во времени на  $2t_c$  (рис. 10.14). Как и в предыдущем случае, переходной процесс в линии носит колебательный характер.

### Распределение напряжения и тока в однородной линии без потерь при произвольном внешнем воздействии

Пусть напряжение  $u_1$  на входе однородной длинной линии без потерь изменяется во времени по произвольному закону (10.75). Найдем распределение напряжения и тока в линии, если сопротивление нагрузки линии равно волновому. Для определения операторных изображений напряжений и токов в произвольном сечении линии воспользуемся выражениями (10.7) и (10.8). Очевидно, что первое и второе слагаемые, входящие в каждое из этих выражений, представляют собой операторные изображения падающей и отраженной волн напряжения или тока. Постоянные интегрирования  $A_1(p)$  и  $A_2(p)$  в рассматриваемом режиме могут быть найдены из условий

$$U(0, p) = U_1(p); \quad U(l, p) = R_B I(l, p), \quad (10.78)$$

где операторные изображения напряжения в начале линии, напряжения в конце линии и тока в конце линии, определяемые из выражений (10.7), (10.8) при  $x = 0$  и  $x = l$ , соответственно равны:

$$\begin{aligned} U(0, p) &= A_1(p) + A_2(p); \\ U(l, p) &= A_1(p) e^{-\gamma(p)l} + A_2(p) e^{\gamma(p)l}; \\ I(l, p) &= \frac{A_1(p)}{R_B} e^{-\gamma(p)l} - \frac{A_2(p)}{R_B} e^{\gamma(p)l}. \end{aligned} \quad (10.79)$$

Подставляя (10.79) в (10.78) получаем  $A_1(p) = U_1(p)$ ;  $A_2(p) = 0$ , откуда

$$\begin{aligned} U(x, p) &= U_1(p) e^{-\gamma(p)x} = U_1(p) e^{-p\sqrt{L_1 C_1} x}, \\ I(x, p) &= \frac{U_1(p)}{R_B} e^{-\gamma(p)x} = I_1(p) e^{-p\sqrt{L_1 C_1} x}, \end{aligned} \quad (10.80)$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа, переходим от изображения тока к оригиналу:

$$i_2' = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in ]0, t_0[; \\ 2kI_0 & \text{при } t \in ](2k-1)t_0; \\ & (2k+1)t_0[, \end{cases}$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$

Ток  $i_2'$  можно рассматривать как результат наложения бесконечно большого числа конечных скачков тока высотой  $2I_0$ , сдвинутых во времени на  $2t_c$

где  $I_1(p) = I(0, p) = U_1(p) R_B$  — операторное изображение тока на входе линии.

Применяя к выражениям (10.80) теорему запаздывания, можно установить, что напряжение и ток в произвольном сечении линии  $u(x, t) \doteq U(x, p)$ ,  $i(x, t) \doteq I(x, p)$  повторяют напряжение и ток в начале линии  $u_1 \doteq U_1(p)$ ,  $i_1 \doteq I_1(p)$  с задержкой на время  $t_x = x \sqrt{L_1 C_1}$  —  $x/v_{ф}$ , требуемое для распространения падающей волны от начала линии до рассматриваемого сечения  $x$ . Если на вход линии будет подан, например, скачок напряжения  $u_1 = E 1(t)$ , то он будет распространяться по линии со скоростью  $v_{ф}$  и через промежуток времени  $t_0 = t_x |_{x=l}$  достигнет конца линии, после чего напряжение во всех сечениях линии будет равно  $E$  (рис. 10.15).

Если сопротивление нагрузки линии не равно волновому, то падающая волна, достигнув конца линии, полностью или частично отразится от него и начнет распространяться в направлении убывания  $x$ .

Если линия не согласована с внутренним сопротивлением источника ( $Z_i \neq Z_B$ ), то при  $x = 0$  волна повторно отразится, и новая волна начнет распространяться в направлении возрастания  $x$ . Таким образом, если линия не согласована с нагрузкой и источником энергии, то распределение напряжения и тока в линии (в частности, на выходе линии) будет определяться как результат наложения волн, распространяющихся в линии после многократных отражений.

Рассмотрим распределение напряжения и тока в разомкнутом на конце отрезке однородной линии без потерь, к входу которого в момент времени  $t = 0$  подключают источник постоянного напряжения  $E$ . Постоянные интегрирования  $A_1(p)$  и  $A_2(p)$  в этом случае определяют из условий

$$U(0, p) = U_1(p) = E/p; \quad I(l, p) = 0. \quad (10.81)$$

Полагая в выражении (10.7)  $x = 0$ , а в выражении (10.8)  $x = l$  и подставляя полученные значения в (10.81), получаем

$$A_1(p) + A_2(p) = E/p; \quad \frac{A_1(p)}{R_B} e^{-\nu(p)l} - \frac{A_2(p)}{R_B} e^{\nu(p)l} = 0,$$

откуда

$$A_1(p) = \frac{1}{1 + e^{-2l\gamma(p)}} \frac{E}{p}; \quad A_2(p) = \frac{e^{-2l\gamma(p)}}{1 + e^{-2l\gamma(p)}} \frac{E}{p}.$$

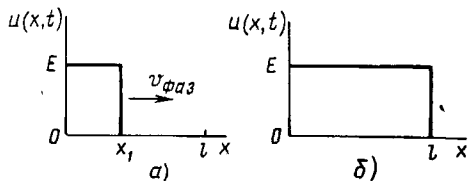


Рис. 10.15. Распространение скачка напряжения вдоль линии без потерь при согласованной нагрузке:

а —  $t = t_x, x < l$ ; б —  $t \geq t_0$ .

Подставляя значения постоянных интегрирования в (10.7), (10.8), находим операторные изображения напряжения и тока в произвольном сечении линии  $x$ .

$$U(x, p) = \frac{e^{-x\gamma(p)} + e^{-(2l-x)\gamma(p)}}{1 - e^{-2l\gamma(p)}} \frac{E}{p} = \frac{e^{-pt} + e^{p(2t_0-t_x)}}{1 - e^{-2pt_0}} \frac{I_0}{p}, \quad (10.82)$$

$$I(x, p) = \frac{e^{-x\gamma(p)} - e^{-(2l-x)\gamma(p)}}{1 - e^{-2l\gamma(p)}} \frac{E}{pR_B} = \frac{e^{-pt} - e^{p(2t_0-t_x)}}{1 - e^{-2pt_0}} \frac{I_0}{p}, \quad (10.83)$$

где  $I_0 = E/R_B$ ,  $t_0 = l\sqrt{L_1C_1}$ ,  $t_x = x\sqrt{L_1C_1}$ .

Если  $1/(1 + e^{-2pt_0})$  представить как сумму бесконечной геометрической прогрессии [2]

$$1/(1 + e^{-2pt_0}) = 1 - e^{-2pt_0} + e^{-4pt_0} - e^{-6pt_0} + e^{-8pt_0} - \dots$$

то выражения (10.82), (10.83) можно переписать в виде более удобном для выполнения обратного преобразования Лапласа

$$U(x, p) = \frac{I_0}{p} [e^{-pt} + e^{p(2t_0-t_x)} - e^{p(2t_0-t_x)} - e^{p(4t_0-t_x)} + e^{p(4t_0-t_x)} + e^{p(6t_0-t_x)} - \dots];$$

$$I(x, p) = \frac{I_0}{p} [e^{-pt} - e^{p(2t_0-t_x)} - e^{p(2t_0-t_x)} + e^{p(4t_0-t_x)} + e^{p(4t_0-t_x)} - e^{p(6t_0-t_x)} - \dots].$$

Переходя от операторных изображений искомых напряжения и тока к оригиналам, окончательно получаем

$$u(x, t) = E [1(t - t_x) + 1(t - 2t_0 + t_x) - 1(t - 2t_0 - t_x) - 1(t - 4t_0 + t_x) + 1(t - 4t_0 - t_x) + 1(t - 6t_0 + t_x) - \dots]; \quad (10.84)$$

$$i(x, t) = I_0 [1(t - t_x) - 1(t - 2t_0 + t_x) - 1(t - 2t_0 - t_x) + 1(t - 4t_0 + t_x) + 1(t - 4t_0 - t_x) - 1(t - 6t_0 + t_x) - \dots], \quad (10.85)$$

Как видно из выражений (10.84), (10.85), напряжение и ток в произвольной точке линии  $x$  представляют собой сумму скачков, каждый из которых появляется в момент прихода в данную точку падающей или отраженной волны. Первый скачок возникает в момент прихода падающей волны, второй — в момент прихода волны, отраженной от нагрузки, третий скачок соответствует волне, отраженной от источника, четвертый — волне, повторно отраженной от нагрузки, и т. д. При  $0 < t < t_x$  напряжение и ток в точке  $x$  равны нулю. При  $t = t_x$  в нее приходит падающая волна, в результате чего напряжение и ток скачком увеличиваются до уровней  $E$  и  $I_0$  соответственно (рис. 10.16, а). В момент времени  $t = t_0$  падающая волна достигает конца линии и отражается от него, при этом напряжение волны не изменяет знака,



д ее знак изменяет знак на противоположный (при  $Z_n = \infty$  коэффициент отражения в конце линии по току равен  $-1$ , по напряжению  $+1$ ). При  $t_0 < t < 2t_0$  (рис. 10.16, б) отраженная волна распространяется в направлении уменьшения  $x$ , при этом напряжения падающей и отраженной волн суммируются, а их токи вычитаются (напряжение линии становится равным  $2E$ , а ток — нулю). В момент времени  $t = 2t_0$

волна, распространяющаяся от нагрузки, достигнет источника и отразится от него, при этом знак напряжения волны изменится, а знак тока нет (внутреннее сопротивление источника равно нулю). При  $2t_0 < t < 3t_0$  волна, отразившаяся от источника, распространяется в направлении возрастания  $x$ , при этом напряжение линии становится равным  $E$ , а ток равным  $-I_0$  (рис. 10.16, в). Если  $t > 3t_0$ , то происходит повторное отражение волны от нагрузки, волна напряжения при этом остается отрицательной, а волна тока становится положительной. При  $3t_0 < t < 4t_0$  волна, повторно отраженная от нагрузки, распространяется в направлении уменьшения  $x$  (рис. 10.16, г), а напряжение и ток линии становятся равными нулю. В момент времени  $t = 4t_0$  волна повторно отражается от источника, и процессы в линии повторяются (рис. 10.16, д). Итак, ток в конце линии все время равен нулю, а напряжение имеет форму импульсов амплитудой  $2E$  и длительностью  $2t_0$ , что полностью соответствует полученным ранее результатам (см. рис. 10.13).

Используя аналогичную методику, можно рассмотреть и переходные процессы в короткозамкнутой на конце линии, подключаемой к источнику постоянного напряжения. В этом режиме коэффициенты отражения линии по напряжению от источника энергии и нагрузки равны  $-1$ , а коэффициенты отражения по току равны  $+1$ , следовательно, при каждом отражении знак напряжения волны изменяется, а ток не изменяется. При  $0 < t < t_0$  в линии распространяется падающая волна, напряжение и ток линии скачком возрастают до уровней  $E$  и  $I_0$  соответственно (рис. 10.17, а). Если  $t_0 < t < 2t_0$ , то в линии распространяется волна, отразившаяся от нагрузки (рис. 10.17, б), при этом напряжения падающей и отраженной волн вычитаются (напря-

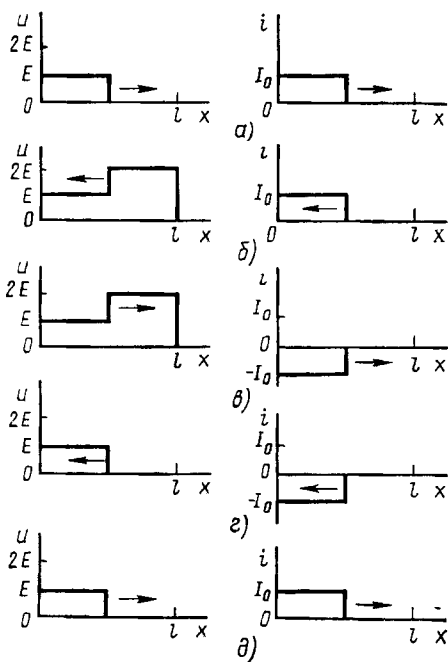


Рис. 10.16 Распределение напряжения и тока в отрезке линии, подключаемой к источнику постоянного напряжения (режим холостого хода на выходе)

жение линии становится равным нулю), а их токи суммируются (ток линии становится равным  $2I_0$ ). При  $2t_0 < t < 3t_0$  в линии распространяется волна, отразившаяся от источника, напряжение линии становится равным  $E$ , а ток равным  $3I_0$  (рис. 10.17, в). Таким образом, за каждый проход волны вдоль линии напряжение во всех сечениях линии, за исключением  $x = 0$  и  $x = l$ , изменяется либо от нуля до  $E$ , либо от  $E$  до нуля, а ток возрастает на  $I_0$ . В конце линии напряжение все время равно нулю, а ток нарастает скачками, равными  $2I_0$  (см. рис. 10.14).

В связи с тем что в линиях без потерь, работающих в режиме холостого хода или короткого замыкания на выходе, отсутствует потребление энергии, переходные процессы в таких линиях имеют характер незатухающих колебаний. Наличие потерь ведет к затуханию переходных процессов, поэтому при подключении линии с потерями к источнику постоянного напряжения и напряжения в различных сечениях линии постепенно приближаются к тем значениям, которые должны быть в этих сечениях в установившемся режиме постоянного тока. Своеобразный характер зависимостей от времени напряжений и токов на выходе линий без потерь позволяет использовать на практике отрезки реальных линий с малыми потерями в качестве формирователей импульсов различного вида.

Рис. 10.17. Распределение напряжения и тока в отрезке линии, подключаемой к источнику постоянного напряжения (режим короткого замыкания на выходе)

значениям, которые должны быть в этих сечениях в установившемся режиме постоянного тока. Своеобразный характер зависимостей от времени напряжений и токов на выходе линий без потерь позволяет использовать на практике отрезки реальных линий с малыми потерями в качестве формирователей импульсов различного вида.

## § 10.5. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТИПОВ

### Резистивные линии

Резистивными или *RG-линиями* называются одномерные цепи с распределенными параметрами, в которых отсутствуют процессы запасания энергии в электрическом или магнитном поле.

Волновое сопротивление такой линии, как и волновое сопротивление линии без потерь, имеет чисто резистивный характер:  $Z_B = \sqrt{R_1/G_1}$ , поэтому ток и напряжение падающей волны, так же как и ток и напряжение отраженной волны, в линиях этих типов совпадают по фазе. В отличие от линии без потерь коэффициент распространения резистивной линии является вещественным

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{R_1 G_1}.$$

В связи с тем что коэффициент фазы  $\beta$  резистивной линии равен нулю, сдвига фаз между колебаниями в различных сечениях линии нет. Строго говоря, в линиях такого типа отсутствуют и волновые процессы распространения колебаний, однако понятия «отраженной» и «падающей» волн используют и применительно к резистивным линиям в качестве удобной математической абстракции.

Первичные параметры резистивных линий могут быть получены из выражений (10.55) или (10.56), если положить в них  $\underline{\gamma} = \alpha = \sqrt{R_1 G_1}$ ,  $\underline{Z}_B = R_B = \sqrt{R_1 / G_1}$ :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha l); & R_B \text{sh}(\alpha l) \\ \text{sh}(\alpha l) / R_B; & \text{ch}(\alpha l) \end{bmatrix};$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_B \text{sh}(\alpha l)} \begin{bmatrix} \text{ch}(\alpha l); & -1 \\ -1; & \text{ch}(\alpha l) \end{bmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, первичные параметры  $RG$ -линии являются чисто вещественными и не зависят от частоты. Вследствие этого аргумент любой входной или передаточной характеристики резистивной линии при чисто резистивной нагрузке ( $\underline{Z}_H = R_H$ ) тождественно равен нулю, а модуль — не зависит от частоты.

Коэффициент передачи резистивной линии по напряжению при чисто резистивной нагрузке

$$K_{21}(j\omega) = K_{21} = R_H / (R_H \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}) = R_H / [R_H \text{ch}(\alpha l) + R_B \text{sh}(\alpha l)]. \quad (10.86)$$

монотонно падает с ростом  $\alpha l$ . Поскольку при  $\alpha l \gg 1$  можно положить

$$\text{ch}(\alpha l) \approx \text{ch}(\alpha l) \approx e^{\alpha l} / 2, \quad (10.87)$$

коэффициент передачи линии по напряжению в этом случае

$$K_{21} \approx 2R_H e^{-\alpha l} / (R_H + R_B). \quad (10.88)$$

При согласованной нагрузке ( $R_H = R_B$ ) приближенное (10.88) и точное (10.86) соотношения приводят к одинаковому результату:

$$K_{21} = e^{-\alpha l}.$$

Входное сопротивление резистивной линии

$$R_{11}(j\omega) = R_{11} = [R_H \text{ch}(\alpha l) + R_B \text{sh}(\alpha l)] R_B / [R_H \text{sh}(\alpha l) + R_B \times \text{ch}(\alpha l)]. \quad (10.89)$$

Так как на вещественной оси гиперболические синус и косинус монотонно возрастают, то зависимость  $R_{11}$  от длины линии не имеет периодического характера.

При малых  $\alpha l$  справедливы приближенные соотношения  $\text{ch}(\alpha l) \approx 1$ ;  $\text{sh}(\alpha l) \approx \alpha l = l \sqrt{R_1 G_1}$ , и выражение (10.89) может быть заменено на  $R_{11} = (R_H + l R_1) / (1 + R_H l G_1)$ .

Подставляя (10.87) в выражение (10.89), устанавливаем, что при  $\alpha l \gg 1$  входное сопротивление  $RG$ -линии равно волновому

$$R_{11} \approx R_B = \sqrt{R_1 / G_1}$$

и не зависит от длины линии и сопротивления нагрузки.

Очевидно, что переходные процессы в резистивных линиях отсутствуют и новый установившийся режим в линиях такого типа наступает непосредственно после коммутации.

### Резистивно-емкостные линии

Резистивные линии и линии без потерь — это предельные случаи одномерных цепей с распределенными параметрами, в одном из которых полностью пренебрегают явлениями запасания электрической энергии, а в другом — всеми видами потерь. Резистивно-емкостные линии занимают промежуточное положение, поскольку в них одновременно имеют место и процесс запасания энергии в электрическом поле, и процесс необратимого ее преобразования в другие виды энергии.

В отличие от линий без потерь, коэффициент распространения которых является чисто мнимым, и резистивных линий, коэффициент распространения которых является вещественным, коэффициент распространения резистивно-емкостных линий — комплексное число

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega R_1 C_1} = \sqrt{\omega R_1 C_1/2} + j\sqrt{\omega R_1 C_1/2},$$

причем коэффициент фазы  $\beta$  численно равен коэффициенту ослабления  $\alpha$ :

$$\beta = \alpha = \sqrt{\omega R_1 C_1/2}.$$

Фазовая скорость в резистивно-емкостной линии зависит от частоты

$$v_\phi = \omega/\beta = \sqrt{2\omega/(R_1 C_1)},$$

поэтому колебания различных частот распространяются в ней с различными скоростями. Очевидно, что неискаженная передача колебаний в резистивно-емкостных линиях невозможна.

Волновое сопротивление однородной резистивно-емкостной линии является комплексным, причем его модуль уменьшается с ростом частоты, а аргумент равен  $-45^\circ$  и не зависит от частоты:

$$\underline{Z}_B = \sqrt{R_1/(j\omega C_1)} = \sqrt{R_1/(2\omega C_1)}(1 - j) = \sqrt{R_1/(\omega C_1)} e^{-j45^\circ}.$$

Первичные параметры однородной  $RC$ -линии могут быть найдены с помощью выражений (10.55), (10.56), если положить в них  $\underline{Z}_B = \sqrt{R_1/(2\omega C_1)}(1 - j)$ ,  $\underline{\gamma} = \alpha(1 + j)$  и принять во внимание, что  $\operatorname{ch}[\alpha l(1 + j)] = \operatorname{ch}(\alpha l) \cos(\alpha l) + j \operatorname{sh}(\alpha l) \sin(\alpha l)$ ;  $\operatorname{sh}[\alpha l(1 + j)] = \operatorname{sh}(\alpha l) \times \cos(\alpha l) + j \operatorname{ch}(\alpha l) \sin(\alpha l)$ .

Используя выражения для первичных параметров однородной  $RC$ -линии, можно определить любые операторные или комплексные частотные характеристики этих линий и найти их реакцию на произвольное внешнее воздействие.

В отличие от простейших  $RC$ -цепей (см. рис. 8.40, б, г), напряжение на выходе которых не может быть сдвинуто по фазе относительно

входного напряжения на угол, больший, чем  $90^\circ$ , сдвиг фаз между напряжениями на входе и выходе  $RC$ -цепи с распределенными параметрами может достигать любого сколь угодно большого значения. Действительно, из выражения для коэффициента передачи по напряжению  $RC$ -цепи с распределенными параметрами при согласованной нагрузке

$$K_{21}(j\omega) = K_{21}(\omega) e^{j\psi_{21}(\omega)} = e^{-\gamma l} = e^{-(\alpha - j\beta)l}$$

следует, что модуль коэффициента передачи  $K_{21}(\omega) = e^{-\alpha l} = e^{-\sqrt{\omega R_1 C_1 / 2} l}$  монотонно уменьшается, а аргумент  $\psi_{21}(\omega) = -\alpha l = -\sqrt{\omega R_1 C_1 / 2} l$  монотонно возрастает по абсолютному значению с ростом длины линии  $l$  или частоты  $\omega$ . Это свойство резистивно-емкостных линий широко используют в микроэлектронике для построения различных безындуктивных фильтров и фазовращателей.

### Неоднородные линии

Неоднородными линиями называются одномерные цепи с распределенными параметрами, погонные параметры которых изменяются вдоль цепи по определенному закону. Коэффициент распространения, волновое сопротивление и фазовая скорость таких линий в общем случае являются функциями координаты, а отраженные волны возникают не только на концах линии, но и во всех ее сечениях. Уравнения, описывающие электрические процессы в неоднородной линии  $-\frac{\partial i}{\partial x} = G_1(x) u + C_1(x) \frac{\partial u}{\partial t}$ ;  $-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1(x) i + L_1(x) \frac{\partial i}{\partial t}$ , по внешнему виду совпадают с уравнениями (1.59), (1.60), описывающими процессы в однородной линии, однако входящие в эти уравнения коэффициенты являются функциями координаты. Распределение комплексных действующих значений напряжения и тока в неоднородной линии описывается уравнениями:

$$-\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = \underline{Y}_1(x) \dot{U}(x); \quad (10.90)$$

$$-\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = \underline{Z}_1(x) \dot{I}(x), \quad (10.91)$$

которые путем дифференцирования и исключения переменных могут быть сведены к одному уравнению с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} - \frac{1}{\underline{Z}_1(x)} \frac{d\underline{Z}_1(x)}{dx} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} - \underline{Z}_1(x) \underline{Y}_1(x) \dot{U}(x) = 0. \quad (10.92)$$

Общее решение такого уравнения при произвольном законе изменения погонных параметров вдоль линий неизвестно, поэтому для знакомства со свойствами неоднородных линий необходимо конкретизировать вид зависимости погонных параметров от координаты.

Рассмотрим простой и весьма важный для практики случай, когда погонные параметры неоднородной линии определяются соотношениями

$$G_1(x) = R_1(x) = 0; L_1(x) = L_1(0) e^{-qx}; C_1(x) = C_1(0) e^{qx}, \quad (10.93)$$

где  $L_1(0)$ ,  $C_1(0)$  — значения погонных индуктивности и емкости в сечении линии  $x = 0$ ;  $q$  — постоянный коэффициент, который может быть больше или меньше нуля. Неоднородная линия такого типа называется экспоненциальной линией без потерь. Ее коэффициент распространения не зависит от координаты и является чисто мнимым:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_1(x) \underline{Y}_1(x)} = j\omega \sqrt{L_1(0) C_1(0)} = -j\beta,$$

а волновое сопротивление изменяется вдоль линии по экспоненциальному закону

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_B(x) = \sqrt{L_1(0)/C_1(0)} e^{-qx} = \underline{Z}_B(0) e^{-qx},$$

где  $\underline{Z}_B(0) = \underline{Z}_B(x)|_{x=0} = \sqrt{L_1(0)C_1(0)}$  — значение волнового сопротивления при  $x = 0$ .

Исследование процессов в экспоненциальной линии без потерь облегчается тем, что при выбранном законе зависимости погонных параметров от координаты (10.93) коэффициенты уравнения (10.92) постоянны:

$$\frac{d^2 \dot{U}(x)}{dx^2} + q \frac{d\dot{U}(x)}{dx} - \underline{\gamma}^2 \dot{U}(x) = 0. \quad (10.94)$$

Решение уравнения (10.94) имеет вид

$$\dot{U}(x) = \underline{A}_1 e^{s_1 x} + \underline{A}_2 e^{s_2 x},$$

где  $s_1, s_2$  — корни характеристического уравнения  $s^2 + qs - \underline{\gamma}^2 = 0$ , следовательно,

$$\dot{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-qx/2} e^{-\sqrt{\underline{\gamma}^2 + q^2/4} x} + \underline{A}_2 e^{-qx/2} e^{\sqrt{\underline{\gamma}^2 + q^2/4} x}. \quad (10.95)$$

Подставляя выражение (10.95) в уравнение (10.91), находим комплексное действующее значение тока линии

$$\begin{aligned} \dot{i}(x) = & \frac{q/2 + \sqrt{\underline{\gamma}^2 + q^2/4}}{j\omega L_1(0)} \underline{A}_1 e^{qx/2} e^{-\sqrt{\underline{\gamma}^2 + q^2/4} x} + \\ & + \frac{q/2 - \sqrt{\underline{\gamma}^2 + q^2/4}}{j\omega L_1(0)} \underline{A}_2 e^{qx/2} e^{\sqrt{\underline{\gamma}^2 + q^2/4} x}. \end{aligned}$$

Для упрощения анализа ограничимся рассмотрением случая, когда погонные параметры изменяются вдоль линии достаточно медленно — так, что на участке линии, длина которого равна длине волны  $\lambda$ , относительное изменение параметров незначительно. Тогда

$$|\underline{\gamma}^2| \gg q^2/4; \quad (10.96)$$

$$\sqrt{\underline{\gamma}^2 + q^2/4} \approx \underline{\gamma}; \quad (10.97)$$

$$\frac{j\omega L_1(0)}{q/2 + \sqrt{\underline{\gamma}^2 + q^2/4}} \approx \frac{j\omega L_1(0)}{-q/2 + \sqrt{\underline{\gamma}^2 + q^2/4}} \approx \frac{j\omega L_1(0)}{\underline{\gamma}} = \underline{Z}_B(0). \quad (10.98)$$

Используя (10.96)–(10.98), находим упрощенные выражения для распределения комплексных действующих значений напряжения и тока вдоль рассматриваемой линии:

$$\underline{U}(x) = \underline{A}_1 e^{-qx/2} e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{-qx/2} e^{\underline{\gamma}x}; \quad (10.99)$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{A}_1 e^{qx/2}}{\underline{Z}_B(0)} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\underline{A}_2 e^{qx/2}}{\underline{Z}_B(0)} e^{\underline{\gamma}x}. \quad (10.100)$$

Первые слагаемые в выражениях (10.99), (10.100) можно интерпретировать как комплексные действующие значения напряжения и тока падающей, а вторые — отраженной волн. Из этих выражений следует, что при  $q > 0$  амплитуды напряжения падающей  $U_{m \text{ пад}} = \sqrt{2} A_1 \times e^{-qx/2}$  и отраженной  $U_{m \text{ отр}} = \sqrt{2} A_2 e^{-qx/2}$  волн уменьшаются, а амплитуды тока падающей  $I_{m \text{ пад}} = \sqrt{2} A_1 e^{qx/2} / \underline{Z}_B(0)$  и отраженной  $I_{m \text{ отр}} = \sqrt{2} A_2 e^{qx/2} / \underline{Z}_B(0)$  волн увеличиваются при удалении от начала линии; при  $q < 0$  амплитуды напряжения обеих волн увеличиваются, а амплитуды тока — уменьшаются с возрастанием  $x$ , причем полная мощность каждой из волн, определяемая произведением действующих значений напряжения и тока, остается неизменной.

Соотношения между напряжениями и токами падающей или отраженной волны напоминают соотношения между напряжениями и токами идеального трансформатора, поэтому явление изменения напряжения и тока этих волн в неоднородной линии без потерь получило название трансформации падающей и отраженной волн. Количественно изменение амплитуд напряжения и тока оценивается коэффициентом трансформации линии

$$\begin{aligned} n(x) &= \frac{U_{m \text{ пад}}(x)}{U_{m \text{ пад}}(0)} = \frac{U_{m \text{ отр}}(x)}{U_{m \text{ отр}}(0)} = \frac{I_{m \text{ пад}}(0)}{I_{m \text{ пад}}(x)} = \\ &= \frac{I_{m \text{ отр}}(0)}{I_{m \text{ отр}}(x)} = e^{-qx/2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_B(x)}{\underline{Z}_B(0)}}, \end{aligned} \quad (10.101)$$

С учетом (10.101) выражения для комплексных действующих значений напряжения и тока экспоненциальной линии без потерь принимают вид

$$\dot{U}(x) = \sqrt{\underline{Z}_B(x)/\underline{Z}_B(0)} \left[ \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} \right]; \quad (10.102)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_B(0)\underline{Z}_B(x)}} \left[ \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} \right]. \quad (10.103)$$

Выражая входящие в (10.102), (10.103) постоянные интегрирования  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$  через напряжение  $\dot{U}_2$  и ток  $\dot{I}_2$  в конце линии

$$\underline{A}_1 = \frac{\sqrt{\underline{Z}_B(0)/\underline{Z}_B(l)} \dot{U}_2 + \sqrt{\underline{Z}_B(0)\underline{Z}_B(l)} \dot{I}_2}{2} e^{\underline{\gamma}l};$$

$$\underline{A}_2 = \frac{\sqrt{\underline{Z}_B(0)\underline{Z}_B(l)} \dot{U}_2 - \sqrt{\underline{Z}_B(0)/\underline{Z}_B(l)} \dot{I}_2}{2} e^{-\underline{\gamma}l}$$

и полагая  $x = 0$ , получаем основную систему уравнений исследуемой линии в форме А:

$$\dot{U}_1 = \left| \sqrt{\underline{Z}_B(0)/\underline{Z}_B(l)} \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l) \right| \dot{U}_2 + \left| \sqrt{\underline{Z}_B(0)\underline{Z}_B(l)} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l \right| \dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = \left| \operatorname{sh}(\underline{\gamma}l) / \sqrt{\underline{Z}_B(0)\underline{Z}_B(l)} \right| \dot{U}_2 + \left| \sqrt{\underline{Z}_B(l)/\underline{Z}_B(0)} \operatorname{ch}(\underline{\gamma}l) \right| \dot{I}_2. \quad (10.104)$$

Из уравнений (10.104) следует, что экспоненциальную линию без потерь можно рассматривать как взаимный несимметричный четырехполюсник, входное и выходное характеристические сопротивления которого равны соответственно волновому сопротивлению линии в сечении  $x = 0$  и волновому сопротивлению линии в сечении  $x = l$ :

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_B(0) = \sqrt{\frac{L_1(0)}{C_1(0)}}; \quad \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_B(l) = \sqrt{\frac{L_1(0)}{C_1(0)}} e^{-\underline{\gamma}l},$$

а характеристическая постоянная передачи — произведению коэффициента распространения на длину линии:

$$\underline{\Gamma} = \underline{\gamma}l = j\beta l = j\omega l \sqrt{L_1(0)C_1(0)}.$$

При согласованной нагрузке со стороны зажимов 2—2' комплексные коэффициенты передачи линии по напряжению и току в соответствии с (8.100), (8.101)

$$K_{21}(j\omega) = \sqrt{\frac{\underline{Z}_B(l)}{\underline{Z}_B(0)}} e^{-j\beta l} = n(l) e^{-j\beta l};$$

$$G_{21}(j\omega) = \sqrt{\frac{\underline{Z}_B(0)}{\underline{Z}_B(l)}} e^{-j\beta l} = \frac{1}{n(l)} e^{-j\beta l}.$$



Таким образом, напряжение на выходе экспоненциальной линии без потерь с согласованной нагрузкой будет больше в  $n(l) = n(x)|_{x=l} = e^{-q'l/2}$  раз, а ток на выходе — во столько же раз меньше, чем напряжение и ток на входе линии. При воздействии на вход линии произвольного напряжения  $u_1(t) \doteq U_1(p)$  операторное изображение напряжения на выходе линии

$$U_2(p) = K_{21}(p) U_1(p) = n(l) e^{-p \sqrt{L_1(0) C_1(0)} l} U_1(p).$$

Переходя от изображения к оригиналу, устанавливаем, что напряжение на выходе линии  $u_2(t) = n(l) u_1(t - t_0)$  представляет собой входное напряжение, смещенное во времени на время задержки сигнала в линии:

$$t_0 = l \sqrt{L_1(0) C_1(0)} = l/v_0,$$

умноженное на коэффициент трансформации в конце линии  $n(l)$ .

Таким образом, экспоненциальная линия без потерь может производить задержку и трансформирование сигналов без их искажения.

Следует отметить, что подобным свойством обладают и другие неоднородные линии, что обусловило широкое применение на практике отрезков неоднородных линий для задержки и трансформирования сигналов. Отрезки неоднородных линий используют также для согласования источника энергии с нагрузкой, в качестве фильтров и колебательных систем сверхвысоких частот.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

У студента, впервые просмотревшего эту книгу и не нашедшего в ней ни схем каких-либо радиотехнических устройств, ни рекомендаций по их проектированию, может сложиться впечатление, что теория цепей — это скучная, весьма усложненная дисциплина, не имеющая непосредственного отношения к проблемам, с которыми сталкивается радиоинженер в своей практической деятельности. На самом деле это далеко не так — теория цепей как научная дисциплина ориентирована непосредственно на разработку инженерных методов решения различных радиотехнических задач, причем развитие и становление теории цепей происходило и происходит одновременно с развитием электротехники и радиоэлектроники: потребность в исследовании новых типов устройств и систем стимулирует разработку новых методов в теории цепей, а успехи теории цепей, в свою очередь, способствуют дальнейшему прогрессу в создании радиоэлектронных и электротехнических устройств.

На начальном этапе — в конце прошлого и начале нынешнего веков — теория цепей развивалась в основном в направлении обеспечения потребностей электротехники. Разработанные на этом этапе методы анализа линейных цепей постоянного и переменного токов по сей день составляют научную и методическую основу теории цепей, однако они не дают возможности анализировать процессы в типовых радиоэлектронных цепях, содержащих многополюсные элементы типа электронных ламп и транзисторов.

В 50-е годы теория цепей в своем развитии подошла ближе к решению задач, характерных для радиоэлектроники. Именно в эти годы в основном трудами советских ученых были заложены основы теории четырехполюсников и многополюсников, начали развиваться методы анализа процессов в цепях с нелинейными, параметрическими и управляемыми элементами.

Мощным толчком к дальнейшему развитию теории цепей послужило возникновение и стремительное развитие микроэлектроники (60—70-е годы). Разработка радиоэлектронных устройств, содержащих тысячи транзисторов на одном кристалле, и проектирование аппаратуры на такой элементной базе потребовали создания принципиально новых методов анализа и синтеза цепей, ориентированных на широкое применение вычислительной техники.

Ограниченный объем книги не позволил раскрыть в ней все богатство идей и методов, накопленных в современной теории цепей. Ста-

вилась более скромная задача — подготовить будущих радиоинженеров, с одной стороны, к практическому применению основных методов теории цепей, а с другой — к созданию базы для дальнейшего накопления и усвоению знаний в области теории радиоэлектронных цепей. Следуя программе курса, основное внимание в книге уделялось рассмотрению классических, установившихся методов. В то же время в ней нашли отражение и сравнительно новые вопросы, такие, как анализ цепей с управляемыми источниками и методы формирования уравнений электрического равновесия, ориентированные на применение ЭВМ.

Глубокое усвоение изложенных методов и дальнейшее развитие идей теории цепей невозможны без практического применения полученных знаний и без самостоятельной работы с научной литературой, поэтому, завершая книгу, мы отсылаем заинтересованного читателя к многочисленным монографиям и статьям, освещающим важнейшие достижения и новейшие идеи как в теории цепей, так и в смежных с ней областях науки и техники.

## ЛИТЕРАТУРА

- ✓ 1. Зиньков А. Л., Филиппов Л. И. Введение в специальность радиоинженера. — М.: Высшая школа, 1983.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — Лейпциг: Тойбнер; М.: Наука, 1981.
3. Пухов Г. Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. — Киев: Наукова думка, 1967.
4. Сигорский В. П., Петренко А. И. Алгоритмы анализа электронных схем. — М.: Советское радио, 1976.
5. Чуа Л. О., Пен-Мин Лни. Машинный анализ электронных схем (Пер. с англ. — М.: Энергия, 1980).
- ✓ 6. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. — М.: Высшая школа, 1965.
7. Копторович М. И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. — М.: Советское радио, 1975.
8. Чахмахсаян Е. А., Бармаков Ю. Н., Гольденберг А. Э. Машинный анализ интегральных схем. — М.: Советское радио, 1974.
9. Трохименко Я. К., Каширский И. С., Ловкий В. К. Проектирование радиотехнических схем на инженерных ЭЦВМ. — Киев: Техника, 1976.
10. Анисимов Б. В., Белов Б. И., Норенков И. П. Машинный расчет элементов ЭВМ. — М.: Высшая школа, 1976.
11. Ильин В. Н. Основы автоматизации схемотехнического проектирования. — М.: Энергия, 1979.
12. Баталов Б. В., Егоров Ю. Б., Русаков С. Г. Основы математического моделирования больших интегральных схем на ЭВМ. М.: Радио и связь, 1982.
13. Глорнозов Е. Л., Ссорин В. Г., Сыпчук П. П. Введение в автоматизацию схемотехнического проектирования. — М.: Советское радио, 1976.
14. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. — М.: Высшая школа, 1980.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица оригиналов и изображений по Лапласу

Изображение	Оригинал при $t \geq 0$	Примечание
$1/p$	1	
$1/p^2$	$t$	
$1/p^{n+1}$	$t^n/n!$	$n$ — целое положительное число
1	$\delta(t)$	
$1/(p+\alpha)$	$e^{-\alpha t}$	
$1/[p(p+\alpha)]$	$(1-e^{-\alpha t})/\alpha$	
$1/[p^2(p+\alpha)]$	$(e^{-\alpha t} + \alpha t - 1)/\alpha^2$	
$1/(p+\alpha)^2$	$te^{-\alpha t}$	
$1/(p+\alpha)^n$	$t^{n-1}/(n-1)! e^{-\alpha t}$	$n$ — целое положительное число
$p/(p+\alpha)^2$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	
$1/[(p+\alpha)(p+\beta)]$	$(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})/(\beta - \alpha)$	

Изображение	Оригинал при $t > 0$	Примечание
$1/[p(p+\alpha)(p+\beta)]$	$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta-\alpha} \left( \frac{e^{-\beta t}}{\beta} - \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha} \right)$	
$p/[(p+\alpha)(p+\beta)]$	$\frac{1}{\beta-\alpha} (\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t})$	
$\frac{1}{(p+\alpha)(p+\beta)(p+\gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{-\beta t}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} +$ $+ \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$	
$\frac{(p \cos \beta - \alpha \sin \beta)}{(p^2 + \alpha^2)}$	$\cos(\alpha t + \beta)$	
$(p \sin \beta + \alpha \cos \beta)/(p^2 + \alpha^2)$	$\sin(\alpha t + \beta)$	
$(p^2 - \alpha^2)/(p^2 + \alpha^2)^2$	$t \cos \alpha t$	
$(p+\alpha)/[(p+\alpha)^2 + \beta^2]$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	
$\alpha/(p^2 - \alpha^2)$	$\text{sh } \alpha t$	
$p/(p^2 - \alpha^2)$	$\text{ch } \alpha t$	
$1/\sqrt{p}$	$1/\sqrt{\pi t}$	
$1/\sqrt{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}/\sqrt{\pi t}$	
$\frac{1}{p \text{ ch } \alpha p}$	2 при $t \in ](4k-3)\alpha; (4k-1)\alpha[$ 0 при $t \notin ](4k-3)\alpha; (4k-1)\alpha[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$
$\frac{1}{p} \left( 1 - \frac{1}{\text{ch } \alpha p} \right)$	1 при $t \in ](4k-5)\alpha; (4k-3)\alpha[$ -1 при $t \in ](4k-3)\alpha; (4k-1)\alpha[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$
$\frac{1}{p \text{ sh } \alpha p}$	2k при $t \in ](2k-1)\alpha; (2k+1)\alpha[$ 0 при $t \in ]0, \alpha[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$
$\frac{\text{th } \alpha p}{p}$	1 при $t \in ](4k-4)\alpha; (4k-2)\alpha[$ -1 при $t \in ](4k-2)\alpha; 4\alpha k[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$
$1/(p \text{ th } \alpha p)$	2k-1 при $t \in ]2(k-1)\alpha; 2\alpha k[$	$k=1, 2, 3, \dots;$ $\alpha > 0$

Соотношения между первичными параметрами проходимых четырехполюсников

	$\gamma$	$z$	$H$	$O$	$A$	$B$
$Y$	$\underline{Y}_{11}; \underline{Y}_{12}$ $\underline{Y}_{21}; \underline{Y}_{22}$	$\underline{Z}_{22}, -\underline{Z}_{12}$ $\underline{\Delta}_Z, \underline{\Delta}_Z$ $-\underline{Z}_{21}, \underline{Z}_{11}$ $\underline{\Delta}_Z, \underline{\Delta}_Z$	$\underline{1}, -\underline{H}_{12}$ $\underline{H}_{11}, \underline{H}_{11}$ $\underline{H}_{21}, \underline{\Delta}_H$ $\underline{H}_{11}, \underline{H}_{11}$	$\underline{\Delta}_G, \underline{G}_{12}$ $\underline{G}_{22}, \underline{G}_{22}$ $-\underline{G}_{21}, \underline{1}$ $\underline{G}_{22}, \underline{G}_{22}$	$\underline{A}_{22}, -\underline{\Delta}_A$ $\underline{A}_{12}, \underline{A}_{12}$ $-\underline{1}, \underline{A}_{11}$ $\underline{A}_{12}, \underline{A}_{12}$	$\underline{B}_{11}, -\underline{1}$ $\underline{B}_{12}, \underline{B}_{12}$ $-\underline{\Delta}_B, \underline{B}_{22}$ $\underline{B}_{12}, \underline{B}_{12}$
$Z$	$\underline{Y}_{22}, -\underline{Y}_{12}$ $\underline{\Delta}_Y, \underline{\Delta}_Y$ $-\underline{Y}_{21}, \underline{Y}_{11}$ $\underline{\Delta}_Y, \underline{\Delta}_Y$	$\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_{21}, \underline{Z}_{22}$	$\underline{\Delta}_H, \underline{H}_{12}$ $\underline{H}_{22}, \underline{H}_{22}$ $-\underline{H}_{21}, \underline{1}$ $\underline{H}_{22}, \underline{H}_{22}$	$\underline{1}, -\underline{G}_{12}$ $\underline{G}_{11}, \underline{G}_{11}$ $\underline{G}_{21}, \underline{\Delta}_G$ $\underline{G}_{11}, \underline{G}_{11}$	$\underline{A}_{11}, \underline{\Delta}_A$ $\underline{A}_{21}, \underline{A}_{21}$ $\underline{1}, \underline{A}_{22}$ $\underline{A}_{21}, \underline{A}_{21}$	$\underline{B}_{22}, \underline{1}$ $\underline{B}_{21}, \underline{B}_{21}$ $\underline{\Delta}_B, \underline{B}_{11}$ $\underline{B}_{21}, \underline{B}_{21}$
$H$	$\underline{1}, -\underline{Y}_{12}$ $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{11}$ $\underline{Y}_{21}, \underline{\Delta}_Y$ $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{11}$	$\underline{\Delta}_Z, \underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_{22}, \underline{Z}_{22}$ $-\underline{Z}_{21}, \underline{1}$ $\underline{Z}_{22}, \underline{Z}_{22}$	$\underline{H}_{11}, \underline{H}_{12}$ $\underline{H}_{21}, \underline{H}_{22}$	$\underline{G}_{32}, -\underline{G}_{12}$ $\underline{\Delta}_G, \underline{\Delta}_G$ $-\underline{G}_{21}, \underline{G}_{11}$ $\underline{\Delta}_G, \underline{\Delta}_G$	$\underline{A}_{12}, \underline{\Delta}_A$ $\underline{A}_{22}, \underline{A}_{22}$ $-\underline{1}, \underline{A}_{21}$ $\underline{A}_{22}, \underline{A}_{22}$	$\underline{B}_{12}, \underline{1}$ $\underline{B}_{11}, \underline{B}_{11}$ $-\underline{\Delta}_B, \underline{B}_{21}$ $\underline{B}_{11}, \underline{B}_{11}$
$G$	$\underline{\Delta}_Y, \underline{Y}_{12}$ $\underline{Y}_{22}, \underline{Y}_{22}$ $-\underline{Y}_{21}, \underline{1}$ $\underline{Y}_{22}, \underline{Y}_{22}$	$\underline{1}, -\underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{11}$ $\underline{Z}_{21}, \underline{\Delta}_Z$ $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{11}$	$\underline{H}_{22}, -\underline{H}_{12}$ $\underline{\Delta}_H, \underline{\Delta}_H$ $-\underline{H}_{21}, \underline{H}_{11}$ $\underline{\Delta}_H, \underline{\Delta}_H$	$\underline{G}_{11}, \underline{G}_{12}$ $\underline{G}_{21}, \underline{G}_{22}$	$\underline{A}_{21}, -\underline{\Delta}_A$ $\underline{A}_{11}, \underline{A}_{11}$ $\underline{1}, \underline{A}_{12}$ $\underline{A}_{11}, \underline{A}_{11}$	$\underline{B}_{21}, -\underline{1}$ $\underline{B}_{22}, \underline{B}_{22}$ $\underline{\Delta}_B, \underline{B}_{12}$ $\underline{B}_{22}, \underline{B}_{22}$
$A$	$-\underline{Y}_{22}, -\underline{1}$ $\underline{Y}_{21}, \underline{Y}_{21}$ $-\underline{\Delta}_Y, -\underline{Y}_{11}$ $\underline{Y}_{21}, \underline{Y}_{21}$	$\underline{Z}_{11}, \underline{\Delta}_Z$ $\underline{Z}_{21}, \underline{Z}_{21}$ $\underline{1}, \underline{Z}_{22}$ $\underline{Z}_{21}, \underline{Z}_{21}$	$-\underline{\Delta}_H, -\underline{H}_{11}$ $\underline{H}_{21}, \underline{H}_{21}$ $-\underline{H}_{22}, -\underline{1}$ $\underline{H}_{21}, \underline{H}_{21}$	$\underline{1}, \underline{G}_{22}$ $\underline{G}_{21}, \underline{G}_{21}$ $\underline{G}_{11}, \underline{\Delta}_G$ $\underline{G}_{21}, \underline{G}_{21}$	$\underline{A}_{11}, \underline{A}_{12}$ $\underline{A}_{21}, \underline{A}_{22}$	$\underline{B}_{22}, \underline{B}_{12}$ $\underline{\Delta}_B, \underline{\Delta}_B$ $\underline{B}_{21}, \underline{B}_{11}$ $\underline{\Delta}_B, \underline{\Delta}_B$
$B$	$-\underline{Y}_{11}, -\underline{1}$ $\underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{12}$ $-\underline{\Delta}_Y, -\underline{Y}_{22}$ $\underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{12}$	$\underline{Z}_{22}, \underline{\Delta}_Z$ $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{12}$ $\underline{1}, \underline{Z}_{11}$ $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{12}$	$\underline{1}, \underline{H}_{11}$ $\underline{H}_{12}, \underline{H}_{12}$ $\underline{H}_{22}, \underline{\Delta}_H$ $\underline{H}_{12}, \underline{H}_{12}$	$-\underline{\Delta}_G, -\underline{G}_{22}$ $\underline{G}_{12}, \underline{G}_{12}$ $-\underline{G}_{11}, -\underline{1}$ $\underline{G}_{12}, \underline{G}_{12}$	$\underline{A}_{22}, \underline{A}_{12}$ $\underline{\Delta}_A, \underline{\Delta}_A$ $\underline{A}_{21}, \underline{A}_{11}$ $\underline{\Delta}_A, \underline{\Delta}_A$	$\underline{B}_{11}, \underline{B}_{12}$ $\underline{B}_{21}, \underline{B}_{22}$

Определители систем первичных параметров проходных четырехполюсников

	Y	Z	H	G	A	B
$\Delta_Y$	$\frac{Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}}{-Y_{12} Y_{21}}$	$\frac{1}{\Delta_Z}$	$\frac{H_{22}}{H_{11}}$	$\frac{G_{11}}{G_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{12}}$	$\frac{B_{21}}{B_{12}}$
$\Delta_Z$	$\frac{1}{\Delta_Y}$	$\frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}{-Z_{12} Z_{21}}$	$\frac{H_{11}}{H_{22}}$	$\frac{G_{22}}{G_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{21}}$	$\frac{B_{12}}{B_{21}}$
$\Delta_H$	$\frac{Y_{22}}{Y_{11}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{22}}$	$\frac{H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}}{-H_{12} H_{21}}$	$\frac{1}{\Delta_G}$	$\frac{A_{11}}{A_{22}}$	$\frac{B_{22}}{B_{11}}$
$\Delta_G$	$\frac{Y_{11}}{Y_{22}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{11}}$	$\frac{1}{\Delta_H}$	$\frac{G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21}}{-G_{12} G_{21}}$	$\frac{A_{22}}{A_{11}}$	$\frac{B_{11}}{B_{22}}$
$\Delta_A$	$\frac{Y_{12}}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{21}}$	$-\frac{H_{12}}{H_{21}}$	$-\frac{G_{12}}{G_{21}}$	$\frac{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}{-A_{12} A_{21}}$	$\frac{1}{\Delta_B}$
$\Delta_B$	$\frac{Y_{21}}{Y_{12}}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{12}}$	$-\frac{H_{21}}{H_{12}}$	$-\frac{G_{21}}{G_{12}}$	$\frac{1}{\Delta_A}$	$\frac{B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21}}{-B_{12} B_{21}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Соотношения между первичными параметрами взаимных и симметричных четырехполюсников

Система параметров	Взаимный четырехполюсник	Симметричный четырехполюсник
Y	$Y_{12} = Y_{21}$	$Y_{12} = Y_{21}, Y_{11} = Y_{22}$
Z	$Z_{12} = Z_{21}$	$Z_{12} = Z_{21}, Z_{11} = Z_{22}$
H	$H_{12} = -H_{21}$	$\frac{H_{12}}{H_{11} H_{22}} = -\frac{H_{21}}{H_{12} H_{21}} = 1$
G	$G_{12} = -G_{21}$	$\frac{G_{12}}{G_{11} G_{22}} = -\frac{G_{21}}{G_{12} G_{21}} = 1$
A	$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 1$	$\frac{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}{A_{11} - A_{22}} = 1$
B	$B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21} = 1$	$\frac{B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21}}{B_{11} + B_{22}} = 1$

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда гармонической функции 63  
— комплексная 75, 304  
Анализ электрических цепей 54  
Аппроксимация вольт-амперных характеристик 258  
Аргумент комплексного сопротивления 81  
— -- числа 71  
— комплексной проводимости 81  
— частотной характеристики 149
- Базис элементный 416  
Баланс мощностей 105  
— напряжений 38  
— токов 37  
Бел 402  
Бисния 293
- Вариометр 141  
Вершина графа 40, 231  
Ветвь электрической цепи 35  
— графа 40, 231  
  главная 43  
  дерева 43  
Включение встречное 130  
— звездой 34  
— каскадное 383  
— обратное четырехполюсника 395  
— параллельное 34  
— — четырехполюсников 386  
— параллельно-последовательное 387  
— последовательное 34  
— — четырехполюсников 387  
— последовательно-параллельное 387  
— прямое четырехполюсника 395  
— согласное 130  
— треугольником 34  
Волна обрagnая 444  
  отраженная 444  
  -- падающая 444  
  -- прямая 444  
Вольт-ампер 105  
— реактивный 105  
Входы электрической цепи 147  
Выходы внешние цепи 8, 33  
Выпрямление 258  
Выходы электрической цепи 147  
Вырождения топологические 340
- Гармоники 266  
Гиратор 411  
Голограф 149
- Граница полосы пропускания 172, 407  
Граф 40, 41  
— двудольный 42  
— конечный 240  
— направленный 40  
— непланарный 42  
— ориентированный 40  
— планарный 42  
— плоский 42  
— прохождения сигналов 41, 231  
— расширенный 41  
— связный 43  
— сигнальный 41, 231  
— сокращенный 41  
— топологический 40  
Графа связи 43  
Графы гомеоморфные 42  
— дуальные 51  
— изоморфные 41  
— Понтрягина — Куратовского 42  
— равносильные 234
- Двухполюсник 33  
— автономный 225  
— активный 25, 57  
— неавтономный 225  
— неэлектрически управляемый 246  
— пассивный 13, 57  
— реактивный 419  
Декремент колебания логарифмический 290  
Делитель напряжения 154  
Дельта-функция 313  
Дерево графа 43  
Децибел 403  
Диаграмма нулей и полюсов 309  
Длина волны 445  
— электрическая 461  
Добротность индуктивной катушки 159  
— конденсатора 159  
— контура 162, 165, 178, 182  
— эквивалентная 174, 178  
Дробь цепная 118  
Дуальность 23
- Емкость 17  
— динамическая 17  
— -- линейная 18  
— нелинейная 18  
— статическая 17



- Зажимы внешние 8
- входные 147
- выходные 147
- одноименные 133
- Закон Ома в комплексной форме 83
- в операторной форме 298
- для мгновенных значений 16
- электромагнитной индукции 19
- Законы Кирхгофа в комплексной форме 83, 84
- в операторной форме 298
- для мгновенных значений 16
- коммутационной 273
- Затухание контура 163
- Значение действующее 67
- комплексное действующее 79
- мгновенное напряжения 11
- — тока 9
- — э. д. с. 11
- среднесвырявленное 66
- среднее за период 66
- среднеквадратическое 67
- Избирательность 172
- Изображение комплексное 76
- операторное 295
- по Лапласу 294
- Изолятор металлический 463
- Изоморфность 41
- Импульс единичный 313
- Инверсия ветви 238
- Индуктивности связанные 132
- Индуктивность 19
- взаимная 131
- динамическая 21
- статическая 21
- Интеграл Дюамеля (наложения) 321, 324, 326
- Интенсивность внешнего воздействия 60
- Интерполяция 262
- Инцидентность 42
- Искажения нелинейные 270
- Исключение петли 237
- Исток сигнального графа 232
- Источник бесперебойной мощности 26, 27
- вносимый 192
- вырожденный 127
- зависимый 30
- линеаризованный 28
- гармонического тока или напряжения 126
- линейно управляемый 32
- напряжения 25
- — идеальный 25
- невырожденный 127
- независимый 30
- некомпенсированный 226
- неуправляемый 30
- первичный 7
- постоянного напряжения 25
- — тока 26
- — идеальный 26
- управляемый 30
- энергии вторичный 7
- — первичный 7
- э. д. с. 25
- — идеальный 25
- Катушки индуктивности связанные 129
- Коммутация некорректная 273
- определение 271
- Комплекс мгновенный 74
- текущий 74
- Конденсатор 17
- схемы замещения 24, 158
- Контур вторичный 188
- главный 44
- графа 42, 233
- емкостной 277
- параллельный 175
- первичный 188
- последовательный 158
- фазовый 434
- цепи 34
- Контур устраненный 237
- Контуры независимые 40, 50
- связанные 187
- соприкасающиеся 233
- Коэффициент бегущей волны 456
- включения емкости 186
- — индуктивности 182
- гиранги 411
- затухания контура 288
- мощности 108
- нелинейных искажений 270
- ослабления линии 444
- отражения 447
- передачи по напряжению 150
- — по току 150
- полезного действия 110
- расиространения 441, 446
- — операторный 441
- связи между индуктивностями 134
- — контурами 189
- стабилизации 251
- трансформации линейного трансформатора 114
- — линии 479
- управления источником 32
- фазы линии 445
- Кривая нагрузочная 255
- Критерии согласования 109
- физической реализуемости 416, 418
- Линия без искажений 468
- — потеря 440
- длинная 439
- задержки 468
- неоднородная 440, 477

- однородная 440
- резистивная 440, 474
- резистивно-емкостная 440, 476
- экспоненциальная 478

### Матрица волновая 460

- главных контуров 49
- — сечений 48
- инцидентий 46
- компонентная 330, 334
- контурных сопротивлений 206
- — э. д. с. 206
- основных контуров 51
- особенная 348
- неопределенная 350
- — проводимостей 350
- — сопротивлений 354
- проводимостей цепи 332
- разреженная 334
- рассеяния 460
- соединений 46
- сокращенная узлов 46
- сопротивлений цепи 332
- структурная 46
- узлов 46
- — полная 46
- — узловых проводимостей 211
- — токов 211

### Метод выбранных точек 261

- выделения простейших составляющих 424
- выравнивания 259
- интеграла Дюамеля 321
- Кауэра 428
- классический 278, 280
- - анализа переходных процессов 278
- комплексных амплитуд 70, 84
- контурных токов 203, 338
- — — обобщенный 365, 371
- наименьших квадратов 262
- положения 220
- напряжений ветвей 208
- операторный 302
- переменных состояния 338
- пробных источников 226
- разложения в цепную дробь 428
- символический 70
- спектральный 320
- токов ветвей 200
- узловых напряжений 208, 355
- — — обобщенный 365, 369
- Фостера 424

### Многополюсник автономный 344

- активный 344
- взаимный 344
- неавтономный 344
- невзаимный 345
- пассивный 344

### Модуль комплексного сопротивления 80

- комплексного числа 71
- комплексной проводимости 81
- комплексной частотной характеристики 149
- Мощность активная 86, 103
- комплексная 103
- мгновенная 12
- полная 103
- реактивная 104

### Нагрузка согласованная линии 450

- четырехполюсника 396, 403

### Направление напряжения 10, 33

- — положительное 10
- обхода контура 36
- сечения 45
- тока 9, 33
- — положительное 9
- э. д. с. 11

### Напряжение 10

- комплексное 79
- операторное 298
- узловое 208
- — холостого хода 225, 393

### Настройки связанных контуров 193

### Нуль функции комплексного переменного 309

### Нумерация ветвей 36

- контуров 44
- сечений 45
- узлов 36

### Объединение ветвей 236

### Обгибающая 290

### Ограничение колебаний 258

### Окна графа 43

### Оператор вращения 76

- дифференцирования 331
- интегрирования 331
- преобразования Лапласа 295

### Описание цепи топологическое 35

### Определитель графа 241

### Оригиналы функций времени 70, 295

### Параметр связи 196

### Параметры волновые 447

- вторичные 398
- — четырехполюсника 398
- короткого замыкания 349
- - первичные 348
- — четырехполюсника 376
- погонные 59
- характеристические 398
- холостого хода 343

### Передача ветви 232

- контура 233
- мощности в нагрузку 109
- пути 233

### Период 64

### Петли устранение 237

### Петля 232

- Плоскость комплексная 71
- Подграф 42
- Полоса задерживания фильтра 405
  - непрозрачности фильтра 405
  - пропускающая контура 172
  - — фильтра 405
- Полюсы функции комплексного переменного 309
  - элементов 33
- Порт 147
- Порядок сложности цепи 62, 276
- Постоянная времени 283, 284, 286, 290
  - ослабления 402
  - передачи характеристическая 398
  - фазы 402
- Потенциал 10
- Потери коммутационные 272
- Поток магнитный 20, 130
- Потокоцепление 20, 130
- Преобразование звезды в треугольник 119
  - Карсона — Хевисайда 295
  - контурное 338
  - Лапласа 294
  - треугольника в звезду 119
  - узловое 335
- Преобразования изоморфные 41
  - сигнальных графов 236
  - эквивалентные 111
- Приемники энергии 7
- Принцип наложения 62, 218
  - непрерывности заряда 272
  - — потокоцепления 272
  - суперпозиции 62, 338
- Проводимость 16
  - взаимная между узлами 210
  - внутренняя 29
  - гираторная 411
  - комплексная 81
  - операторная 298
  - передаточная 150
  - полная входная 81
  - узла собственная 210
  - характеристическая контура 177
- Производная обобщенная 317
- Прототип 409
- Процесс неустановившийся 64
  - переходной 64, 271
  - свободный 278
  - установившийся 64
- Прямая нагрузочная 255
- Путь сигнального графа 233
  - топологического графа 43
- Пучность 452
- Расстройка абсолютная 168
  - обобщенная 167
  - относительная 168
- Расщепление узла 239
- Реализация цепи 416
- Ребро графа 40
- Режим бегущих волн 450
  - большого сигнала 268
  - короткого замыкания 225
  - критический 291
  - малого сигнала 267
  - неустановившийся 64
  - принужденный 279
  - смешанных волн 455
  - стоячих волн 451
  - установившийся 64
  - холостого хода 225
- Резонанс амплитудный 157
  - второй частный 193
  - индивидуальный 194
  - напряжений 158
  - первый частный 193
  - полный 195
  - сложный 194
  - токов 158
  - фазовый 157
- Свертка функций 326
- Свойства топологические 35
- Свойство фильтрующее 315
- Сечение главное 45
  - графа 44
  - индуктивное 277
  - каноническое 45
- Сигнал сигнального графа 231
- Сила электродвижущая 11
  - — взаимной индукции 131
  - — внешних полей 20
  - — самоиндукции 20, 131
- Силы сторонние 10
- Синтез двухполюсников 416, 424
  - четырехполюсников 416, 432
  - электрических цепей 54, 415
- Система основных уравнений электрического равновесия 55
  - уравнений неопределенная 348
  - — определенная 348
- Скачок единичный 311
  - неединичный 311
- Скорость фазовая 445
- Согласование источника с нагрузкой 109
  - критерии 109
  - линии 450, 464
  - четырехполюсника 396
- Соединение двухполюсников звездой 34
  - параллельное 34, 114
  - — последовательное 34, 112
  - — смешанное 34, 116
  - — треугольником 34
  - — связанных индуктивностей встречное 130
  - — — согласное 130
  - — четырехполюсников каскадное 383
  - — параллельное 386

- параллельно-последовательное 387
- последовательное 387
- последовательно-параллельное 387
- регулярное 383, 388
- Сопrotивление 13
  - автономного двухполюсника 227
  - взаимное контуров 205
  - вносимое 191
  - внутреннее 29
  - волновое 442, 443, 446
  - операторное 298
  - входное комплексное 80
  - операторное 442
  - динамическое 15
  - дифференциальное 15
  - комплексное пассивных двухполюсников 80, 226
  - линейное 16
  - неавтономного двухполюсника 226
  - нелинейное 16
  - общее контуров 205
  - передаточное 150
  - полное 80
  - резонансное 181
  - собственное контура 204
  - статическое 14
  - характеристическое контура 161
  - четырехполюсника 395
- Составляющая принужденная 279
  - свободная 279
- Состояния переменные 339
- Стабилизация напряжения 251
- Сток сигнального графа 232
- Сторона многополюсника 147
- Схема 12, 32
  - замещения комплексная цепи 83
  - элементов цепи 83
  - операторная цепи 298
  - элементов цепи 301
  - планарная 42
  - принципиальная 12
  - расчетная 12
  - цепная 118
  - эквивалентная 12
  - электрическая 12, 32
- Схемы включения неопределенные 347
  - многополюсников обобщенные 347
  - замещения двухполюсников 24, 122
  - гиратора 411
  - канонические Кауэра 428
  - Фостера 425
  - замещения четырехполюсников 390
  - трансформаторов 142, 144, 145
  - эквивалентные для мгновенных значений 83
  - комплексные 83

- операторные 298, 301
- реальных источников 27
- пассивных элементов 24
- трансформаторов 142, 144, 145
- четырехполюсников 389, 392, 393

- Теорема взаимности 221
  - дифференцирования 296
  - запаздывания 296
  - интегрирования 296
  - компенсации 224
  - наложения 62, 218
  - об активном двухполюснике 230
  - обратности 221
  - об эквивалентном источнике 228
  - разложения 297
  - смещения 296
  - суперпозиции 62

- Ток 8
  - комплексный 79
  - контурный 205
  - короткого замыкания 225, 392
  - операторный 298
  - узловой 210
  - частичный 218

- Топология цепей 40
- Точка рабочая 15, 254
- Трансформатор идеальный 144
  - линейный 142
  - совершенный 143
  - четвертьволновый 463
- Треугольник мощностей 104
  - сопротивлений 104

- Удлинение узла 239
- Узел базисный 46
  - зависимый 233
  - индуктивный 277
  - независимый 40, 233
  - промежуточный 236
  - обобщенный 38
  - сигнального графа 231
  - смещенный 232
  - стоячей волны 452
  - топологического графа 40
  - устранимый 35
  - электрической цепи 35

- Узла промежуточного устранения 236
- Уравнение баланса мощностей 106
  - напряжений 38
  - токов 37
  - дифференциальное цепи 56
  - характеристическое 280
  - линии 439
- Уравнения волновые 459
  - компонентные 36, 330
  - цепи 36, 332
  - элементов 331
  - контурные 203
  - длинной линии 439

- основные многополюсника 348
- четырехполюсника 375
- состояния 339
- телеграфные 439
- топологические 37
- узловые 209
- электрического равновесия цепи 55
- Условие баланса мощностей** 106
  - периодичности 64
  - прозрачности фильтра 407
- Условия Дирихле** 279
  - начальные зависящие 276
  - — независимые 276
  - — ненулевые 276
  - — нулевые 276
- Участок электрической цепи активный** 11
  - — — пассивный 11
- Фаза мгновенная** 63
  - начальная 63
- Фильтр идеальный** 408
  - параллельно-производный 409
  - последовательно-производный 409
- Фильтры активные** 405
  - классификация 405
  - мостовые 409
  - реактивные 405
  - типа  $k$  408
  - типа  $m$  409
  - электрические 405
- Формула Крамера** 206, 212
  - Мейсона 241
  - обобщенной производной 317
- Формулы перехода** 377
- Функция гармоническая** 63
  - — значение действующее 67
  - — комплексное 79
  - Дирака 313
  - мероморфная 297
  - периодическая 63
  - времени 63
  - — значение действующее 67
  - положительная вещественная 417
  - реактансная 419
  - реактивная 419
  - физически реализуемая 415
  - Хевисайда 311
- Характеристики амплитудно-фазовые** 150
  - амплитудно-частотные 149
  - вебер-амперные 21
  - вольт-амперные 14
  - — динамические 14
  - — монотонные 245
  - — немонотонные 245
  - — несимметричные 245
  - — симметричные 245
  - — N-образные 245
  - — S-образные 245
- внешние 25
- — источника 25
- временные 54, 316
- входные 150
- импульсные 316
- комплексные частотные 148
- кулон-вольтные 17
- операторные 306
- передаточные 150
- переходные 315
- фазо-частотные 149
- частотные 54
- Цепь активная** 11, 57
  - взаимная 222
  - двухузловая 36, 57, 114
  - дифференцирующая 410
  - дуальная 53
  - идеализированная 8
  - интегрирующая 410
  - лестничная 118
  - линейная 60, 62
  - — инвариантная во времени 61
  - — параметрическая 61
  - — с постоянными параметрами 61
  - моделирующая 8
  - невязанная 223
  - нелинейная 60
  - необратимая 223
  - непланарная 42
  - неразветвленная 34
  - обратимая 222
  - одноконтурная 36, 57, 112
  - параметрическая 61
  - пассивная 11, 57
  - планарная 42, 57
  - плоская 42, 57
  - простейшая 36
  - разветвленная 34
  - сложная 36
  - с распределенными параметрами 58
  - — сосредоточенными параметрами 57
  - цепная 118
  - электрическая 7
- Частота** 64
  - биений 294
  - граничная 173
  - комбинационная 269
  - комплексная 295, 304
  - обобщенная 304
  - резонансная 158, 161
  - свободных колебаний 289
  - связи 198
  - среза 405
  - угловая 63
- Четырехполюсник автономный** 374, 391
  - активный 374

- взаимный 373
  - минимально-фазовый 434
  - мостовой 378
  - неавтономный 374
  - невзаимный 374
  - неминимально-фазовый 434
  - несимметричный 374
  - неуровновешенный 374
  - пассивный 374
  - проходной 373
  - разорванный 388
  - связи 188
  - симметричный 374
  - уравновешенный 374
  - чисто фазового сдвига 434
- Число комплексное 71
- сопряженное 72

**Ширина полосы пропускания** 173

**Шлейф реактивный** 462

**Э.д.с. контурная** 205

**Эквивалентность** полная 111

- частичная 111

**Элемент компенсирующий** 108

— резистивный безынерционный 24

**Элементы активные** 25, 60

— безынерционные 244

— вспомогательные идеализированные 32

— реальные 8, 32

— двухполюсные 8

— диссипативные 16

— дуальные 23

— инерционные 244

— линейные 61

— нелинейные 61

— параметрические 61

— пассивные 13

— реактивные 22

— резистивные 16

— топологические 36

— управляемые 246

— энергоемкие 22

**Ячейка базисная** 43

- графа 43

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>Глава I. Основные понятия теории цепей</b> . . . . .	<b>7</b>
§ 1.1. Основные определения . . . . .	7
§ 1.2. Идеализированные пассивные элементы . . . . .	13
§ 1.3. Идеализированные активные элементы . . . . .	25
§ 1.4. Топология цепей . . . . .	32
§ 1.5. Уравнения электрического равновесия цепей . . . . .	54
<b>Глава 2. Простейшие линейные цепи при гармоническом воздействии</b> . . . . .	<b>63</b>
§ 2.1. Задача анализа цепей с источниками гармонических токов и напряжений . . . . .	63
§ 2.2. Метод комплексных амплитуд . . . . .	70
§ 2.3. Идеализированные пассивные элементы при гармоническом воздействии . . . . .	85
§ 2.4. Анализ простейших линейных цепей при гармоническом воздействии . . . . .	92
§ 2.5. Энергетические процессы в простейших цепях при гармоническом воздействии . . . . .	101
§ 2.6. Преобразования электрических цепей . . . . .	111
§ 2.7. Цепи с взаимной индуктивностью . . . . .	129
<b>Глава 3. Частотные характеристики простейших электрических цепей</b> . . . . .	<b>147</b>
§ 3.1. Комплексные частотные характеристики линейных электрических цепей . . . . .	147
§ 3.2. Последовательный колебательный контур . . . . .	158
§ 3.3. Параллельный колебательный контур . . . . .	175
§ 3.4. Связанные колебательные контуры . . . . .	187
<b>Глава 4. Анализ линейных электрических цепей с постоянными параметрами при гармоническом воздействии</b> . . . . .	<b>199</b>
§ 4.1. Методы формирования уравнений электрического равновесия цепи . . . . .	199
§ 4.2. Основные теоремы теории цепей . . . . .	218
§ 4.3. Метод сигнальных графов . . . . .	231
<b>Глава 5. Нелинейные резистивные цепи</b> . . . . .	<b>243</b>
§ 5.1. Задача анализа нелинейных резистивных цепей . . . . .	243
§ 5.2. Графические методы анализа нелинейных резистивных цепей . . . . .	249
§ 5.3. Аппроксимация характеристик нелинейных резистивных элементов . . . . .	258
§ 5.4. Нелинейные резистивные элементы при гармоническом внешнем воздействии . . . . .	265

<b>Глава 6. Методы анализа переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами</b> . . . . .	271
§ 6.1. Задача анализа переходных процессов . . . . .	271
§ 6.2. Классический метод анализа переходных процессов . . . . .	278
§ 6.3. Операторный метод анализа переходных процессов . . . . .	294
§ 6.4. Операторные характеристики линейных цепей . . . . .	304
§ 6.5. Временные характеристики линейных цепей . . . . .	311
§ 6.6. Применение принципа наложения для анализа переходных процессов в линейных цепях. . . . .	320
<b>Глава 7. Методы анализа цепей, ориентированные на применение ЭВМ</b> . . . . .	327
§ 7.1. Задача машинного анализа цепей . . . . .	327
§ 7.2. Методы формирования уравнений электрического равновесия, предназначенные для применения в программах машинного анализа цепей . . . . .	330
§ 7.3. Выбор методов формирования и решения уравнений электрического равновесия цепи . . . . .	340
<b>Глава 8. Основы теории четырехполюсников и многополюсников</b> . . . . .	343
§ 8.1. Многополюсники и цепи с многополюсными элементами . . . . .	343
§ 8.2. Основные уравнения и системы первичных параметров проходных четырехполюсников . . . . .	373
§ 8.3. Характеристические параметры и комплексные частотные характеристики неавтономных проходных четырехполюсников . . . . .	393
§ 8.4. Четырехполюсники специального вида . . . . .	405
<b>Глава 9. Синтез электрических цепей</b> . . . . .	415
§ 9.1. Задача синтеза линейных электрических цепей . . . . .	415
§ 9.2. Основные свойства и критерии физической реализуемости операторных входных характеристик линейных пассивных цепей . . . . .	417
§ 9.3. Методы реализации реактивных двухполюсников . . . . .	424
§ 9.4. Основы синтеза линейных пассивных четырехполюсников. . . . .	432
<b>Глава 10. Цепи с распределенными параметрами</b> . . . . .	439
§ 10.1. Задача анализа цепей с распределенными параметрами . . . . .	439
§ 10.2. Однородная длинная линия при гармоническом внешнем воздействии . . . . .	442
§ 10.3. Операторные и комплексные частотные характеристики однородных длинных линий . . . . .	450
§ 10.4. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами . . . . .	466
§ 10.5. Цепи с распределенными параметрами специальных типов . . . . .	474
<b>Заключение</b> . . . . .	482
<b>Литература</b> . . . . .	483
<b>Приложения</b> . . . . .	484
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	488